R 43. 1990.
F 2557

ACADEMIA ROMÂNĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

1

TOMUL 49

ianuarie — februarie

1990

1990 -05- 16

EDITURA ACADEMIEI ROMÂNE

CONSILIUL DE CONDUCERE

Acad. IOAN ANTON, *redactor şef*

Membri :

Acad. ŞTEFAN BĂLAN
Acad. CAIUS IACOB
Acad. DAN MATEESCU
Acad. RADU VOINEA
Acad. GHEORGHE BUZDUGAN,
Acad. NICOLAE PATRAULEA,
Prof. RADU C. BOGDAN
Prof. VIRGILIU N. CONSTANTINESCU
Prof. NICOLAE CRISTESCU
Prof. TRAIAN DEMIAN
Prof. LAZĂR DRAGOŞ
Prof. CONSTANTIN IAMANDI
Prof. DUMITRU MANGERON
Dr. ing. DAN PANTAZOPOL
Prof. DAN PAVELESCU
Prof. CRISTIAN PELECUDI
Dr. ing. MIRCEA RADEŞ
Prof. GHEORGHE SILAŞ
Dr. doc. VIOREL VISARION

Prof. TEODOR OROVEANU, *secretar de redacţie*

COLEGIUL DE REDACŢIE

Acad. IOAN ANTON, *redactor şef*

Membri :

Acad. ŞTEFAN BĂLAN
Acad. DAN MATEESCU
Prof. TRAIAN DEMIAN
Dr. ing. DAN PANTAZOPOL

Prof. TEODOR OROVEANU, *secretar de redacţie*

Toate comenzile externe pentru lucrările apărute în Editura Academiei Române se vor adresa la : ROMPRESFILATELIA, sectorul export-import presă, P.O. Box 12—201, telex : 10376 prsfi r, Calea Griviţei nr. 64—66, 78104 Bucureşti, România ; în ţară, abonamentele se primesc la oficiile poştale.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice corespondenţă se trimit pe adresa Colegiului de redacţie al revistei, 79717 Bucureşti 22, Calea Victoriei nr. 125.

EDITURA ACADEMIEI ROMÂNE
79717 Bucureşti 22, Calea Victoriei nr. 125, sectorul 1

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 49, nr. 1 ianuarie – februarie 1990

BME KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
F
2157
FOLYÓIRAT OSZTÁLY

SUMAR

STUDII

N. MARCOV, Mişcări subsonice în prezenţa unor profile simetrice 3

A. CARABINEANU, Mişcarea uniformă de filtraţie în prezenţa unei cavităţi subţiri 19

AL. D. STAN, Interferenţa imobilelor supuse la infiltrarea gazelor 27

P. BRATU, Dinamica morilor vibratoare pentru măcinarea materialelor granulare 39

I. MARŢIAN şi O. ILEA, Plăci plane dreptunghiulare cu deformaţii mari încastrate pe contur, supuse acţiunii transversale a unei sarcini uniform distribuite . . 45

P. CIZMAŞ, Calculul discurilor şi plăcilor circulare încărcate axial simetric prin metoda de recurenţă a celor trei necunoscute 71

M. V. SOARE şi D. IORDACHE, O extindere a metodei parametrilor iniţiali la calculul numeric al rezervoarelor 85

I. M. CIORNEI şi E. N. DIACONESCU, Optimizarea contactului cu tracţiune elasto-hidrodinamică din punct de vedere al forfecărilor parazite 99

RECENZII 109

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM

MIȘCĂRI SUBSONICE ÎN PREZENȚA UNOR PROFILE SIMETRICE

de N. MARCOV

Universitatea din București

Se precizează ecuațiile neliniare ale mișcării subsonice a unui fluid ideal și se construiesc cu ajutorul unor funcții reale sau complexe reprezentări ale soluției aproximative a acestor ecuații. Funcțiile reprezentărilor sînt soluții ale unor probleme la limită liniare pentru exteriorul profilului în prezența căruia are loc mișcarea fluidă.

Particulele unui fluid compresibil și izentropic se deplasează în prezența unui profil plan simetric în raport cu axele sistemului de referință. Ecuațiile frontierei profilului depind de un parametru real k din intervalul (0,1), și ele sînt specificate în formulele (100). La mari distanțe de profil particulele fluide au o mișcare uniformă, iar numărul lui Mach corespunzător M_∞ are o valoare din intervalul (0, 1/2). Ecuațiile (1), (16) sau (37) ale mișcării potențiale a fluidului ideal sînt ecuații neliniare. Pentru a construi o soluție aproximativă a acestor ecuații pentru potențialul complex F și pentru viteza complexă W, se utilizează dezvoltările limitate la trei termeni (40). Parametrul mic b al acestor dezvoltări este precizat în formula (5). Pentru coeficienții dezvoltărilor limitate se obțin reprezentările (32), (49), (50), (59), (60) și (68). Aceste reprezentări depind de anumite funcții de variabila complexă z, funcții definite în domeniul fluid. Astfel, f și w sînt potențialul, respectiv viteza complexă corespunzătoare deplasării unui fluid incompresibil în prezența aceluiași profil, funcțiile g_1, g_2 și h_2 se obțin prin integrări conform formulelor (33) și (58), iar funcțiile h_1, h_{10}, h_{20} și h_{30} se obțin ca soluții ale unor probleme la limită pentru domeniul fluid conform condițiilor (34), (62), (63) respectiv (64). Aceste funcții sînt efectiv determinate pentru profilele precizate în formulele (100), și expresiile lor sînt specificate cu ajutorul parametrului auxiliar Z, în formulele (72)—(80) și (83). Expresia teoretică a coeficientului de presiune pe profil este precizată în formula (97). În figura 1 se arată graficul acestui coeficient pentru mișcări izentropice la numere Mach mici, în prezența unui profil cu parametrul de formă k avînd valoarea 1/2, în cazul în care exponentul transformărilor adiabatice locale (2) are valoarea 1,404.

Se consideră mișcarea plană și potențială a unui fluid ideal și izentropic în prezența unui profil dintr-o serie unidimensională de profile simetrice în raport cu axele sistemului de referință. Funcția adimensională de curent ψ trebuie să verifice ecuația cu derivate parțiale, de

tip eliptic (16), condiția de alunecare (4), și să determine la mari distanțe de profil o viteză de componente (1,0). În cazul mișcărilor la numere Mach mici, parametrul b definit în formula (5) este un parametru mic pentru ecuația funcției de curent. Pentru a construi o soluție aproximativă a acestei ecuații se precizează ecuațiile (18) pentru aproximațiile succesive ψ_n. Aproximația ψ_0 corespunde mișcării unui fluid asociat, dar incompresibil, în prezența aceluiași profil. Aproximațiile ψ_n sînt polinoame în raport cu parametrul b, avînd un grad strict mai mare decît n pentru $n \geqslant 2$. Determinarea analitică a aproximației ψ_1 conduce la reprezentarea (28) și (32).

Pentru a construi o expresie aproximativă ψ_n' a funcției de curent se poate utiliza și metoda directă Imai-Lamla-Iacob [1,2]. În cadrul acestei metode aproximația ψ_n' este un polinom de gradul n în raport cu b. Din calculele efectuate în continuare se confirmă identitatea primelor două aproximații obținute prin această metodă sau prin metoda precedentă a aproximațiilor succesive,

$$\psi_0 = \psi_0', \quad \psi_1 = \psi_1', \quad \psi_2 = \psi_2' + 0(b^3).$$

Primele două aproximații nu depind de constanta fizică specifică transformărilor adiabatice a fluidului considerat. Pentru a obține influența acestei constante asupra funcției de curent s-a studiat și aproximația următoare. Reprezentarea (60)—(64) arată că această aproximație este o funcție afină de constanta γ.

Reprezentările generale obținute pentru primele aproximații depind de funcții definite în exteriorul profilului simetric. Aceste funcții se obțin prin integrare sau prin rezolvarea unor probleme la limită. În cazul profilelor cu ecuațiile parametrice (100), se cunoaște reprezentarea conformă (74) a exteriorului profilului pe interiorul discului unitate. În acest mod se obțin probleme la limită pentru discul unitate, probleme care pot fi soluționate fie pe baza formulei integrale a lui Schwarz-Villat [1], fie direct cu ajutorul unor transformări convenabile. Din punct de vedere experimental sînt importante valorile coeficientului de presiune pe profil. Pentru acest motiv se precizează expresia teoretică (97), și graficul din figura 1 a acestui coeficient.

ECUAȚII ALE MIȘCĂRII UNUI FLUID COMPRESIBIL

Studiul mișcării staționare și potențiale a unui fluid compresibil izentropic într-un sistem de referință adimensional xOy, presupune determinarea vitezelor reale $U \cdot V_\infty$ și $V \cdot V_\infty$, a potențialului real $V_\infty \varphi$, a funcției de curent $V_\infty \psi$, a densității ρ, a presiunii p și a vitezei de propagare a sunetului $\tilde{a}$ corelate prin ecuațiile

$$U = \partial\varphi/\partial x = (\rho_\infty/\rho)\partial\psi/\partial y; \quad V = \partial\varphi/\partial y = -(\rho_\infty/\rho)\partial\psi/\partial x, \tag{1}$$

$$p = p_\infty(\rho/\rho_\infty)^\gamma; \quad \tilde{a}^2 = \mathrm{d}p/\mathrm{d}\rho = \gamma p/\rho = a_\infty^2(\rho/\rho_\infty)^{\gamma-1}, \tag{2}$$

$$\frac{1}{2}V_\infty^2(1 - U^2 - V^2) = \int_{p_\infty}^{p} \frac{1}{\rho}\,\mathrm{d}p = \frac{1}{\gamma - 1}(\tilde{a}^2 - a_\infty^2), \tag{3}$$

în care γ este o constantă reală supraunitară, iar viteza V_∞, presiunea p_∞, densitatea ρ_∞ şi viteza de propagare a sunetului a_∞ sînt constante pozitive specifice particulelor fluide de la mari distanţe de profilul în prezenţa căruia are loc mişcarea fluidă. Condiţia de alunecare a particulelor fluidului ideal pe frontiera profilului conduce la condiţia de anulare a funcţiei de curent pe această frontieră,

$$(x, y) \in \mathscr{P} \Rightarrow \psi(x, y) = 0. \tag{4}$$

Considerăm numărul lui Mach M_∞ şi specificăm parametrul b prin

$$M_\infty = V_\infty/a_\infty; \quad b = M_\infty^2/4, \tag{5}$$

în care viteza de propagare a sunetului în fluidul izentropic studiat are la mari distanţe o valoare limită

$$a_\infty = (\gamma p_\infty/\rho_\infty)^{1/2}. \tag{5'}$$

Din integrala lui Bernoulli (3) şi din relaţiile (2) avem expresiile

$$\begin{aligned} \tilde{a}^2 &= a_\infty^2(1 - 2b(\gamma - 1)Y), \\ \rho &= \rho_\infty(1 - 2b(\gamma - 1)Y)^{1/(\gamma-1)}, \\ p &= p_\infty(1 - 2b(\gamma - 1)Y)^{\gamma/(\gamma-1)}, \end{aligned} \tag{6}$$

unde

$$Y = U^2 + V^2 - 1. \tag{7}$$

În cazul în care parametrul b are valori mici se utilizează dezvoltări limitate atît pentru densitatea relativă, cît şi pentru coeficientul de presiune C_p,

$$1 - \rho/\rho_\infty = 2bY(1 + (\gamma - 2)bY + \ldots), \tag{8}$$

$$1 - p/p_\infty = 2b\gamma Y(1 - bY + 2(2 - \gamma)b^2Y^2/3 + \ldots),$$

$$C_p = \frac{2(p - p_\infty)}{\rho_\infty V_\infty^2} = -Y(1 - bY + 2(2 - \gamma)b^2Y^2/3 + \ldots) \tag{9}$$

Prin eliminarea potenţialului φ din ecuaţiile (1) rezultă

$$\rho_\infty(\psi_{xx} + \psi_{yy}) + V\rho_x - U\rho_y = 0. \tag{10}$$

Derivatele parţiale ale presiunii se obţin din ecuaţia de stare a unui fluid barotrop sau direct din (2),

$$p_x = \tilde{a}^2\rho_x, \quad p_y = \tilde{a}^2\rho_y \tag{11}$$

Aceste derivate parţiale se pot calcula şi cu ajutorul integralei lui Bernoulli. Avem astfel din (3) expresiile următoare:

$$\begin{aligned} p_x &= -\frac{1}{2}\rho V_\infty^2(U^2 + V^2)_x = -\frac{1}{2}\rho V_\infty^2[(\rho_\infty\psi_y/\rho)^2 + (\rho_\infty\psi_x/\rho)^2]_x = \\ &= V_\infty^2(U^2 + V^2)\rho_x - \rho_\infty V_\infty^2(U\psi_{xy} - V\psi_{xx}), \end{aligned} \tag{12}$$

$$p_y = V_\infty^2(U^2 + V^2)\rho_y - \rho_\infty V_\infty^2(U\psi_{yy} - V\psi_{xy}).$$

Eliminînd derivatele parţiale ale presiunii se obţine

$$[\tilde{a}^2 - V_\infty^2(U^2 + V^2)]\rho_x = -\rho_\infty V_\infty^2(U\psi_{yx} - V\psi_{xx}),$$
$$[\tilde{a}^2 - V_\infty^2(U^2 + V^2)]\ \rho_y = -\rho_\infty V_\infty^2(U\psi_{yy} - V\psi_{xy}). \tag{13}$$

Substituind derivatele parţiale ale densităţii în ecuaţia (10), vom obţine ecuaţia funcţiei de curent,

$$[\tilde{a}^2 - V_\infty^2(U^2 + V^2)](\psi_{xx} + \psi_{yy}) = V_\infty^2(-V^2\psi_{xx} + 2UV\psi_{xy} - U^2\psi_{yy}).$$

Împărţim această ecuaţie cu a_∞^2 şi notăm

$$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2. \tag{14}$$

Funcţia de curent verifică ecuaţia cvasiliniară

$$(\tilde{a}/a_\infty)^2\Delta\psi = M_\infty^2(U^2\psi_{xx} + 2UV\psi_{xy} + V^2\psi_{yy}) \tag{15}$$

sau echivalent, cu notaţiile (5), (6) şi (7),

$$\Delta\psi = 4bN(\psi), \tag{16}$$

unde

$$N(\psi) = \frac{1}{2}(\gamma - 1)Y\Delta\psi + U^2\psi_{xx} + 2UV\psi_{xy} + V^2\psi_{yy}. \tag{17}$$

ECUAŢII PENTRU PRIMELE APROXIMAŢII SUCCESIVE

Existenţa operatorului neliniar N sugerează determinarea unor soluţii aproximative a ecuaţiei (15) prin calculul succesiv a soluţiilor ecuaţiei (16)

$$\Delta\psi_0 = 0, \qquad n \geqslant 1 \Rightarrow \Delta\psi_n = 4bN(\psi_{n-1}) \tag{18}$$

cu condiţiile la limită ce rezultă din condiţia de alunecare (4),

$$(x, y) \in \mathscr{P} \Rightarrow \psi_n = 0, \tag{19}$$

şi condiţiile la mari distanţe

$$n \geqslant 0 \Rightarrow \lim_{\infty}(\psi_{nx}, \psi_{ny}) = (0,1). \tag{20}$$

Aproximaţia ψ_0 poate fi astfel interpretată drept funcţie de curent pentru mişcarea unui fluid incompresibil cu densitatea ρ_∞, în prezenţa aceluiaşi profil $\mathscr{P}$. Vitezele adimensionale ale particulelor acestui fluid asociat vor fi notate

$$u = \partial\varphi_0/\partial x = \partial\psi_0/\partial y, \quad v = \partial\varphi_0/\partial y = -\partial\psi_0/\partial x \tag{21}$$

astfel încît coeficientul de presiune corespunzător are valoarea

$$-X = C_{P_0} = 2(p_0 - p_\infty)/(\rho_\infty V_\infty^2) = 1 - u^2 - v^2. \tag{22}$$

Utilizînd variabilele complexe

$$z = x + iy, \quad t = x - iy \tag{23}$$

derivatele formale

$$\partial/\partial x = \partial/\partial z + \partial/\partial t, \quad \partial/\partial y = i(\partial/\partial z - \partial/\partial t) \tag{23'}$$

și potențialii complecși

$$f(z) = \varphi_0 + i\psi_0, \quad \bar{f}(t) = \varphi_0 - i\psi_0, \tag{24}$$

pentru vitezele complexe ale particulelor fluidului incompresibil asociat și pentru coeficientul de presiune corespunzător se obțin expresiile următoare:

$$w(z) = df/dz = u - iv, \quad s(t) = d\bar{f}/dt = u + iv, \quad -X = 1 - ws. \tag{25}$$

Pentru aproximația următoare se obține ecuația

$$\Delta\psi_1 = 4bN(\psi_0), \tag{26}$$

unde termenul liber se calculează conform relațiilor (17), (18) și (21),

$$N(\psi_0) = u^2\psi_{0xx} + 2uv\psi_{0xy} - v^2\psi_{0xx} = 2uv\,u_x - (u^2 - v^2)v_x =$$
$$= \mathrm{Im}[(u_x - iv_x)(u + iv)^2]. \tag{27}$$

Soluția acestei ecuații admite reprezentarea

$$\psi_1 = \psi_0 + b\ \mathrm{Im}\ A \tag{28}$$

în care funcția complexă A verifică ecuația

$$\Delta A = 4(u_x - iv_x)(u + iv)^2 = 4s^2(t)\ dw/dz, \tag{29}$$

și condițiile la limită și la mari distanțe

$$(x, y) \in \mathscr{P} \Rightarrow \mathrm{Im}\ A = 0; \quad \lim_{\infty}\ (A_x, A_y) = (0,0). \tag{30}$$

În raport cu variabilele complexe z și t, ecuația funcției A are forma echivalentă

$$4\,\partial^2 A/\partial z\,\partial t = 4\,\partial(s^2 w - s)/\partial z.$$

din care rezultă prin integrare

$$\partial A/\partial t = s(ws - 1) = (w - 1)s + w(s - 1)s. \tag{31}$$

Prezența termenului s este impusă de existența condiției la mari distanțe (30). Prin urmare corecția liniară de compresibilitate A admite reprezentarea

$$A = (w - 1)[\bar{f}(t) - f(z)] + w\bar{g}_1(t) + g_1(z) + h_1(z) \tag{32}$$

în care funcția g_1 este definită punctual prin

$$g_1(z) = \int (w - 1)w\ dz = \int_J (w - 1)df, \tag{33}$$

iar funcția h_1 trebuie determinată astfel încît să fie verificată condiția la limită (30),

$$(x, y) \in \mathscr{P} \Rightarrow t = \bar{z} \Rightarrow \mathrm{Im}\ h_1(z) = -\mathrm{Im}\ (w\bar{g}_1 + g_1) = \mathrm{Im}\ (\overline{w-1}\, g_1). \quad (34)$$

Determinarea funcției h_1 nu este influențată de prezența explicită a funcțiilor $\bar{f}$ și f în reprezentarea (32) deoarece aceste funcții au valori reale identice în punctele frontierei profilului.

Pentru aproximația următoare se obține ecuația

$$\Delta\psi_2 = 4bN(\psi_1).$$

Conform relației (17) și reprezentării afine (28), $N(\psi_1)$ va fi un polinom de gradul trei în raport cu parametrul b. Soluția ψ_2 va fi astfel un polinom de gradul patru în raport cu b. În cazul valorilor mici ale acestui parametru se pot reține în calcule doar corecțiile sau coeficienții puterilor b^m cu m din mulțimea $\{0, 1, 2\}$.

REPREZENTĂRI ALE PRIMELOR CORECȚII DE COMPRESIBILITATE

Fie F și G potențiali complecși asociați mișcării fluidului compresibil prin

$$F = \varphi + i\psi, \quad G = \varphi - i\psi. \quad (35)$$

Ecuațiile (1) pot fi retranscrise sub forma unui sistem

$$W = U - iV = \partial\varphi/\partial x - i\partial\varphi/\partial y = 2\partial\varphi/\partial z = 2i(\rho_\infty/\rho)\partial\psi/\partial z,$$

$$S = U + iV = \partial\varphi/\partial x + i\partial\varphi/\partial y = 2\partial\varphi/\partial t = -2i(\rho_\infty/\rho)\partial\psi/\partial t. \quad (36)$$

Funcțiile F și G verifică prin urmare sistemul

$$W = \partial(F+G)/\partial z = (\rho_\infty/\rho)\partial(F-G)/\partial z,$$

$$S = \partial(F+G)/\partial t = -(\rho_\infty/\rho)\partial(F-G)/\partial t. \quad (37)$$

Eliminînd cîte o derivată parțială se obține forma echivalentă

$$2\partial F/\partial t = (1 - \rho/\rho_\infty)S, \quad 2\partial G/\partial z = (1 - \rho/\rho_\infty)W, \quad (38)$$

în care densitatea este specificată în formulele (6) sau (8) și unde

$$\Upsilon = WS - 1. \quad (39)$$

Parametrul b are valori mici atunci cînd numărul lui Mach M_∞ este mic. În acest caz se admite că soluția (F, G) este dezvoltabilă în serie. Pentru a obține o soluție aproximativă se utilizează serii limitate atît pentru potențiali, cît și pentru vitezele complexe ale particulelor fluidului compresibil.

$$F = f + Ab + A_2b^2 + \ldots, \quad G = \bar{f} + \tilde{A}b + \tilde{A}_2b^2 + \ldots,$$

$$W = w + Bb + B_2b^2 + \ldots, \quad S = s + \tilde{B}b + \tilde{B}_2b^2 + \ldots. \quad (40$$

Din aceste dezvoltări și din relațiile (37) rezultă primele egalități din (25) și expresiile corecțiilor de viteză funcție de corecțiile potențialilor complecși

$$B = \partial(A + \widetilde{A})/\partial z;\ \widetilde{B} = \partial(A + \widetilde{A})/\partial t,$$

$$B_2 = \partial(A_2 + \widetilde{A}_2)/\partial z,\ \widetilde{B}_2 = \partial(A_2 + \widetilde{A}_2)/\partial t. \tag{41}$$

Dezvoltările limitate ale densității și coeficientului de presiune se obțin din dezvoltările (8) și (9), și din relațiile următoare:

$$X = ws - 1;\ Y_1 = w\widetilde{B} + sB;\ Y_2 = w\widetilde{B}_2 + sB_2 + \widetilde{B}B, \tag{42}$$

$$Y = X + Y_1 b + Y_2 b^2 + \ldots, \tag{42'}$$

$$1 - \rho/\rho_\infty = 2b(X + Y_1 b + \ldots)(1 + (\gamma - 2)bX + \ldots), \tag{43}$$

$$C_p = -(X + Y_1 b + Y_2 b^2 + \ldots)(1 - bX - Y_1 b^2 + 2(2 - \gamma)b^2 X^2/3 + \ldots),$$

$$C_p = -(X + Pb + P_2 b^2 + \ldots), \tag{44}$$

unde

$$P = Y_1 - X^2,\ P_2 = -2PX - 2(\gamma + 1)X^3/3 + Y_2. \tag{45}$$

Substituind (40) și (43) în prima ecuație din (38), vom avea

$$2b\ \partial A/\partial t + 2b^2 \partial A_2/\partial t + \ldots =$$

$$= 2b(X + (Y_1 + (\gamma - 2)X^2)b + \ldots)(s + \widetilde{B}b + \ldots).$$

Din identificarea coeficienților acestor dezvoltări avem ecuațiile

$$\partial A/\partial t = sX;\ \partial A_2/\partial t = s(P + (\gamma - 1)X^2) + \widetilde{B}X. \tag{46}$$

Analog, din a doua ecuație (38) rezultă

$$\partial \widetilde{A}/\partial z = wX,\ \partial \widetilde{A}_2/\partial z = w(P + (\gamma - 1)X^2) + BX. \tag{47}$$

Condițiile la limită pentru determinarea soluțiilor acestor ecuații se obțin din condițiile de alunecare (4) și din dezvoltarea (40)

$$(x, y) \in \mathscr{P} \Rightarrow t = \bar{z} \Rightarrow \mathrm{Im}\ A = \mathrm{Im}\ \widetilde{A} = \mathrm{Im}\ A_2 = \mathrm{Im}\ \widetilde{A}_2 = 0. \tag{48}$$

Prima ecuație (46) obținută prin metoda dezvoltărilor în serie este identică cu ecuația (31) obținută prin metoda aproximațiilor succesive. Se regăsește astfel reprezentarea (32) a corecției liniare A. Analog, pentru prima ecuație (47) avem reprezentarea

$$\widetilde{A} = (s - 1)[f(z) - \bar{f}(t)] + sg_1(z) + \bar{g}_1(t) + \bar{h}_1(t). \tag{49}$$

Corecțiile liniare ale vitezelor complexe se obțin din formulele (41), derivatele (46) și (47), și din reprezentările (32), (33) și reprezentarea precedentă,

$$B = wX + \partial A/\partial z,\ \widetilde{B} = sX + \partial \widetilde{A}/\partial t, \tag{50}$$

unde

$$\partial A/\partial z = [\bar{f}(t) - f(z) + \bar{g}_1(t)]\mathrm{d}w/\mathrm{d}z + \mathrm{d}h_1/\mathrm{d}z, \tag{51}$$

$$\partial\widetilde{A}/\partial t = [f(z) - \bar{f}(t) + g_1(z)]\mathrm{d}s/\mathrm{d}t + \mathrm{d}\bar{h}_1/\mathrm{d}t. \tag{52}$$

Corecția liniară a presiunii se determină din formulele (42), (45) și (50),

$$P = w\partial\widetilde{A}/\partial t + s\partial A/\partial z + 2wsX - X^2. \tag{53}$$

Ecuația corecției pătratice a potențialului complex G se obține din formula (47),

$$\partial\widetilde{A}_2/\partial z = w^2\partial\widetilde{A}/\partial t + (ws + X)\partial A/\partial z + w(2wsX + (\gamma - 1)X^2). \tag{54}$$

Integrala primului termen se determină din formulele (33) și (52),

$$A_{01} = \int w^2(\partial\widetilde{A}/\partial t)\mathrm{d}z = \iint(\partial\widetilde{A}/\partial t)w\mathrm{d}f = \iint(\partial\widetilde{A}/\partial t)\mathrm{d}(f + g_1) =$$

$$= \frac{1}{2}[f(z) - \bar{f}(t) + g_1(z)]^2 \ \mathrm{d}s/\mathrm{d}t + [f(z) - \bar{f}(t) + g_1(z)]\mathrm{d}h_1/\mathrm{d}t. \tag{55}$$

Integrala termenului următor se calculează pe baza expresiei (51), a reprezentării (32) și a unei integrări prin părți,

$$A_{02} = \int(2ws - 1)(\partial A/\partial z)\ \mathrm{d}z =$$

$$= s(\bar{f} + \bar{g}_1)w^2 - 2s\int wf\ \mathrm{d}w + 2s\int w\ \mathrm{d}h_1 - A - \bar{f} =$$

$$= w^2s[\bar{f}(t) - f(z) + \bar{g}_1(t)] + s\int w^2\mathrm{d}f + 2s\int w\ \mathrm{d}h_1 - A - \bar{f}(t). \tag{56}$$

Ultimul termen are expresia echivalentă

$$w(2ws\ X + (\gamma - 1)X^2) = -2\gamma wX + (\gamma + 1)(w^2s^2 - 1)w =$$

$$= -2\gamma\partial\widetilde{A}/\partial z + (\gamma + 1)\partial(s^2\int w^2\mathrm{d}f - f)/\partial z. \tag{57}$$

Notăm

$$g_2(z) = \int w^2\ \mathrm{d}f\,;\ \ h_2(z) = 2\int w\ \mathrm{d}h_1,$$

$$A_{03} = -2\gamma\widetilde{A} + (\gamma + 1)\ [s^2g_2(z) - f(z)]. \tag{58}$$

Soluția ecuației (54) are astfel reprezentarea

$$\widetilde{A}_2 = A_{01} + A_{02} + A_{03} + \bar{h}_{10}(t) + \bar{h}_{20}(t) + \bar{h}_{30}(t), \tag{59}$$

în care funcțiile $\bar{h}_{i_0}$ se determină astfel încît să fie verificată condiția la limită (48). Analog, se obține reprezentarea soluției ecuației (46),

$$A_2 = A_{10} + A_{20} + A_{30} + h_{10}(z) + h_{20}(z) + h_{30}(z), \tag{60}$$

unde

$$A_{10} = \frac{1}{2}\,[\bar{f}(t) - f(z) + \bar{g}_1(t)]^2\ \mathrm{d}w/\mathrm{d}z + [\bar{f}(z) - f(z) + \bar{g}_1(t)]\ \mathrm{d}h_1/\mathrm{d}z,$$

$$A_{20} = w\{s^2[f(z) - \bar{f}(t) + g_1(z)] + \bar{g}_2(t) + \bar{h}_2(t)\} - \tilde{A} - f(z), \qquad (61)$$

$$A_{30} = -2\gamma A + (\gamma + 1)\ [w^2\bar{g}_2(t) - \bar{f}(t)],$$

iar funcțiile h_{i_0} verifică condițiile la limită următoare :

$$(x,\ y) \in \mathscr{P} \Rightarrow$$

$$t = \bar{z},\ s = \bar{w},\ \mathrm{Im}\ f = \mathrm{Im}\ \bar{f} = \mathrm{Im}\ A = \mathrm{Im}\ \tilde{A} = 0,\ \bar{f} - f = 0, \qquad (62')$$

$$\mathrm{Im}\ h_{10}(z) = -\mathrm{Im}\ A_{10} = -\mathrm{Im}\left[\frac{1}{2}\ \overline{g_1(t)^2}\ \mathrm{d}w/\mathrm{d}z + \overline{g_1(t)}\ \mathrm{d}h_1/\mathrm{d}z\right], \qquad (62)$$

$$\mathrm{Im}\ h_{20}(z) = -\mathrm{Im}\ A_{20} = \mathrm{Im}\ \bar{A}_{20} = \mathrm{Im}\ \{\bar{w}[w^2\overline{g_1(z)} + g_2(z) + h_2(z)]\}, \qquad (63)$$

$$\mathrm{Im}\ h_{30}(z) = \mathrm{Im}\ \bar{A}_{30} = \mathrm{Im}\ [(\gamma + 1)\bar{w}^2 g_2(z)]. \qquad (64)$$

Pentru a obține valoarea corecției pătratice B_2 pentru viteze este necesar să se precizeze derivatele parțiale ale expresiilor (61) în raport cu argumentul z,

$$\partial A_{10}/\partial z = -w\,\partial A/\partial z + \frac{1}{2}(\bar{f} - f + \bar{g}_1)^2\mathrm{d}^2w/\mathrm{d}z^2 + (\bar{f} - f + \bar{g}_1)\mathrm{d}^2h_1/\mathrm{d}z^2, \qquad (65)$$

$$\partial A_{20}/\partial z = \{\ldots\}\mathrm{d}w/\mathrm{d}z + ws^2\ [w + (w - 1)w] - \partial\tilde{A}/\partial z - w =$$

$$= \{s^2[f(z) - \bar{f}(t) + g_1(z)] + \bar{g}_2(t) + \bar{h}_2(t)\}\mathrm{d}w/\mathrm{d}z + w(X^2 + X), \qquad (66)$$

$$\partial A_{30}/\partial z = -2\gamma\,\partial A/\partial z + 2(\gamma + 1)\bar{g}_2(t)\ w\ \mathrm{d}w/\mathrm{d}z. \qquad (67)$$

Funcția B_2 rezultă astfel din formulele (41), (47) sau (54), și din reprezentarea (60),

$$B_2 = \partial(\tilde{A}_2 + A_{10} + A_{20} + A_{30})/\partial z + \mathrm{d}(h_{10} + h_{20} + h_{30})/\mathrm{d}z. \qquad (68)$$

Această funcție reprezintă o corecție de viteză și trebuie să verifice condiția de a se anula la mari distanțe de profil. Această condiție impune în particular introducerea ultimului termen din formula (56) a cărui rol este compensarea valorilor nemărginite de la mari distanțe a funcției $w\bar{f}ws$. Derivata parțială din formula precedentă are expresia următoare :

$$\partial(\tilde{A}_2 + A_{10} + A_{20} + A_{30})/\partial z = B_{21} + B_{22} + B_{23}, \qquad (69)$$

unde

$$B_{21} = w(2wsX + \gamma X^2 + X) + 2(\gamma + 1)\ \bar{g}_2(t)\ w\ \mathrm{d}w/\mathrm{d}z,$$

$$B_{22} = \frac{1}{2}\,\bar{g}_1^2\,\mathrm{d}^2w/\mathrm{d}z^2 + \bar{g}_1\mathrm{d}^2h_1/\mathrm{d}z^2 + (s^2g_1 + \bar{g}_2 + \bar{h}_2)\ \mathrm{d}w/\mathrm{d}z, \qquad (70)$$

$$B_{23} = w^2\partial\tilde{A}/\partial t + (ws + X - w - 2\gamma)\ \partial A/\partial z + B_0,$$

iar B_0 este o funcție a cărei restricție la frontiera profilului este identic nulă. Derivatele parțiale din expresia B_{23} sînt specificate în formulele (51) și (52), iar restricțiile lor la frontiera profilului au expresiile

$$(\bar{f} - f = 0) \Rightarrow \partial \tilde{A}/\partial t = g_1(z)\mathrm{d}s/\mathrm{d}t + \mathrm{d}\bar{h}_1/\mathrm{d}t,$$

$$\partial A/\partial z = \bar{g}_1(t)\ \mathrm{d}w/\mathrm{d}z + \mathrm{d}h_1/\mathrm{d}z. \tag{71}$$

Dacă soluțiile problemelor la limită (34), (62), (63) și (64) ar fi cunoscute, atunci formulele (45), (50) și (68)—(71) ar fi suficiente pentru determinarea corecțiilor P și P_2 ale coeficientului de presiune (43) pe frontiera profilului. Rezolvarea acestor probleme la limită se obține mai lesne atunci cînd se cunoaște reprezentarea exteriorului profilului pe un domeniu canonic.

APLICAȚIE LA O CLASĂ DE PROFILE SIMETRICE

Se consideră mișcarea staționară în prezența unui profil simetric a cărui formă depinde de un parametru real k din intervalul (0,1). Elementele mișcării fluide vor fi precizate prin intermediul variabilelor auxiliare Z și T cu valori din discul unitate al planului complex $\mathbb{C}$,

$$k \in (0,1);\quad Z,\ T \in \mathbb{C};\quad |Z|,\ |T| \in [0,1]. \tag{72}$$

Anularea acestor variabile corespunde punctului de la mari distanțe de profil. Dintre funcțiile complexe specificate în continuare, funcții care depind doar de parametrul complex Z, numai potențialul f, afixa z și funcția g_2 vor avea singularități polare în centrul discului unitate. Reprezentarea conformă a exteriorului profilului considerat în această aplicație, pe discul unitate, este precizată prin formulele următoare:

$$f = -Z - 1/Z,\ w = 1 - k\ Z^2, \tag{73}$$

$$z = \int \frac{1}{w}\,\mathrm{d}f = -\frac{1}{Z} - \frac{1-k}{2\sqrt{k}}\ \ln\ \frac{1+\sqrt{k}Z}{1-\sqrt{k}Z} \tag{74}$$

Frontiera profilului corespunde cercului unitate și ecuațiile ei parametrice sînt specificate în formulele (100). Conform definițiilor (33) și (58) avem

$$g_1 = \int (w-1)\ \mathrm{d}f = k(Z^3/3 - Z), \tag{75}$$

$$g_2 = \int w^2\ \mathrm{d}f = f + 2g_1 + k^2(Z^3/3 - Z^5/5). \tag{76}$$

Reprezentarea conformă (74) transformă problemele la limită (34) și (62)—(64) pentru domeniul fluid în probleme la limită pentru discul unitate. În felul acesta soluțiile problemelor la limită inițiale pot fi specificate parametric. În cadrul aplicației prezente, rezolvarea problemelor la limită pentru discul unitate se efectuează direct pe baza identităților

următoare :

$$|Z| = 1\ ;\ n \geqslant 1 \Rightarrow Z\bar{Z} = 1\ ;\ \operatorname{Im} \bar{Z}^n = -\operatorname{Im} Z^n. \tag{76''}$$

Prima identitate permite identificarea restricției la cercul unitate a unui polinom q_2 având coeficienți reali și variabilele Z și $\bar{Z}$, cu restricția la același cerc a sumei dintre un polinom q de variabilă Z, și un polinom q_0 de variabilă $\bar{Z}$. Deoarece descompunerea astfel obținută nu este unică, se va opta pentru cazul anulării în origine a polinomului q_0,

$$|Z| = 1 \Rightarrow \operatorname{Im}\ q_2(Z, \bar{Z}) = \operatorname{Im}[q(Z) + q_0(\bar{Z})] = \operatorname{Im}\ [q(Z) - q_0(Z)]. \tag{77'}$$

În modul acesta se arată că problema la limită pentru discul unitate generată de problema (34) are soluția

$$h_1 = -4k^2Z/3. \tag{77}$$

Conform definiției (58) vom avea

$$h_2 = 2\int w\ \mathrm{d}h_1 = -8\ k^2(3Z - kZ^3)/9. \tag{78}$$

Izolînd singularitatea polară a funcției g_2 și utilizînd prima identitate din (76'') în problema asociată problemei (63), se obține o problemă la limită de forma următoare :

$$\operatorname{Im}\ h_{20} = \operatorname{Im}(q_{20} - \bar{w}/Z) = \operatorname{Im}(q_{20} - \bar{w}\bar{Z}) = \operatorname{Im}\ q_2(Z, \bar{Z}).$$

Soluția acestei probleme se determină pe baza identității (77'). Analog se obține soluția problemei (64),

$$h_{20} = -\frac{2}{3}kZ\ (c_1 + c_2\ Z^2 + c_3Z^4), \tag{79}$$

$$h_{30} = -\frac{4}{3}(\gamma + 1)\ kZ\ (c_4 + c_5Z^2 + c_6Z^4), \tag{80}$$

unde

$$c_1 = 3 + 4k + k^2 - 2k^3/3\ ;\ c_2 = 1 + k + 13k^2/15\ ;\ c_3 = -k/5,$$
$$c_4 = 3 + 4k + k^2 + 2k^3/5\ ;\ c_5 = 1 - k - 9k^2/5;\ c_6 = -3k/5. \tag{81}$$

Problema (62) generează următoarea problemă la limită pentru discul unitate :

$$|Z| = 1 \Rightarrow \operatorname{Im}\ h_{10} = -\operatorname{Im}\left[\frac{1}{2}\ \bar{g}_1^2\, w' + \bar{g}_1 h'\right] w/f', \tag{82}$$

unde

$$w' = -2kZ\ ;\ h_1' = -4k^2/3\ ;\ 1/f' = Z^2/(1 - Z^2). \tag{82'}$$

În condițiile identității (77') se obține

$$|Z| = 1 \Rightarrow q_2(Z, \bar{Z}) = q(Z) + q_0(\bar{Z}),\ (Z \neq \pm 1) \Rightarrow$$
$$Z^2q_2(Z, \bar{Z})/(Z^2-1) = [Zq(Z) + q_0(Z)]/(Z^2-1) + [Zq_0(\bar{Z}) - \bar{Z}q_0(Z)]/(Z - \bar{Z}).$$

Deoarece polinomul q_2 are coeficienți reali, ultimul raport este un raport de numere imaginare. Prin urmare are loc implicația

$$|Z| = 1 \Rightarrow \text{Im}\ Z^2 q_2(Z, \bar{Z})/(Z^2 - 1) = \text{Im}\ [Z^2 q(Z) + q_0(Z)]/(Z^2 - 1),$$

a.p.t. (82'')

Explicitînd termenul liber al ecuației (82) prin aplicarea formulelor (73), (75) și (77), și utilizînd identitatea precedentă se obține soluția

$$h_{10} = \frac{1}{9} k^3 Z[1 - 2k - Z^2 + 4(1 - k)/(Z^2 - 1)], \tag{83}$$

Corecția liniară a potențialului are expresia (32) în care

$$\bar{f} = -T - 1/T;\ s = 1 - kT^2;\ \bar{g}_1 = k(T^3/3 - T). \tag{84}$$

Pentru corecția liniară a vitezelor avem valoarea

$$B = w(X + (\partial A/\partial Z)/f'), \tag{85'}$$

unde

$$X = ws - 1,\ \partial A/\partial Z = w'\ (\bar{f} - f + \bar{g}_1) + h_1' =$$

$$= 2k(Z - T)(1/T - Z) + \frac{2}{3} k^2(3ZT - ZT^3 - 2). \tag{85}$$

Pe cercul unitate vom avea restricțiile următoare:

$$ZT = 1 \Rightarrow s = \bar{w};\ \partial A/\partial Z = 2k^2(1 - T^2)/3;\ X = w\bar{w} - 1,$$

$$B = w(X - 2k^2/3),\ P = 2\bar{w}B - X^2 = 2(X + 1)(X - 2k^2/3) - X^2. \tag{86}$$

Determinarea coeficientului de presiune pe profil impune specificarea restricțiilor la frontiera profilului a funcțiilor următoare:

$$|Z| = 1 \Rightarrow \partial A/\partial z = w(\partial A/\partial Z)/f' = \frac{2}{3} k^2 w Z^2(1 - \bar{Z}^2)/(1 - Z^2) = -\frac{2}{3} k^2 w,$$

$$\partial \tilde{A}/\partial t = -\frac{2}{3} k^2 \bar{w},\ \tilde{B}B = \bar{B}B = (X + 1)\ (X - 2k^2/3)^2. \tag{87}$$

Pentru calculul corecției pătratice a vitezelor se utilizează formulele (68) — (70) și (75)—(80). Aplicînd relațiile precedente se obține ușor valoarea

$$B_{23} = -\frac{2}{3} k^2(3X + 2 - w - 2\gamma). \tag{88}$$

În cazul expresiilor în care factorul $(ZZ - 1)$ se află la numitor, se folosește succesiv identitatea următoare:

$$|Z| = 1,\ Z \neq \pm 1 \Rightarrow (\bar{Z}^2 - 1)/(1 - Z^2) = \bar{Z}^2,$$

ca în prima egalitate din (87). În acest mod se obține expresia

$$B_{21} + \mathrm{d}h_{30}/\mathrm{d}z = w(3X + (\gamma + 2)X^2) -$$

$$-\frac{4}{15}(\gamma+1)k^2w(4+2k+3k^2+3\bar{w}+3w). \tag{89}$$

Analog, rezultă

$$\mathrm{d}h_{10}/\mathrm{d}z + B_{22} + \mathrm{d}h_{20}/\mathrm{d}z =$$

$$=\frac{1}{9}k^2w(2k+5k^2+3\bar{w}-3w)-\frac{2}{15}k^2w(4+2k-5k^2/3+3\bar{w}+3w). \tag{90}$$

Restricția corecției pătratice a vitezelor la frontiera profilului se determină substituind aceste expresii în formula (68),

$$B_2 = w\ Q_2 = w(3X + (\gamma+2)X^2) - k^2w\ Q/45, \tag{91}$$

unde

$$Q = 30(3X + 2 - 2\gamma) + (4 + 2k + 3k^2 + 3\bar{w} + 3w)(12\gamma + 13) + \\ + 20 - 38k^2. \tag{92}$$

Imaginea cercului unitate în planul variabilei hodografice w este un cerc cu raza k,

$$X+2 = w\bar{w} + 1 = 1 + (1 - kZ^2)(1 - k\bar{Z}^2) = k^2 + \bar{w} + w = 2u + k^2. \tag{93}$$

Prin urmare, factorul real Q_2 are expresia

$$Q_2 = 3X + (\gamma+2)X^2 - \frac{1}{45}k^2[(12\gamma+13)(2k+3X)+30(2\gamma+7)-38k^2]. \tag{94}$$

Restricția pe profil a vitezei complexe a particulelor fluidului izentropic are expresia

$$W = w\left\{1 + \frac{1}{4}\left(X - \frac{2}{3}k^2\right)M_\infty^2 + \frac{1}{16}Q_2(X, k, \gamma)M_\infty^4 + \ldots\right\}, \tag{95}$$

unde w reprezintă viteza complexă a particulelor fluidului incompresibil asociat care s-ar deplasa în prezența aceluiași profil. Din formulele (42), (87) și (91) se obține restricția

$$Y_2 = w\bar{B}_2 + \bar{w}B_2 + \bar{B}B = 2w\bar{w}Q_2 + \bar{B}B = (X+1)(2Q_2 + (X - 2k^2/3)^2. \tag{96}$$

Coeficientul de presiune pe profil se poate calcula pe baza formulelor (86), (94), (96) și (45),

$$C_p = -X - \frac{1}{4}PM_\infty^2 - \frac{1}{16}P_2M_\infty^4 + \ldots, \tag{97}$$

unde

$$P_2 = (X+1)(2Q_2 + 4k^2(3X + k^2)/9 - 3X^2) + 2(2-\gamma)X^3/3. \tag{98}$$

Pentru a reprezenta grafic acest coeficient de presiune este necesar să se precizeze corespondența dintre punctele profilului și coeficientul X. Această corespondență poate fi specificată prin intermediul unui parametru real r din intervalul $(-1, 1)$. Pentru punctele cercului unitate considerăm astfel parametrizarea

$$Z = -r \pm \mathrm{i}\sqrt{1 - r^2},\ r \in (-1, 1). \tag{99}$$

Substituind această valoare în formulele (73) și (74) se obține

$$z = x + iy, \tag{100}$$

unde

$$x = r + \frac{1-k}{4\sqrt{k}} \ln \frac{1+k+2\sqrt{k}r}{1+k-2\sqrt{k}r},$$

$$\pm y = \sqrt{1-r^2} - \frac{1-k}{2\sqrt{k}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{k(1-r^2)}}{1-k},$$

și

$$w = u - iv = 1 + k - 2kr^2 \pm 2ikr\sqrt{1-r^2}. \tag{101}$$

Din această formulă și din (93) rezultă expresia coeficientului X,

$$X = k^2 + 2k(1 - 2r^2). \tag{102}$$

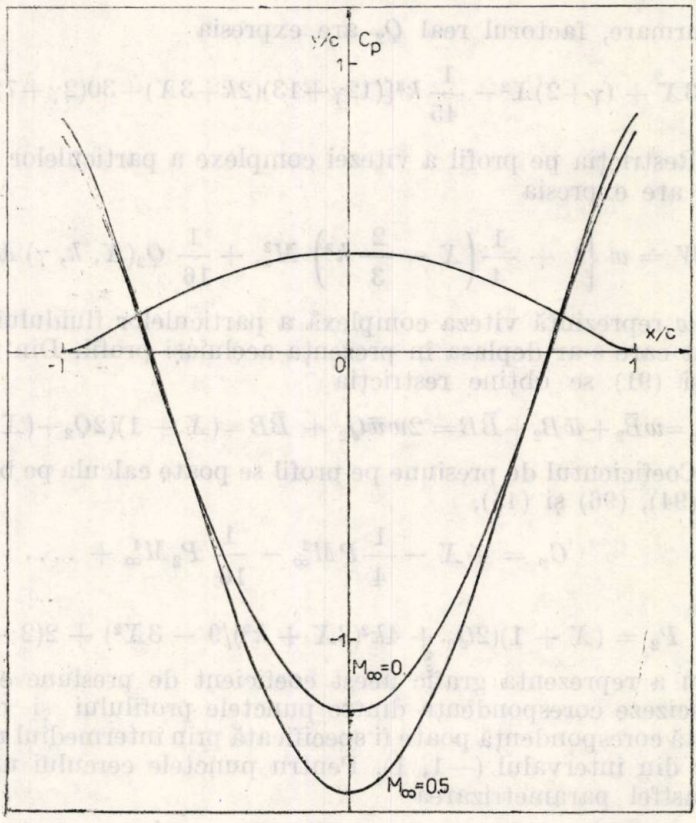


Fig. 1

Semicoarda profilului are valoarea

$$e = x(1,\ k) = 1 + \frac{1-k}{2\sqrt{k}} \ln \frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}. \tag{103}$$

În figura 1 se arată graficele coeficientului de presiune pentru mișcarea subsonică la numere Mach mici a unui fluid ideal compresibil și izentropic în prezența unui profil simetric în raport cu axele de coordonate avînd ecuațiile (100), funcție de abscisa relativă x/c a punctelor acestui profil, pentru cazul

$$k = 0{,}5,\ \gamma = 1{,}404. \tag{104}$$

Primit în redacție la 27 aprilie 1989

BIBLIOGRAFIE

1. C. IACOB, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*, Edit. Academiei, București—Gauthier Villars, Paris, 1959.
2. S. POPP, *Modele matematice în teoria cavitației*, Edit. Tehnică, București, 1985.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM 1848 KÖNYVTÁR

MIȘCAREA UNIFORMĂ DE FILTRAȚIE ÎN PREZENȚA UNEI CAVITĂȚI SUBȚIRI

de A. CARABINEANU

Universitatea din București

În această lucrare vom considera mișcarea într-un mediu poros omogen, datorată unui curent uniform la infinit, în prezența unei cavități subțiri cilindrice, direcția curentului fiind perpendiculară pe generatoarele cavității; ne propunem în cele ce urmează să calculăm debitul de apă ce străbate cavitatea.

INTRODUCERE

Mișcarea fluidului este plan-paralelă, iar problema pe care o avem de studiat este următoarea:

— fie în planul xOy, ocupat de un mediu poros omogen, o cavitate subțire al cărei contur este format din curbele:

$$C_+ : y = \varepsilon h_+(x): \; x \in [-a, a]; \; |h_+(x)| \leqslant 1; \; |h_+(x)| \leqslant 1, \quad h_+(\pm a) = 0, \tag{1}$$

$$C_- : y = \varepsilon h_-(x); \; x \in [-a, a]; \quad |h_-(x)| \leqslant 1, \; |h'_-(x)| \leqslant 1, \quad h_-(\pm a) = 0, \; h_-(x) \leqslant h_+(x), \tag{2}$$

unde ε este un parametru mic iar h'_+ și h'_- sînt funcții hölderiene.

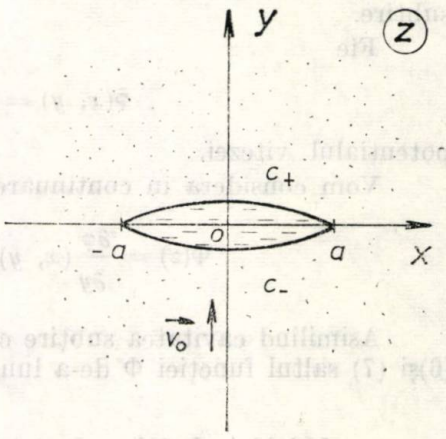


Fig. 1

Considerăm că mișcarea este produsă de un curent uniform la infinit avînd viteza complexă $v_0 e^{-i\alpha}$ și ne propunem să găsim debitul apei ce străbate cavitatea.

Ținînd cont de o teoremă a lui Șt. I. Gheorghiță [1] conform căreia „debitul de fluid ce trece prin cavitate nu depinde de direcția fluidului la infinit" vom considera cazul cel mai ușor de studiat, cînd viteza este paralelă cu axa Oy (fig. 1).

I. REZOLVAREA PROBLEMEI PRIN METODA INTEGRALELOR DE TIP CAUCHY

Dacă am considera cavitatea redusă la segmentul $[-a, a]$, mișcarea uniformă nu ar fi perturbată.

În prezența cavității subțiri mișcarea curentului (paralel la infinit cu Oy) este perturbată, perturbațiile avînd ordinul de mărime al parametrului ε. Fie :

$$\vec{V} = v_0\vec{j} + \varepsilon\vec{v}\,;\quad v = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} \tag{3}$$

viteza fluidului. Evident, $\varepsilon\vec{v}$ este viteza de perturbație datorată prezenței cavității.

Pe conturul cavității componenta tangențială a vitezei este nulă :

$$\vec{V}\cdot\vec{\tau} = 0 \text{ cu } \vec{\tau} = \vec{i} + \varepsilon h'_+(x)\vec{j}. \tag{4}$$

Din (3) și (4) rezultă :

$$\varepsilon v_1 + \varepsilon h'_{\pm}(x)\, v_0 + \varepsilon^2 h'_{\pm}(x)\, v_2 = 0. \tag{5}$$

În cele ce urmează vom neglija termenii în care apar puteri ale lui ε mai mari sau egale cu 2. Deci

$$v_1 + v_0 h'_{\pm}(x) = 0 \text{ pe } C_+ \cup C_-. \tag{5'}$$

Raționamentul pe care îl vom face în continuare este asemănător cu cel făcut în [2] în cazul mișcării unui fluid ideal în jurul unui profil subțire.

Fie

$$\tilde{\varphi}(x,\ y) = v_0 y + \varphi(x,\ y) \tag{6}$$

potențialul vitezei.

Vom considera în continuare funcția olomorfă

$$\Phi(z) = \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,\ y) + \mathrm{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,\ y). \tag{7}$$

Asimilînd cavitatea subțire cu segmentul $[-a,\ a]$, rezultă din (5), (6) și (7) saltul funcției Φ de-a lungul axei reale :

$$[\Phi(x)] = \Phi_+(x) - \Phi_-(x) = \begin{cases} 0\,; & |x| \geqslant a, \\ f(x) - \mathrm{i}v_0[h'(x)]\,; & |x| < a, \end{cases} \tag{8}$$

unde $f(x) = \left[\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right]$, $[h'(x)] = h'_+(x) - h'_-(x)$, iar $\Phi_+(z)$ și $\Phi_-(z)$ sînt valorile funcției Φ în semiplanul superior, respectiv inferior.

Din (8) rezultă (conform teoriei integralelor de tip Cauchy) :

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-a}^{a}\frac{f(x) - \mathrm{i}v_0[h'(x)]}{x - z}\,\mathrm{d}x. \tag{9}$$

Aplicînd formulele lui Plemelj, obținem pe axa reală :

$$\Phi_+(t) = \frac{1}{2}(f(t) - iv_0[h'(t)]) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{'a} \frac{f(x) - iv_0[h'(x)]}{x - t}\,dx, \tag{10}$$

$$\Phi_-(t) = -\frac{1}{2}(f(t) - iv_0[h'(t)]) + \frac{1}{2i\pi}\int_{-a}^{'a} \frac{f(x) - iv_0[h'(x)]}{x - t}\,dx. \tag{11}$$

Debitul fluidului ce străbate cavitatea este :

$$Q = \int_{-a}^{a} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y}\,dx. \tag{12}$$

Din (6), (7) și (12) deducem :

$$Q = 2av_0 + \varepsilon\int_{-a}^{a} \frac{\partial \varphi_+}{\partial y}\,dt. \tag{13}$$

Debitul apei intrate în cavitate este egal cu debitul apei ieșite din cavitate, adică

$$0 = \int_{-a}^{a}\left(\frac{\partial \varphi_+}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_-}{\partial y}\right)dt = \int_{-a}^{a} f(t)\,dt. \tag{14}$$

Din (10), (13) și (14) rezultă :

$$Q = 2av_0 - \frac{\varepsilon v_0}{2\pi}\int_{-a}^{a}\left(\int_{-a}^{'a} \frac{[h'(x)]}{x - t}\,dx\right)dt. \tag{15}$$

Dar integrala din partea dreaptă a relației (15) este egală cu :

$$\int_{-a}^{a'a}\left(\int \frac{dt}{x - t}\right)[h'(x)]\,dx = \int_{-a}^{a}[h'(x)]\ln\frac{a + x}{a - x}\,dx = -2a\int_{-a}^{a}\frac{[h(x)]\,dx}{a^2 - x^2} \tag{16}$$

(ținem cont că $h(\pm a) = 0$).

Din (15) și (16) obținem :

$$Q = 2av_0 + \frac{a\varepsilon v_0}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{[h(x)]}{a^2 - x^2}\,dx. \tag{17}$$

Dacă avem o cavitate subțire curbilinie ($h_+(x) = h_-(x)$), atunci din (17) rezultă debitul $Q = 2av_0$, rezultat obținut de altfel prin alte metode în cazul cavităților rectilinii [3], [4].

Calculul efectiv al lui $\Phi(z)$ (funcția prin intermediul căreia stabilim distribuția vitezelor în mediul poros) are o importanță teoretică. De aceea vom schița metoda de aflare a lui $\Phi(z)$.

Relația (5′) se scrie în porțiunea superioară a tăieturii $[-a, a]$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -v_0 h'_+. \tag{18}$$

Din (10) și (18) rezultă prin separarea părților imaginare egalitatea

$$v_0(h'_+(t) + h'_-(t)) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{'a} \frac{f(x)}{x - t} \, dx. \tag{19}$$

Ecuația integrală singulară (19), cunoscută în aerodinamică sub denumirea de ecuația profilelor subțiri, are în funcție de condițiile impuse una din soluțiile:

$$f(x) = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \int_{-a}^{'a} \frac{v_0(h'_+(t) + h'_-(t)) \sqrt{a^2 - t^2} \, dt}{t - x} + \frac{C}{\sqrt{a^2 - x^2}} \tag{20}$$

C fiind o constantă ce trebuie determinată ([5] p. 115).

$$f(x) = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\pi} \int_{-a}^{'a} \frac{v_0(h'_+(t) + h'_-(t))}{\sqrt{a^2 - b^2}} \frac{dt}{t - x} \tag{20′}$$

cu condiția ca $\int_{-a}^{a} \frac{v_0(h'_+(t) + h'_-(t))}{\sqrt{a^2 - t^2}} \, dt = 0,$

$$f(x) = -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{a - x}{a + x}} \int_{-a}^{'a} v_0(h'_+(t) + h'_-(t)) \sqrt{\frac{a + t}{a - t}} \frac{dt}{t - x}. \tag{20′,}$$

Nu putem adopta soluția (20′) deoarece ea impune o condiție suplimentară asupra ecuațiilor conturului cavității.

Să arătăm că nici soluția (20″) nu poate fi acceptată. Ținînd cont de (14), deducem că (în cazul alegerii soluției (20″)):

$$0 = \int_{-a}^{a} f(x) \, dx = -\frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} v_0(h'_+(t) + h'_-(t)) \sqrt{\frac{a + t}{a - t}} \left(\int_{-a}^{'a} \sqrt{\frac{a - x}{a + x}} \frac{dt}{t - x} \right) =$$

$$= -\int_{-a}^{a} v_0(h'_+(t) + h'_-(t)) \sqrt{\frac{a + t}{a - t}} \, dt \text{ deoarece ([2] p. 239))}$$

$$\int_{-a}^{'a} \sqrt{\frac{a - x}{a + x}} \frac{dt}{t - x} = 0.$$

Așadar soluția (20″) re ıamă la rîndul ei satisfacerea unei condiții suplimentare de către ecu ,iile conturului cavității.

Sîntem conduși de la alegerea soluției (20) pentru ecuația (19). Condiția (14) revine la

$$0 = -\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} v_0(h'_+(t) + h'_-(t))\sqrt{a^2 - t^2}\left(\int_{-a}^{'a}\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\frac{\mathrm{d}x}{t - x}\,\mathrm{d}t + C\int_{-a}^{a}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right),$$

de unde deducem că $C = 0$, ținînd seama de relația $\int_{-a}^{'a}\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\frac{\mathrm{d}x}{t - x} = 0$ pentru $x \in [-a, a]$.

Înlocuind în (9) și folosindu-ne de egalitatea $\int_{-a}^{a}\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\frac{\mathrm{d}x}{x - z} = -\frac{\pi}{\sqrt{z^2 - a^2}}$, obținem:

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{v_0[h'(x)]}{x - z}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}\sqrt{z^2 - a^2}}\int_{-a}^{a} v_0(h'_+(t) + h'_-(t))\frac{\sqrt{a^2 - t^2}}{t - z}\,\mathrm{d}t \tag{21}$$

II. REZOLVAREA PROBLEMEI CU AJUTORUL METODELOR VARIAȚIONALE DE REPREZENTARE CONFORMĂ

În cele prezentate mai înainte am presupus (fără să demonstrăm) că prezența cavității subțiri determină perturbații ale vitezei de ordinul lui ε și că în calcule putem asimila cavitatea cu segmentul $[-a, a]$.

Calculînd prin altă metodă debitul prin cavitatea subțire, vom vedea că presupunerile făcute nu viciază rezultatele pe care le-am obținut.

Pentru simplitatea calculelor vom considera $a = 1$. Fie

$$Z = z + \sqrt{z^2 - 1} \tag{22}$$

transformarea conformă a exteriorului cavității subțiri pe exteriorul unui domeniu cvasicircular din planul Z (fig. 2).

Un punct de pe conturul cavității are în planul z afixa egală cu $\cos t + \mathrm{i}\varepsilon h_+(\cos t)$, $t \in [0, \pi]$ sau cu $\cos t + \mathrm{i}\varepsilon h_-(\cos t)$, $t \in [\pi, 2\pi]$.

Prin transformarea conformă (22), acestor puncte le corespund în planul Z puncte de afixă:

$$\cos t + \varepsilon h_\pm(\cos t)\ \operatorname{ctg} t + \mathrm{i}\varepsilon h_\pm(\cos t) + i \sin t. \tag{23}$$

Să enunțăm în continuare teorema variațională de reprezentare conformă a lui Lavrentiev și Șabat [6] p. 379:

Dacă curba C de ecuație polară $r(t) = 1 + \delta(t)$ îndeplinește condițiile:

$$|\delta(t)| < \varepsilon,\ |\delta'(t)| < \varepsilon,\ |\delta''(t)| < \varepsilon$$

atunci funcția $\zeta(Z)$, $\zeta(\infty)=\infty$, $\zeta'(\infty)>0$ *ce realizează transformarea conformă a exteriorului curbei* C *pe exteriorul cercului unitate din planul* ζ *se poate prezenta sub forma*:

$$\zeta = Z\left\{1+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\delta(t)\,\frac{e^{it}+Z}{e^{it}-Z}\,dt\right\}+0(\varepsilon^2). \tag{24}$$

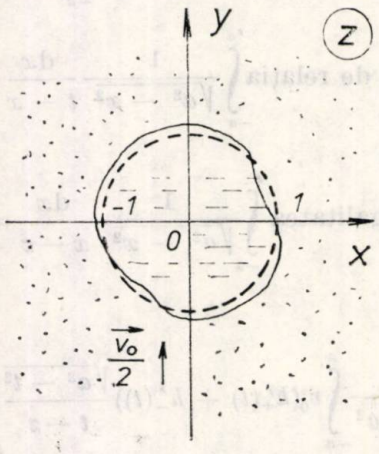


Fig. 2

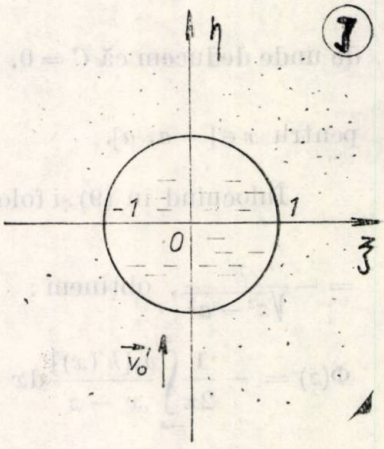


Fig. 3

Din (23) și (24) rezultă că domeniul de mișcare din planul variabilei Z se reprezintă conform pe exteriorul cercului din planul variabilei ζ (fig. 3) prin relația:

$$\zeta = Z\left\{1+\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{h(\cos t)}{\sin t}\,\frac{e^{it}+Z}{e^{it}-Z}\,dt\right\}+0(\varepsilon^2), \tag{25}$$

unde

$$h(\cos t)=\begin{cases}h_+(\cos t)\,;\ t\in[0,\ \pi],\\ h_-(\cos t)\,;\ t\in[\pi,\ 2\pi].\end{cases} \tag{26}$$

Ținînd cont că potențialul mișcării datorată unui curent uniform la infinit de viteză $v_0\vec{j}$ în prezența unei cavități circulare este:

$$F(\zeta)=-iv_0'\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right), \tag{27}$$

deducem, ținînd cont de (25) potențialul vitezei în planul Z,

$$F(\zeta(Z))=-iv_0'\left(Z\left(1+\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{h(\cos t)}{\sin t}\,\frac{e^{it}+Z}{e^{it}-Z}\,dt\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{Z}\left(1-\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{h(\cos\ t)}{\sin t}\,\frac{e^{it}+Z}{e^{it}-Z}\,dt\right)\right)+0(\varepsilon^2).$$

Viteza v_0' o aflăm din condiția:

$$\left|\frac{dF}{dZ}\right|_{Z=\infty} \cdot \left|\frac{dZ}{dz}\right|_{z=\infty} = v_0, \tag{29}$$

care conduce la

$$v_0' = \frac{v_0}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{h(\cos t)}{\sin t}\,dt\right) + O(\varepsilon^2). \tag{30}$$

Debitul fluidului care iese și intră prin cavitatea subțire este:

$$Q = \operatorname{Im}\,\{F(\zeta(Z(1))) - F(\zeta(Z(-1)))\}, \tag{31}$$

adică, ținînd cont de (22), (28) și (30),

$$Q = 4\,v_0' = 2v_0\left(1 + \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{h(\cos t)}{\sin t}\,dt\right. . \tag{32}$$

În virtutea lui (26) avem relația:

$$\int_0^{2\pi} \frac{h(\cos t)}{\sin t}\,dt = \int_0^{\pi} \frac{h_+(\cos t)}{\sin t}\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{h_-(\cos t)}{\sin t}\,dt = \tag{33}$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{h_+(\cos t) - h_-(\cos t)}{\sin t}\,dt.$$

Făcînd schimbarea de variabilă $x = \cos t$, obținem din (32) și (33):

$$Q = 2\,v_0\left(1 + \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-1}^{1} \frac{[h(x)]}{1 - x^2}\,dx\right), \tag{34}$$

rezultat ce concordă cu (17) (punînd $a = 1$).

Primit în redacție la 27 aprilie 1989

BIBLIOGRAFIE

1. ȘT. I. GHEORGHIȚĂ, *Sur le mouvement dans un milieu poreux homogène ayant une cavité*, C. R. Acad. Sci. Paris, 260 (1965).
2. L. DRAGOȘ, *Principiile mecanicii mediilor continue*, Edit. Tehnică, București, 1983.
3. H. I. ENE, S. GOGONEA, *Probleme în teoria filtrației*, Edit. Academiei, București, 1973.
4. S. GOGONEA, *Asupra mișcării plane a fluidelor în medii poroase, în prezența cavităților subțiri*. St. cerc. mat., **23**, 7 (1971).
5. C. IACOB, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*, Edit. Academiei, Gauthier-Villars, București—Paris, 1959.
6. M. A. LAVRENTIEV, B. V. ȘABAT, *Metodi teorii funcții komplecsnogo peremennogo* Izd. Nauka, Moskva, 1973.

Viteza v_0' o aflăm din condiția:

$$\left|\frac{dF}{dZ}\right|_{Z=\infty} \cdot \left|\frac{dZ}{dz}\right|_{z=\infty} = v_0, \tag{29}$$

care conduce la

$$v_0' = \frac{v_0}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{h(\cos t)}{\sin t}\, dt\right) + O(\varepsilon^2). \tag{30}$$

Debitul fluidului care iese și intră prin cavitatea subțire este:

$$Q = \operatorname{Im}\left\{F'(\zeta(Z(1))) - F'(\zeta(Z(-1)))\right\}, \tag{31}$$

adică, ținînd cont de (22), (28) și (30),

$$Q = 4\, v_0' = 2 v_0\left(1 + \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{h(\cos t)}{\sin t}\, dt\right). \tag{32}$$

În virtutea lui (26) avem relația:

$$\int_0^{2\pi} \frac{h(\cos t)}{\sin t}\, dt = \int_0^{\pi} \frac{h_+(\cos t)}{\sin t}\, dt + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{h_-(\cos t)}{\sin t}\, dt = \tag{33}$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{h_+(\cos t) - h_-(\cos t)}{\sin t}\, dt.$$

Făcînd schimbarea de variabilă $x = \cos t$, obținem din (32) și (33):

$$Q = 2\, v_0\left(1 + \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-1}^{1} \frac{[h(x)]}{1 - x^2}\, dx\right), \tag{34}$$

rezultat ce concordă cu (17) (punînd $a = 1$).

Primit în redacție la 27 ulie 1985

BIBLIOGRAFIE

1. ST. I. GHEORGHITIȚĂ, *Sur le mouvement dans un milieu poreux homogène ayant une cavité*, C. R. Acad. Sci. Paris, 260 (1965).
2. L. DRAGOS, *Principiile mecanicii mediilor continue*, Edit. Tehnică, București, 1983.
3. H. E. ENÉ, S. COCONEA, *Probleme în teoria filtrației*, Edit. Academiei, București, 1973.
4. S. COCONEA, *Asupra mișcării plane a fluidelor în medii pornase în prezența cavităților subțiri*, St. cerc. mat., 23, 7 (1971).
5. G. IAGOB, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*, Edit. Academiei, Gauthier-Villars, București–Paris, 1959.
6. M. A. LAVRENTIEV, B. V. SABAT, *Metodi teorii funcții kompleksnogo peremennogo*, Izd. Nauka, Moskva, 1973.

INTERFERENȚA IMOBILELOR SUPUSE LA INFILTRAREA GAZELOR

de AL. D. STAN

Institutul de Petrol și Gaze Ploiești

În lucrare se stabilește debitul de gaze infiltrat într-un imobil adiacent unui defect al conductei de distribuție a gazelor, precum și efectul pe care-l are fundația imobilului asupra reducerii infiltrațiilor de gaze în imobil sau într-un grup de imobile.

Se precizează metodologia de calcul a debitelor de gaze care pătrund în fiecare dintre imobile supuse simultan unei asemenea infiltrări.

Sînt stabiliți coeficienții de interferență și ecranare pentru un grup de imobile adiacente defectului comun.

1. INTRODUCERE

În timpul exploatării sistemului de distribuție al gazelor, pe acesta apar diferite defecte provocate de coroziuni, cedări la sudură etc. pe unde se scurg gazele în exterior. Datorită faptului că defectele sînt astupate, gazele se filtrează prin mediul poros fie către suprafața solului, dacă acesta este permeabil sau, fie către imobilele adiacente defectului.

Este posibilă și filtrarea simultană atît către imobilele adiacente defectului ,cît și către suprafața solului.

Existența mediului poros poate duce, în anumite situații, la reducerea debitului de gaze care se scurge prin defect.

Fundația unui imobil reduce cantitatea de gaze ce se filtrează în imobil și totodată, fundația, după părerea noastră, are un efect variabil la o adîncime dată a ei, asupra reducerii debitului de gaze față de cazul cînd imobilul nu prezintă fundație. Acest efect depinde de geometria imobilului și de distanța pînă la defect.

Existența mai multor imobile supuse simultan infiltrațiilor gazeifere duce la apariția fenomenului de interferență între imobile.

2. DEBITUL DE GAZE SCURS PRINTR-UN DEFECT

La apariția unui defect cu secțiunea f, debitul masic de gaze care se scurge prin acesta este dat de relația [1, 2, 3, 4, 5],

$$Q_m = \alpha f \left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{1/\varkappa} \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1} p_c \rho_c \left[1 - \left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]}, \tag{1}$$

unde α reprezintă coeficientul de debit, $\varkappa$ — exponentul adiabatic al gazului, p_c și ρ_c reprezintă presiunea și, respectiv, densitatea gazului, din interiorul conductei, iar p_e este presiunea din exteriorul orificiului.

Referitor la coeficientul α, reglementările în vigoare (STAS 7347/2—1983) prevăd și posibilitatea de calcul a acestuia dacă scurgerea gazului s-ar efectua printr-o diafragmă utilizată la măsurarea debitului.

Pentru orificiile formate pe conducte singura cale de estimare a acestui coeficient este experimentală, așa cum am procedat noi în [3], și alegerea unei valori egale cu 0,6 fiind suficient de acoperitoare.

Din analiza relației (1) se observă că Q_m depinde de raportul $x = p_c/p_c$.

Referitor la acest parametru, este cunoscut că debitul ieșit prin defect prezintă un maxim pentru

$$x = x_{cr} = \left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} \tag{2}$$

și are valoarea

$$Q_{m,max} = \alpha f \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa+1} p_c \rho_c \left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{\frac{2}{\varkappa-1}}}. \tag{3}$$

Pentru orice raport dintre presiunea din exteriorul defectului și cea din conductă, mai mic decît valoarea sa critică, dată de (2), debitul rămîne constant la valoarea lui maximă $Q_{m,max}$.

Pe altă parte, dacă se admite că un imobil are baza permeabilă, se poate obține debitul de gaze care se filtrează către imobil.

În acest scop, se consideră că printr-un element de arie, $b\mathrm{d}x$, de la baza imobilului, viteza de filtrare va fi (fig. 1)

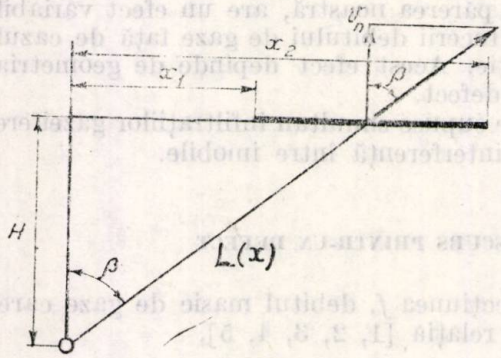


Fig. 1

$$v = \frac{k}{\mu} \cdot \frac{p_c^2 - p_a^2}{p_a L(x)}. \tag{4}$$

La scrierea ultimei formule s-a admis că filtrarea gazelor e liniară, și s-a notat permeabilitatea medie a solului cu k, vîscozitatea dinamică fiind μ, iar la baza imobilului presiunea s-a admis p_a.

Viteza gazelor v_n, normală la baza imobilului, se scrie în funcție de v cu formula

$$v_n = v \cos\beta = \frac{k}{\mu} \cdot \frac{p_c^2 - p_a^2}{p_a L(x)} \cdot \frac{H}{L(x)} = \frac{k}{\mu} \frac{p_c^2 - p_a^2}{p_a} \cdot \frac{H}{H^2 + x^2} \tag{5}$$

deoarece

$$\cos\beta = \frac{H}{L(x)} = \frac{H}{\sqrt{H^2 + x^2}}.$$

În situația că perpendicular pe direcția axei Ox viteza este constantă, debitul filtrat în imobil va fi

$$Q = b\int_{x_1}^{x_2} v_n \mathrm{d}x = \frac{k}{\mu}\cdot\frac{p_e^2 - p_a^2}{p_a} bH \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}x}{H^2 + x^2} = \frac{k}{\mu}\frac{p_e^2 - p_a^2}{p_a} b\left(\operatorname{arctg}\frac{x_2}{H} - \operatorname{arctg}\frac{x_1}{H}\right), \tag{6}$$

iar debitul masic Q_m va fi

$$Q_m = \rho_a Q = \frac{k}{\mu RT}(p_e^2 - p_a^2) b \left(\operatorname{arctg}\frac{x_2}{H} - \operatorname{arctg}\frac{x_1}{H}\right), \tag{7}$$

unde $\rho_a = \dfrac{p_a}{RT}$, R este constanta de gaz perfect (pentru metan, $R = 519{,}2$; pentru etan $R = 277{,}1$ J/kgK), T fiind temperatura absolută a gazului.

Debitul masic scurs prin defect dat de (1), este egal cu acela filtrat către imobil a cărei expresie a fost stabilită mai înainte (relația (7)).

În urma acestei egalități se obține ecuația

$$C(x^2 - x_a^2) = x^{1/\varkappa}\sqrt{1 - x^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}}, \tag{8}$$

unde s-au introdus notațiile

$$C = \frac{kp_e^2}{\mu RT}\cdot\frac{b\left(\operatorname{arctg}\dfrac{L+l}{H} - \operatorname{arctg}\dfrac{L}{H}\right)}{\alpha f\sqrt{\dfrac{2\varkappa}{\varkappa-1}\, p_e\, \rho_e}}, \quad x_a = \frac{p_a}{p_e}. \tag{9}$$

C poate fi considerată drept o constantă pentru o anumită poziție și geometrie a imobilului (L, l, b), adâncime de pozare a conductei (H), proprietăți ale gazului (μ, $\varkappa$, R, T) și solului (k), regim de presiune din conductă (p_e, ρ_e) și caracteristici ale defectului (αf).

Ecuația (8) poate fi soluționată în raport cu oricare dintre necunoscutele care intră în componența ei. Cel mai mare interes îl prezintă, evident, soluționarea, în raport cu parametrul x deoarece debitul scurs prin defect, deci și către imobil, depinde de acesta.

Soluționarea ecuației (8) se poate efectua grafic așa cum se observă în figura 2, unde s-a reprezentat membrul sting, S, și acela din dreapta, D, al ecuației în funcție de x.

Se observă cu ușurință că în situația în care

$$S_{cr} \geqslant D_{max} \tag{10}$$

rădăcina ecuației (8) este situată în intervalul $(x_a - x_{cr})$ curbele S_2 din figura 2 ceea ce înseamnă că debitul scurs prin defect este maxim, fiind dat de (3).

O altă familie de parabole, care reprezintă membrul stîng al ecuației (8), reprezentate prin curbele S_1 în figura 2, duce la inecuația

$$S_{cr} < D_{max}. \tag{11}$$

Rădăcina aceleiași ecuații va fi situată de această dată în intervalul $(x_{cr} - 1)$.

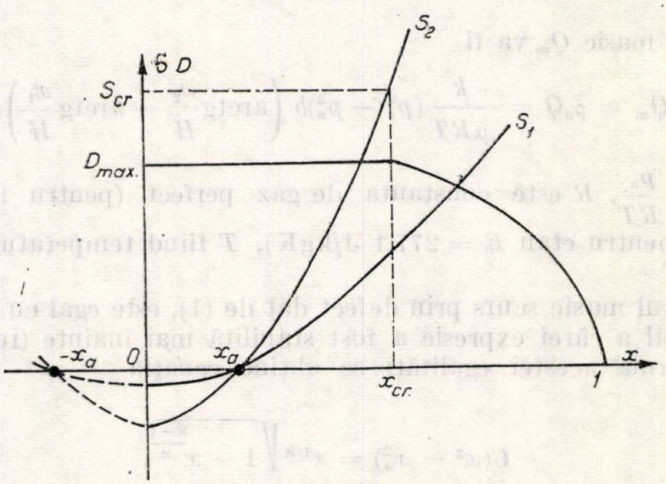


Fig. 2

Avînd în vedere că presiunea p_e nu poate fi mai mică decît $(x_{cr} \cdot p_c)$ rezultă că, de fapt, în situația dată de (10), presiunea din exteriorul defectului are valoarea

$$p_e = x_{cr}\, p_c = \left(\frac{2}{\varkappa + 1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}} \cdot p_c. \tag{12}$$

Cu S_{cr} s-a notat valoarea lui S pentru $x = x_{cr}$, iar D_{max} este membrul drept tot pentru aceeași valoare a lui x.

S_{cr} are valori dependente, în afară de x_{cr}, și de constanta C, dar D_{max} depinde, așa cum se vede imediat, doar de exponentul adiabatic $\varkappa$, și are valoare 0,2266 pentru $\varkappa = 1{,}3$; 0,2588 pentru $\varkappa = 1{,}4$ și 0,2862 pentru $\varkappa = 1{,}5$. Pentru metan al cărui exponent adiabatic este $\varkappa = 1{,}32$, $D_{max} = 0{,}2335$.

Valorile critice ale lui x sînt : 0,5457 pentru $\varkappa = 1{,}3$, 0,2583 pentru $\varkappa = 1{,}4$ și 0,5120 pentru $\varkappa = 1{,}5$, iar pentru metan valoarea critică se realizează la 0,5421.

3. FUNDAȚIA ȘI EFECTUL EI ASUPRA GAZELOR INFILTRATE ÎN IMOBIL

Calculele efectuate mai înainte au admis existența unui imobil fără fundație, situație ce nu corespunde realității deoarece fiecare imobil prezintă o fundație pe care o admitem perfect impermeabilă. Aceasta presupune că nu prezintă fisuri, crăpături, spargeri etc.

Dacă o fundație are adîncimea h, gazele scurse prin defect o ocolesc și pătrund în imobil (fig. 3),

Referitor la efectul fundației ar fi posibil de utilizat relația de la un imobil fără fundație (7).

Astfel, se vede imediat că (7) se pune și sub forma

$$\operatorname{arctg}\frac{L+l}{H}-\operatorname{arctg}\frac{L}{H}=\frac{\mu RT\,Q_m}{kb(p_e^2-p_a^2)}. \tag{15}$$

care devine, prin aplicarea funcției tangentă, la forma

$$\frac{\dfrac{L+l}{H}-\dfrac{L}{H}}{1+\dfrac{(L+l)L}{H^2}}=\operatorname{tg}\left[\frac{\mu RT\,Q_m}{kb(p_e^2-p_a^2)}\right], \tag{16}$$

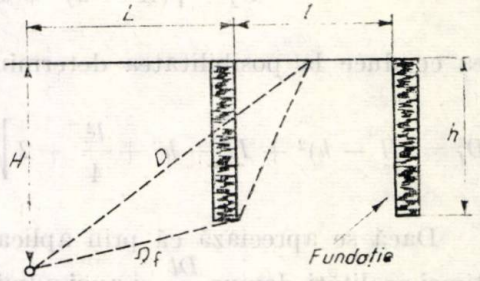


Fig. 3

unde x_1 și x_2 din (7) au fost înlocuite cu L și, respectiv, $L+l$, așa cum se vede tot în figura 3.

Membrul stîng al acesteia se pune succesiv sub forma

$$\frac{Hl}{H^2+L^2+Ll}=\frac{Hl}{H^2+\left(L+\dfrac{l}{2}\right)^2-\dfrac{l^2}{4}}=\frac{Hl}{D^2-\dfrac{l^2}{4}}=\frac{4Hl}{4D^2-l^2},$$

unde

$$D^2=H^2+\left(L+\frac{l}{2}\right)^2, \tag{17}$$

D este, așa cum se observă cu ușurință din geometria figurii 3, distanța de la defect la punctul de pe suprafața solului din centrul imobilului. Probabil că această distanță ar fi cea mai comodă de măsurat dacă ar fi cunoscută poziția defectului pe conductă.

Rezultă că în situația unui imobil cu fundație, debitul va fi Q_{mf}, iar distanța D va deveni, din cauza prezenței fundației, D_f.

Ca urmare a acestora, pentru un imobil fără fundație și un imobil cu fundație, se scrie

$$\frac{\operatorname{tg}AQ_m}{\operatorname{tg}AQ_{mf}}=\frac{4D_f^2-l^2}{4D^2-l^2}, \tag{18}$$

unde cu A s-a notat parametrul $\dfrac{\mu RT}{kb(p_e^2-p_a^2)}$.

Ultima relație se mai scrie și sub forma

$$\frac{\operatorname{tg}\,AQ_m}{\operatorname{tg}\,AQ_{mf}}=\frac{D_f^2}{D^2} \tag{19}$$

deoarece se consideră că atît $(4D^2)$ cît și $(4D_f^2)$ sînt cu mult mai mari decît l^2.

Pe altă parte, tot din geometria figurii 3, se vede că

$$D_f = \sqrt{(H-h)^2 + L^2} + \sqrt{h^2 + \frac{l^2}{4}}$$

ceea ce duce la posibilitatea determinării lui D_f^2,

$$D_f^2 = (H-h)^2 + L^2 + h^2 + \frac{l^2}{4} + 2\sqrt{[(H-h)^2 + L^2]\left(h^2 + \frac{l^2}{4}\right)}, \quad (20)$$

Dacă se apreciază că prin aplicarea radicalului membrul drept al ultimei egalități devine $\frac{Dl}{2}$ și apoi admițînd și aproximația $D \approx 2H + L$, rezultă că D_f^2 are expresia

$$D_f^2 = D^2 + h^2. \quad (21)$$

Datorită acestui rezultat, ecuația (19) devine

$$\frac{\operatorname{tg} AQ_m}{\operatorname{tg} AQ_{mf}} = 1 + \frac{h^2}{D^2}. \quad (22)$$

Pentru valori mici ale argumentului x funcția tangentă se poate aproxima chiar prin însăși argumentul său

$$\operatorname{tg} x \approx x.$$

Din cauza acesteia, între debitul de gaze infiltrat într-un imobil fără fundație Q_m și acela cu fundație Q_{mf} este relația

$$Q_m = \left(1 + \frac{h^2}{D^2}\right) Q_{mf}. \quad (23)$$

Se vede imediat că pentru o fundație neglijabilă, adică la $h = 0$, se obține, așa cum era de așteptat, egalitatea

$$\lim_{h \to 0} Q_m = Q_{mf},$$

iar la valori foarte mari ale lui h debitul de gaze infiltrat într-un imobil ce prezintă o asemenea fundație este nul,

$$\lim_{h \to \infty} Q_{mf} = 0.$$

La o anumită adîncime a fundației, h, se observă, tot din ecuația (23), că imobilele cele mai protejate, sînt acelea ce sînt mai apropiate de defect, deci care au parametrul D cît mai redus, ceea ce înseamnă că efectul fundației practic se diminuează la imobilele îndepărtate de defect.

Acest lucru se observă cu ușurință din datele tabelului 1, unde se prezintă valorile raportului $\frac{Q_{mf}}{Q_m}$ în funcție de parametrul adimensional $\frac{h}{D}$.

Tabelul 1

$\frac{h}{D}$	∞	20	1	0,5	0,2	0,1	0
Q_{mf}/Q_m	0	0,002494	0,5	0,8	0,9614	0,99009	1

Cu toate că am prezentat unele valori de pe întregul domeniu de variație a lui h/D, de la 0 la ∞, noi apreciem că practic D satisface inecuația

$$D \geqslant h, \tag{24}$$

ceea ce implică și faptul că raportul h/D variază doar de la 0 la 1, ceea ce înseamnă că oricît de mult s-ar mări fundația unui imobil aceasta face ca debitul de gaze să se reducă cel mult la jumătatea debitului infiltrat în imobilul dacă acesta nu este prevăzut cu fundație. Această reducere la jumătate este într-un caz cu totul și cu totul greu realizabil în practică și anume dacă adîncimea fundației ar fi cel puțin egală cu D. În tehnica construcției imobilelor cel mai frecvent se realizează $D > h$.

4. „INTERFERENȚA" IMOBILELOR SUPUSE INFILTRAȚIEI DE GAZE

Debitul de gaze infiltrat într-un imobil fără fundație calculat cu relația (7), sau pentru acela cu fundație, dat de (23), poate fi scris sub forma generală

$$Q_m = \frac{p_c^2 - p_a^2}{\mu RT} G, \tag{25}$$

unde G este un parametru ușor de identificat dacă se compară această formulă cu acelea la care ne-am referit. G are o semnificație mai mult geometrică a imobilului cu toate că în expresia lui intră și permeabilitatea k.

În cazul în care n imobile sînt supuse simultan infiltrațiilor gazeifere, rezultă că debitul care se scurge prin defectul conductei dat de (1) este „distribuit" acestor imobile ceea ce duce la soluționarea ecuației

$$\alpha f \left(\frac{\bar{p}_e}{p_c}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1} p_c \rho_c \left[1 - \left(\frac{\bar{p}_e}{p_c}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right] \frac{\bar{p}_e^2 - p_a^2}{\mu RT}} \sum_{i=1}^{n} G_i, \tag{26}$$

unde acum $\bar{p}_e$ reprezintă presiunea din exteriorul defectului.

Apare evident că se poate defini pentru imobilul i coeficientul de interferență I_i ca raport între debitul Q_i infiltrat în el, cu toate că n imobile sînt adiacente defectului, și debitul Q_{0i} infiltrat tot în același imobil dacă ar fi singur situat în apropierea defectului.

$$I_i = \frac{Q_i}{Q_{0i}}. \tag{27}$$

Referitor la obținerea necunoscutei $\bar{p}_e$ din ecuația (26) considerentele efectuate la soluția ecuației (8) rămîn nemodificate.

Avînd în vedere că formarea unui defect pe conductă afectează mai multe imobile, se poate defini și un coeficient de ecranare caracterizat de parametrul

$$E_{i,j} = \frac{I_i}{I_j} \tag{28}$$

și apare atunci cînd pentru imobilele i și j, coeficienții de interferență ai acestora, I_i și I_j, satisfac condiția $I_i > I_j$ ceea ce înseamnă că imobilul i ecranează imobilul j.

5. EXEMPLUL DE CALCUL

În cele ce urmează efectuăm un calcul care, sperăm, va exemplifica considerentele noastre anterioare.

În acest scop să admitem că în apropierea unui defect cu $(\alpha f) = 0{,}0003$ m^2 sînt trei imobile, caracterizate prin parametrii $G_1 = 8{,}5 \cdot 10^{-11}$ m^3, $G_2 = 5{,}5 \cdot 10^{-11}$ m^3 și $G_3 = 2{,}2 \cdot 10^{-11}$ m^3. În conductă, la locul defectului, gazul asimilat cu metanul ($R = 519{,}2$ J/kgK, $\mu = 1{,}5 \cdot 10^{-5}$ Ns/m^2, $\varkappa = 1{,}32$ și $T = 293$ K) are presiunea $p_c = 2{,}5 \cdot 10^5$ N/m^2 și densitatea $\rho_c = 1{,}8085$ kg/m^3. Se pune problema determinării debitului de gaze infiltrat în fiecare din imobile dacă acestea ar fi situate pe rînd lîngă defect sau, în altă ipoteză de calcul, toate imobilele sînt supuse simultan infiltrării gazelor scurse prin defectul conductei.

Pentru exponentul adiabatic admis, debitul scurs prin defect este maxim pentru orice presiune din exteriorul acestuia ce satisface relația

$$p_e \geq p_c \left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} = 2{,}5 \cdot 10^5 \left(\frac{2}{1{,}32+1}\right)^{\frac{1{,}32}{1{,}32-1}} = 1{,}3552 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2} \tag{29}$$

și membrul drept al ecuației (8) are valoarea maximă

$$D_{max} = x_{cr}^{\frac{1}{\varkappa}} \sqrt{1 - x_{cr}^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}} = (0{,}5421)^{\frac{1}{1{,}32}} \sqrt{1 - (0{,}5421)^{\frac{1{,}32-1}{1{,}32}}} = 0{,}2335.$$

Dacă se introduc datele pentru situația cînd primul imobil ar fi singur lîngă defectul conductei, ecuația (8) devine

$$4{,}0181\ (x_1^2 - 0{,}1643) = x_1^{\frac{1}{1{,}32}} \sqrt{1 - x_1^{\frac{1{,}32-1}{1{,}32}}}, \qquad (30)$$

unde $x_1 = p_{e_1}/p_c$.

p_{e_1} este presiunea din exteriorul defectului în ipoteza de calcul ce am admis-o, și anume că toate gazele scurse prin defect s-ar infiltra în primul imobil; coeficientul 0,1643 a provenit din raportul p_a^2/p_c^2, presiunea p_a s-a luat egală cu $1{,}01325 \cdot 10^5$ N/m^2. Membrul sting al ecuației (30), pentru $x = x_{cr}$, are valoarea

$$S_{cr} = S(x_{cr}) = 0{,}5206, \qquad (31)$$

ceea ce înseamnă că presiunea p_{e_1} este egală cu aceea dată de ecuația (29), adică $p_{e_1} = 1{,}3552 \cdot 10^5$ N/m^2.

Ori cu acest rezultat, ar însemna că debitul ce se filtrează prin mediul poros este mai mare decît acela ce se scurge prin orificiu, lucru care evident nu este posibil, deoarece cu valoarea obținută ar însemna că primul debit este

$$Q_{01} = \frac{p_{e_1}^2 - p_a^2}{\mu RT} G_1 = \frac{(1{,}3552^2 - 1{,}01325^2)\ 10^{10}}{1{,}5 \cdot 10^{-5} \cdot 519{,}2 \cdot 293} 8{,}5 \cdot 10^{-11} = 0{,}301683 \text{ kg/s},$$

iar prin orificiu debitul maxim are valoarea

$$Q_{02} = \alpha f \left(\frac{p_{e_1}}{p_c}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1} p_c \rho_c \left[1 - \left(\frac{p_{e_1}}{p_c}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]} = 0{,}135325 \text{ kg/s},$$

ceea ce dovedește cele precizate mai înainte.

Rezultă deci că și prin mediul poros se filtrează tot același debit care se scurge prin defect. Probabil că parametrul G_1 a fost estimat inexact; cele mai mari erori producîndu-se la aprecierea elementelor geometrice ale mediului poros prin care se filtrează gazele către imobil.

Recalcularea parametrului G_1 duce la valoarea acestuia

$$G_1 = \frac{\mu RT\ Q_{02}}{p_{e_1}^2 - p_a^2} = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-5} \cdot 519{,}2 \cdot 293 \cdot 0{,}135325}{(1{,}3552^2 - 1{,}01325^2)\ 10^{10}} = 0{,}3813 \cdot 10^{-10} \text{ m}^3.$$

Cu această valoare a lui G_1 se găsește ecuația din care se determină presiunea din exteriorul defectului în situația că toate gazele se infiltrează în primul imobil,

$$1{,}8025\ (x_1^2 - x_a^2) = x_1^{\frac{1}{1{,}32}} \sqrt{1 - x_1^{\frac{1{,}32-1}{1{,}32}}} \qquad (32)$$

Pentru $x = x_{cr}$ membrul stîng este practic egal (0,2336) cu valoarea maximă a membrului din dreapta (0,2335) ceea ce înseamnă că aprecierea presiunii din exteriorul defectului este corectă.

Pentru imobilul al doilea, în situația în care și acesta ar fi singur lîngă defect, se ajunge la ecuația

$$2{,}5999\ (x_2^2 - 0{,}1643) = x_2^{\frac{1}{1{,}32}} \sqrt{1 - x_2^{\frac{1{,}32-1}{1{,}32}}}, \tag{33}$$

unde s-a introdus notația $x_2 = p_{e_2}/p_c$, reprezentînd presiunea din exteriorul defectului.

Și în acest caz membrul stîng al ecuației este tot mai mare (0,3368) decît valoarea maximă (0,2335) a membrului din dreapta, cee ce presupune că și acum presiunea din exteriorul defectului este

$$p_{e_2} = 0{,}5421 \cdot p_c = 0{,}5421 \cdot 2{,}5 \cdot 10^5 = 1{,}3352 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

Recalcularea parametrului G_2 este identică cu aceea a lui G_1. De altfel, introducerea parametrului G_2 în ecuația (26) duce la obținerea unei egalități identice cu (32). Și în acest caz debitul scurs prin defect are valoarea maximă și este

$$Q_{02} = 0{,}135325 \text{ kg/s}.$$

Pentru cel de-al treilea imobil, dacă și acesta ar fi singur în apropierea defectului format, se obține ecuația ce trebuie soluționată,

$$1{,}0399\ (x_3^2 - 0{,}1643) = x_3^{\frac{1}{1{,}32}} \sqrt{1 - x_3^{\frac{1{,}32-1}{1{,}32}}}, \tag{34}$$

unde $x_3 = p_{e_3}/p_c$, p_{e_3} este presiunea din exteriorul defectului în cazul în care lîngă defect ar fi doar cel de-al treilea imobil.

De această dată, membrul stîng al ecuației anterioare are pentru $x_3 = x_{cr}$ o valoare mai mică (0,1347) față de valoarea maximă a membrului din dreapta. Din acest motiv, rezultă că presiunea p_{e_3} este situată în intervalul $(0{,}5421-1)\ p_c$.

Într-adevăr, printr-un calcul iterativ se obține

$$x_3 = \frac{p_{e_3}}{p_c} = 0{,}6218$$

satisfăcînd ecuația (34). Cu presiunea $p_{e_3} = 0{,}6218 \cdot 10^5 \cdot 2{,}5 = 1{,}5548 \cdot 10^5$ N/m^2 rezultă debitul de gaze ce se scurge din defect, deci și către cel de-al treilea imobil dacă acesta ar fi singur lîngă imobil.

$$Q_{03} = 0{,}133341 \text{ kg/s}.$$

În cazul în care cele trei imobile sînt supuse la infiltrarea gazelor scurse din defect, se admite că presiunea din exteriorul acestuia este p_e. Dacă se notează $\bar{x} = p_e/p_c$ și se admit că valorile parametrilor G_1, G_2 și G_3 calculate mai înainte rămîn nemodificate, se obține ecuația

$$4{,}6450\,(\bar{x}^2 - 0{,}1643) = \bar{x}^{\frac{1}{1{,}32}} \sqrt{1 - \bar{x}^{\frac{1{,}32-1}{1{,}32}}}. \tag{35}$$

Acum membrul stîng al ecuației pentru $x = x_{cr}$ are valoarea 0,6019, deci mai mare decît 0,2335, ceea ce înseamnă că debitul scurs prin defect este tot maxim și are valoarea $Q_m = 0{,}135325$ kg/s. Presiunea din exteriorul defectului și în acest caz nu se reduce față de mărimea sa critică $1{,}3552 \cdot 10^5$ N/m^2.

Recalcularea parametrului G_i pentru cazul în care toate imobilele sînt supuse la infiltrarea gazelor duce la valoarea acestuia, egală cu G_1 și G_2, adică $G_i = 0{,}3813 \cdot 10^{-10}$ m^3. Rezultatul, neverosimil la prima vedere, arată că din cauza rezistențelor reduse pe care le realizează scurgerea gazelor simultan către cele trei imobile, debitul scurs prin defect rămîne tot la valoarea maximă a acestuia.

Pentru a efectua distribuția debitului scurs prin defect către cele trei imobile admitem că, debitele parțiale Q_1, Q_2 și Q_3 sînt proporționale cu parametrii G_1, G_2 și G_3,

$$Q_1 = Q_m \frac{G_1}{G_1 + G_2 + G_3} = 0{,}135325 \frac{0{,}3813 \cdot 10^{-10}}{(0{,}3813 + 0{,}3813 + 0{,}22)\,10^{-10}} =$$

$$= 0{,}052513 \frac{\text{kg}}{\text{s}}.$$

În mod asemănător se obține $Q_2 = 0{,}052513$ kg/s și $Q_3 = 0{,}030299$ kg/s. Potrivit coeficientului de interferență dat de formula (27) rezultă că în situația în care cele trei imobile sînt supuse infiltrării gazelor scurse din defect se găsesc coeficienții

$$I_1 = \frac{Q_1}{Q_{01}} = \frac{0{,}052513}{0{,}135325} = 0{,}3880, \quad I_2 = 0{,}3880 \text{ și } I_3 = 0{,}2272.$$

Primele două imobile ecranează imobilul al treilea, realizînd coeficientul de ecranare

$$E_{1.3} = E_{2.3} = \frac{I_1}{I_3} = \frac{0{,}3880}{0{,}2272} = 1{,}4876.$$

Din calculele efectuate rezultă că estimarea inițială a parametrilor G_1, G_2 și G_3 nu prezintă un interes prea mare deoarece aceștia pot fi, în unele cazuri, corectați. Corecția intervine în acele cazuri în care membrul stîng al ecuației (26) este mai mare decît acela din dreapta; ambii termeni fiind calculați pentru $x = x_{cr}$.

6. CONCLUZII

Debitele de gaze scurse prin defectele de conducte astupate sînt, în general ,mai mici decît în situația în care mediul poros ar lipsi.

De asemenea, prezența unei fundații, dacă aceasta nu este fisurată, spartă, duce la reducerea debitului de gaze infiltrate într-un imobil față de situația în care același imobil nu ar avea fundație. Probabil că fundația unui imobil reduce mult cantitatea de gaze ce s-ar infiltra în același imobil dar fără fundație.

În situația mai multor imobile supuse simultan infiltrării gazelor provenite dintr-un defect adiacent lor se produce o „distribuire" a debitelor de gaze care sînt invers proporționale cu distanțele de la fiecare imobil la defectul conductei.

Totuși, sînt situații cînd parametrii compleși care descriu acest fenomen (presiunea și natura gazelor din conductă, mărimea orificiului și distanța de la acesta la imobile) prezența fundației la unul sau la toate imobilele adiacente au asemenea valori care duc la cantități maxime de gaze în fiecare imobil, ceea ce ar fi echivalent cu aceea că în asemenea cazuri imobilele nu „interferează".

Cu toate că referitor la problema „interferenței" unui imobil cu acelea învecinate sînt foarte multe aspecte de analizat, ne mărginim, cu limitele lucrării pe care le-am semnalat, la aspectele ce lămuresc în mare măsură complexul fenomen al infiltrării gazelor în imobilele adiacente unui defect format pe sistemul de transport sau distribuție al gazelor naturale.

Primit în redacție la 20 ianuarie 1989

BIBLIOGRAFIE

1. I. CREȚU, *Hidraulica generală și subterană*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1983, p. 182—183.
2. A. V. KIRILLIN, V. V. SÎCEV, A. E. ȘEINDLIN, *Termodinamica*, Edit. Științifică și Enciclopedică, București, 1985, p. 298—299.
3. T. OROVEANU, S. POPOVICIU, AL. D. STAN, *Pierderile de gaze din rețeaua de distribuție*. St. cerc. mec. apl., **40**, 3 (1981).
4. T. OROVEANU, S. POPOVICIU, AL. D. STAN, *Scurgerile de gaze prin defectele conductelor cu presiuni mari*, St. cerc. mec. apl., **40**, 4 (1981).
5. Al. D. STAN, S. POPOVICIU, *Asupra canalizării gazelor către imobile*, St. cerc. mec. apl., **40**, 5 (1981).

DINAMICA MORILOR VIBRATOARE PENTRU MĂCINAREA MATERIALELOR GRANULARE

de P. BRATU

INCERC — București

Se abordează problemele specifice de dinamica morilor vibratoare rezemate pe elemente antivibratile din cauciuc.
În lucrare au fost stabilite relațiile de calcul pentru parametrii funcționali și tehnologici, cît și pentru mărimile ce caracterizează sistemul antivibratil.

1. INTRODUCERE

Din categoria utilajelor tehnologice specializate pentru măcinarea foarte fină a materialelor granulare fac parte și morile vibratoare cu corpuri de sfărîmare (bare sau bile). Aceste utilaje sînt prezentate în fluxurile tehnologice ale industriilor de proces, unde este necesară realizarea pulberilor foarte fine (5—10 μm) din feroaliaje, piatră măruntă sau spărtură de marmoră [3].

În lucrare se prezintă particularitățile calculului și stabilirii soluției tehnice a morilor vibratoare cu două incinte de măcinare, excitate prin vibrogeneratoare inerțiale cu forță rotitoare.

Studiul dinamic și experimentările efectuate pe moara vibratoare tip Palla—U 35, fabricată de firma Humboldt (R.F.G.), au dat posibilitatea fundamentării relațiilor de calcul necesare atît pentru modernizarea utilajelor existente, cît și pentru realizarea unor utilaje noi din această clasă.

Moara vibratoare se compune din următoarele părți principale (fig. 1) :

— camerele de măcinare *1*, *2*, identice, dispuse simetric față de axa longitudinală Cy, unde C este centrul de masă al sistemului ;

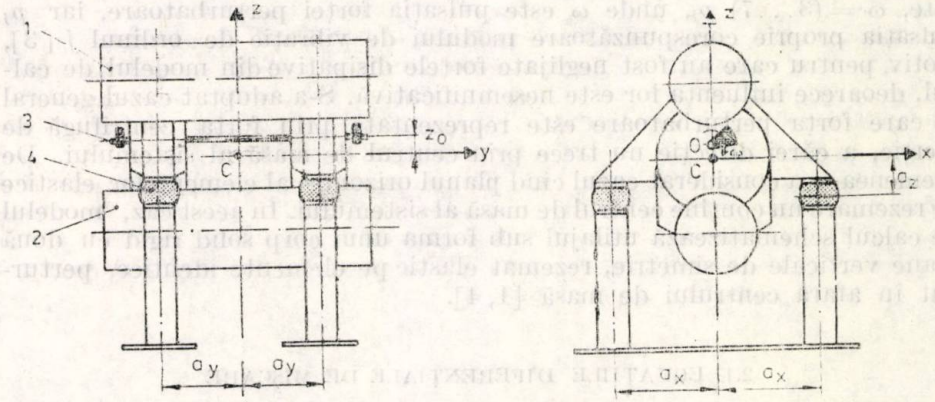


Fig. 1.— Moară vibratoare cu două camere de măcinare descentrată, la care $C \neq 0$ și $a_z \neq 0$.

— vibrogeneratorul inerțial *3*, cu forță rotitoare al cărui ax trece prin *O* și este paralel cu axa *Cy*, unde *O* este centrul forței perturbatoare;

— sistemul antivibratil de rezemare *4*, format din elemente de cauciuc.

Studiul dinamic al morilor vibratoare trebuie să rezolve următoarele probleme fundamentale și anume:

— stabilirea regimului dinamic pentru realizarea vibrațiilor tehnologice;

— stabilirea soluției de rezemare pentru realizarea gradului de izolare antivibratilă.

2. DETERMINAREA PARAMETRILOR FUNCȚIONALI

Ținînd seama de particularitățile constructive și tehnologice ale morilor vibratoare cu două camere de măcinare s-a adoptat modelul dinamic de calcul schematizat în figura 2.

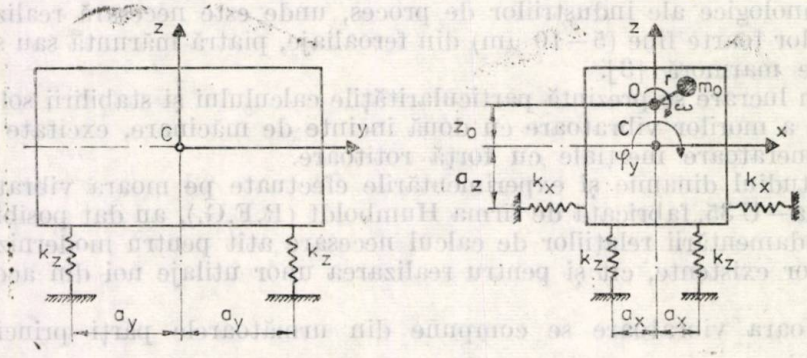


Fig. 2. — Modelul dinamic de calcul.

Utilajul funcționează în postrezonanță după toate gradele de libertate, $\omega = (3 \ldots 7)\ p_j$, unde ω este pulsația forței perturbatoare, iar p_j pulsația proprie corespunzătoare modului de vibrație de ordinul j [3], motiv pentru care au fost neglijate forțele disipative din modelul de calcul, deoarece influența lor este nesemnificativă. S-a adoptat cazul general în care forța perturbatoare este reprezentată prin forța centrifugă de inerție, a cărei direcție nu trece prin centrul de masă al sistemului. De asemenea, s-a considerat cazul cînd planul orizontal al elementelor elastice de rezemare nu conține centrul de masă al sistemului. În acest caz, modelul de calcul schematizează utilajul sub forma unui corp solid rigid cu două plane verticale de simetrie, rezemat elastic pe elemente identice, perturbat în afara centrului de masă [1, 4].

2.1. ECUAȚIILE DIFERENȚIALE DE MIȘCARE

Sistemul are trei grade de libertate excitate după direcțiile de translație $C\,x$, $C\,z$ și direcția de rotație φ_y, pentru care s-au adoptat coordonatele curente ca funcții de timp notate, respectiv, cu X, Z și φ_y [1, 5, 6].

Pentru sistemul elastic, modelat în figura 2, poate fi scris sistemul de ecuații diferențiale de mișcare sub forma [1, 2, 6]:

$$\begin{aligned} &m\ddot{X} + 4k_x X + 4a_z k_x \varphi_y = P_0 \cos \omega t, \\ &J_y \ddot{\varphi}_y + 4\varphi_y (k_z a_x^2 + k_x a_z^2) + 4 k_x a_z X = z_0 P_0 \cos \omega t, \\ &m\ddot{Z} + 4k_z Z = P_0 \sin \omega t, \end{aligned} \tag{1}$$

în care m este masa totală (suspendată) a utilajului; J_y — momentul de inerție al utilajului față de axa Cy; k_x — coeficientul de rigiditate al unui element elastic pe direcția Cx; k_z — coeficientul de rigiditate al unui element elastic pe direcția Cz; a_x — distanța măsurată pe orizontală între planul median longitudinal și reazemele elastice; a_z — distanța măsurată pe verticală dintre planul orizontal ce conține elementele elastice și poziția centrului de masă; z_0 — distanța măsurată pe verticală, în planul median longitudinal, dintre centrul de masă C și centrul de perturbare O; P_0 — amplitudinea forței perturbatoare de tip inerțial, de forma $P_0 = m_0 r\omega^2$; ω — pulsația forței perturbatoare; m_0 — masa totală excentrică în raport cu axa de rotație a elementelor de dezechilibrare dinamică din componența vibratorului; r — distanța dintre axa de rotație și centrul de masă al elementelor de dezechilibrare dinamică din componența vibratorului; $m_0 r$ — momentul static total al elementelor de dezechilibrare dinamică din vibrator.

Pulsațiile proprii ale sistemului sînt date de relațiile:

$$\omega_z^2 = 4\,\frac{k_z}{m} \tag{2}$$

pentru modul decuplat al vibrațiilor de translație pe verticală:

$$\frac{p_{x,\,\varphi_y}^2}{\omega_z^2} = \frac{1}{2}\left\{\frac{k_x}{k_z}\left(1 + \frac{a_z^2}{\rho_y^2}\right) + \frac{a_x^2}{\rho_y^2}\right) \pm \pm \sqrt{\left[\frac{k_x}{k_z}\left(1 + \frac{a_z^2}{\rho_y^2}\right) + \frac{a_x^2}{\rho_y^2}\right] - 4\,\frac{k_x}{k_z}\left(\frac{a_x}{\rho_y}\right)^2}\right\} \tag{3}$$

pentru modurile cuplate (X, φ_y) al vibrațiilor de translație după axa Cx și rotație în jurul axei Cy.

În relația (3) s-a notat cu ρ_y raza de girație dată de formula $J_y = m\rho_y^2$.

Pentru regimul vibrațiilor forțate, soluțiile ecuațiilor diferențiale vor fi armonice de forma membrului drept, cu amplitudinile deplasărilor date astfel:

$$A_x = \frac{m_0 r \omega^2}{4k_z} \cdot \frac{\dfrac{k_x}{k_z} \cdot \dfrac{a_z}{\rho_y}\left(\dfrac{a_z}{\rho_y} - \dfrac{z_0}{\rho_y}\right) + \left(\dfrac{a_x}{\rho_y}\right)^2 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_z}\right)^2}{\left(\dfrac{\omega}{\omega_z}\right)^4 - \left[\dfrac{k_x}{k_z} + \dfrac{k_x}{k_z}\left(\dfrac{a_z}{\rho_y}\right)^2 + \left(\dfrac{a_x}{\rho_y}\right)^2\right]\left(\dfrac{\omega}{\omega_z}\right)^2 + \dfrac{k_x}{k_z}\left(\dfrac{a_x}{\rho_y}\right)}, \tag{4}$$

$$A_\varphi = \frac{m_0 r\,\omega^2}{4k_z\,\rho_y} \cdot \frac{\dfrac{k_x}{k_z}\left(\dfrac{a_z}{\rho_y} - \dfrac{z_0}{\rho_y}\right) + \dfrac{z_0}{\rho_y}\left(\dfrac{\omega}{\omega_z}\right)^2}{\left(\dfrac{\omega}{\omega_z}\right)^4 - \left[\dfrac{k_x}{k_z} + \dfrac{k_x}{k_z}\left(\dfrac{a_z}{\rho_y}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{\rho_y}\right)^2\right]\left(\dfrac{\omega}{\omega_z}\right)^2 + \dfrac{k_x}{k_z}\left(\dfrac{a_x}{\rho_y}\right)}, \tag{5}$$

$$A_z = \frac{m_0\,r\,\omega^2}{4\,k_z} \cdot \frac{1}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_z}\right)^2}, \tag{6}$$

2.2. PARAMETRII VIBRAȚIILOR TEHNOLOGICE

În vederea realizării gradului de măcinare fină a materialelor granulare este necesară analiza următorilor parametri tehnologici:

a) coeficientul de aruncare pe verticală a materialului Γ, numit și coeficientul mașinii, este dat de relația [3,7]:

$$\Gamma = \frac{A_z\,\omega^2}{g} \tag{7}$$

cu valori cuprinse în intervalul 6...12;

b) frecvența vibrațiilor tehnologice trebuie să aibe valori cuprinse în intervalul (15...50) Hz, funcție de materialul granular și finețea de măcinare;

c) amplitudinea pe verticală a vibrațiilor tehnologice este cuprinsă în intervalul (3...10) mm.

Pentru exploatarea favorabilă a utilajului este necesar ca mișcarea vibratorie pe verticală, considerată mișcare tehnologică, să fie predominantă, se impune analiza a două variante și anume:

— mașina este „centrată", adică centrul de perturbare O coincide cu centrul de masă C;

— mașina este „centrată" și „echilibrată", adică planul orizontal al centrului de masă, identic cu al centrului de perturbare, conține elementele antivibratile.

În cazul *mașinii centrate*, condiția $z_0 = 0$ implică următoarele relații pentru amplitudinile A_x și A_φ:

$$A_x = \frac{m_0\,r\,\omega^2}{4\,k_z} \cdot \frac{\dfrac{k_x}{k_z}\left(\dfrac{a_z}{\rho_y}\right)^2 + \left(\dfrac{a_x}{\rho_y}\right)^2 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_z}\right)^2}{D}, \tag{8}$$

$$A_\varphi = \frac{m_0\,r\,\omega^2}{4k_z\,\varphi_y} \cdot \frac{\dfrac{k_x}{k_z} \cdot \dfrac{a_z}{\rho_y}}{D}. \tag{9}$$

În cazul *mașinii centrate* și *echilibrate* (fig. 3) avem condițiile $z_0 = 0$ și $a_z = 0$ ce implică $A_\varphi = 0$, iar pentru A_x relația

$$A_x = \frac{m_0 r \omega^2}{4k_z} \cdot \frac{\left(\frac{a_x}{\rho_y}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{\omega_z}\right)^2}{D} \tag{10}$$

în care

$$D = \left(\frac{\omega}{\omega_z}\right)^4 - \left[\frac{k_x}{k_z} + \frac{k_x}{k_z}\left(\frac{a_z}{\rho_y}\right)^2 + \left(\frac{a_x}{\rho_y}\right)^2\right]\left(\frac{\omega}{\omega_z}\right) + \frac{k_x}{k_z}\left(\frac{a_x}{\rho_y}\right).$$

Se menționează că pentru ambele cazuri amplitudinea A_z este dată de relația (6).

2.3. PARAMETRII SISTEMULUI DE IZOLARE ANTIVIBRATILĂ

Sistemul de izolare antivibratilă se compune din patru elemente de cauciuc, de secțiune inelară, legate în paralel, solicitate la compresiune pe verticală și la forfecare în planul orizontal (fig. 3).

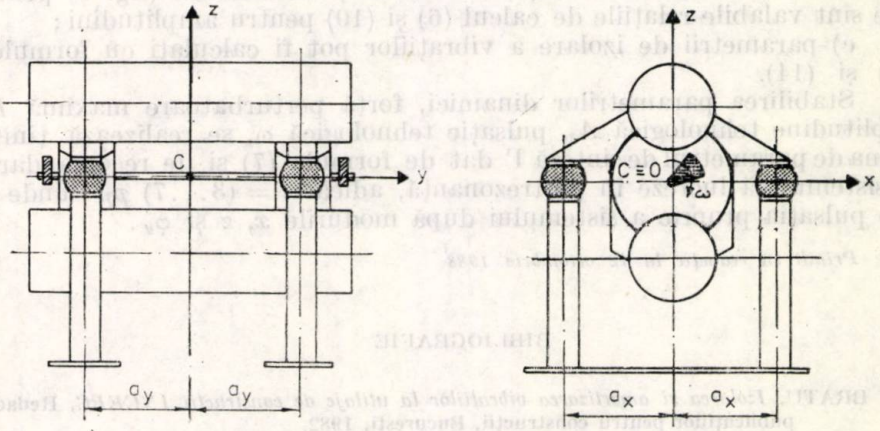


Fig. 3. — Moară vibratoare cu două camere de măcinare centrată la care $C \equiv 0$ și $a_z = 0$.

Amplitudinea forței dinamice F_{Tx} care se transmite la fundație prin intermediul celor patru elemente elastice, pe direcția x, este dată de relația:

$$F_{Tx} = 4 k_x \sqrt{A_x^2 + a_z^2 A_\varphi^2}, \tag{11}$$

iar gradul de izolare corespunzătoare este

$$I_x = 1 - \frac{F_{Tx}}{P_0} \tag{12}$$

care trebuie să fie cuprins între 0,70...0,90.

Amplitudinea forței dinamice F_{Tz} care se transmite la fundație, prin intermediul celor patru elemente elastice, pe direcția z, este :

$$F_{Tz} = 4\ k_z \sqrt{A_z^2 + a_z^2 A_\varphi^2}, \tag{13}$$

iar gradul de izolare corespunzător va fi :

$$I_z = 1 - \frac{F_{Tz}}{P_0}, \tag{14}$$

care trebuie să fie cuprins între 0,80...0,95.

3. CONCLUZII

Pe baza relațiilor de calcul prezentate și a valorilor parametrilor tehnologici necesari rezultă următoarele :

a) mișcarea utilajului necentrat și neechilibrat are trei grade de libertate, din care două cuplate pe direcțiile x, φ_y ;

b) soluția tehnică cea mai rațională este aceea în care se adoptă varianta constructivă cu mașina centrată și echilibrată (fig. 3) pentru care sînt valabile relațiile de calcul (6) și (10) pentru amplitudini ;

c) parametrii de izolare a vibrațiilor pot fi calculați cu formulele (12) și (14).

Stabilirea parametrilor dinamici, forță perturbatoare maximă P_0, amplitudine tehnologică A_z, pulsație tehnologică ω, se realizează ținînd seama de parametrul de sinteză Γ dat de formula (7) și de recomandarea ca sistemul să lucreze în postrezonanță, adică $\omega = (3...7)\ p_j$, unde p_j este pulsația proprie a sistemului după modurile x, z și φ_y.

Primit în redacție la 12 octombrie 1988

BIBLIOGRAFIE

1. P. BRATU, *Izolarea și amortizarea vibrațiilor la utilaje de construcții INCERC*, Redacția publicațiilor pentru construcții, București, 1982.
2. C. HARRIS, C. CREDE, *Șocuri de vibrații*, vol. I (traducere din limba engleză)., Edit. Tehnică, București, 1968.
3. GH. IORDACHE, GH. ENE, M. RASIDESCU, *Utilaje pentru industria materialelor de construcții*, Edit. Tehnică, București, 1987.
4. ȘT. MIHĂILESCU, P. BRATU, V. GORAN, ST. ARAMĂ, *Mașini de construcții*, vol. I, Edit. Tehnică, București, 1984.
5. M. MUNTEANU, *Introducere în dinamica mașinilor vibratoare*, Edit. Academiei, București, 1986.
6. GH. SILAȘ, M. RĂDOI, L. BRÎNDEU, H. KLEPP, A. HEGEDÜS, *Culegere de probleme de vibrații mecanice*, vol. I, Edit. Tehnică, București, 1967.
7. C. STANCIU, *Dinamica mașinilor. Probleme speciale*, Institutul de Construcții, București, 1974.

PLĂCI PLANE DREPTUNGHIULARE CU DEFORMAȚII MARI ÎNCASTRATE PE CONTUR, SUPUSE ACȚIUNII TRANSVERSALE A UNEI SARCINI UNIFORM DISTRIBUITE

de I. MARȚIAN și O. ILEA

Institutul Politehnic, Cluj-Napoca

În prezenta lucrare, autorii tratează problema plăcilor plane dreptunghiulare încastrate pe contur considerînd și deformațiile din suprafața mediană, fapt ce determină apariția stării de eforturi suplimentare, de membrană, care sporește rigiditatea acestor plăci la acțiunea transversală a unei sarcini uniform distribuite, diminuînd, deci, efectul de încovoiere. Utilizîndu-se metoda variațională Bubnov-Galerkin, sînt analizate, în limitele aproximațiilor de ordinul întîi și doi, cele două situații, calitativ diferite, de rezemare ale plăcilor pe contur — fixă și mobilă —, rezultînd o apreciere mai reală a comportării lor, descrisă de calculul neliniar.

1. GENERALITĂȚI

Știut fiind că dacă deplasările transversale ale plăcilor plane sînt de același ordin de mărime cu grosimea lor ($1/5 < w/h < 1{,}2$), ipoteza neglijării extinderii suprafeței mediane nu mai poate fi acceptată, devine necesar studiul comportării acestor plăci ținînd seama și de deformațiile suprafeței mediane, care determină o stare de eforturi suplimentară, de membrană, diminuînd efectul de încovoiere. În acest fel, se poate evalua mai riguros rigiditatea plăcii față de situația cînd s-ar admite teoria liniară, valabilă numai în domeniul deformațiilor mici ($w/h \leqslant 1/5$). Să mai precizăm că natura rezemării plăcii pe contur în planul median influențează hotărîtor starea de eforturi și deformații.

În [1] este prezentată formularea în deplasări și mixtă a problemei plăcilor plane dreptunghiulare cu deformații mari, sub forma:

— placa fixă pe contur (nedeplasabilă în planul median)

$$\begin{aligned} L_u(u,\ v) &= P(w)\,; \\ L_v(u,\ v) &= R(w)\,; \\ \nabla^4 w &= \frac{Q(u,\ v,\ w)}{D}\,; \end{aligned} \tag{1}$$

— placa mobilă pe contur (deplasabilă în planul median)

$$\begin{aligned} \nabla^4 F &= E\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]; \\ \nabla^4 w &= \frac{Q(F,\ w)}{D}\,, \end{aligned} \tag{2}$$

în care

$$L_u(u, v) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y},$$

$$L_v(u, v) = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},$$

$$P(w) = -\frac{1+\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \tag{3}$$

$$R(w) = -\frac{1+\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),$$

$$Q = p + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

în ultima relație eforturile de membrană avînd expresiile

$$N_x = \frac{Eh}{1-\mu^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right],$$

$$N_y = \frac{Eh}{1-\mu^2}\left[\frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right], \tag{4}$$

$$N_{xy} = \frac{Eh}{1-\mu^2} \frac{1-\mu}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}\right),$$

pentru primul caz de rezemare a plăcii și, respectiv,

$$N_x = h \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\ ;\quad N_y = h \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\ ;\quad N_{xy} = -h \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \tag{5}$$

în al doilea caz, momentele de încovoiere și torsiune fiind date de relațiile cunoscute

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right);\quad M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \tag{6}$$

$$M_{xy} = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

unde u, v și w reprezintă componentele deplasării unui punct din suprafața mediană, $F(x, y)$ — funcția eforturilor de membrană, p — intensitatea sarcinii transversale, continuu distribuită pe placă, E și μ — constantele elastice ale materialului, iar $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ — rigiditatea cilindrică a plăcii.

2. PLACA DREPTUNGHIULARĂ ÎNCASTRATĂ PE CONTUR, ACȚIONATĂ DE O SARCINĂ UNIFORM DISTRIBUITĂ

Fie placa dreptunghiulară încastrată pe contur, de laturi a și b, raportată la sistemul de axe xOy (fig. 1), acționată de sarcina uniform distribuită p. Funcția de aproximare a săgeții plăcii se consideră sub forma sumei finite [2],

$$w_{mn} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \left(1 - \cos \frac{2i\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2j\pi y}{b}\right), \tag{7}$$

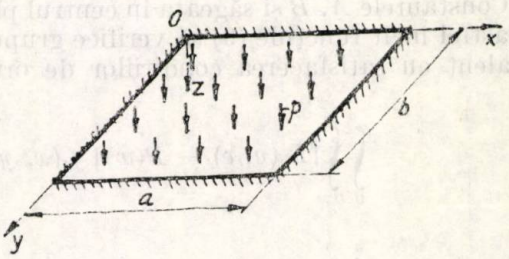


Fig. 1. — Placa dreptunghiulară încastrată pe contur.

satisfăcînd condițiile de contur

$$\begin{aligned} x = 0,\ a; \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ y = 0,\ b; \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

în care coeficienții c_{ij} sînt deocamdată necunoscuți.

a) PLACA ÎNCASTRATĂ FIX PE CONTUR

În vederea găsirii unei soluții aproximative a problemei, pe baza utilizării metodei variaționale Bubnov-Galerkin, alegem pentru deplasări, într-o primă aproximație, expresiile

$$\begin{aligned} u(x, y) &= Af_1(x, y) = A \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \\ v(x, y) &= Bf_2(x, y) = B \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}, \\ w(x, y) &= \frac{1}{4} w_1 f_3(x, y) = \frac{1}{4} w_1 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right), \\ &(i = j = 1,\ c_{11} = w_1), \end{aligned} \tag{9}$$

componentele $u(x, y)$ și $v(x, y)$ ale deplasărilor din suprafața mediană a plăcii îndeplinind condițiile la limită

$$x = 0, \frac{a}{2}, a; \quad u = 0; \tag{10}$$

$$y = 0, \frac{b}{2}, b; \quad v = 0.$$

Constantele A, B și săgeata în centrul plăcii, w_1, urmează să se determine astfel încît funcțiile (9) să verifice grupul de relații (1), ceea ce este echivalent cu satisfacerea condițiilor de ortogonalitate,

$$\int_0^a \int_0^b [L_u(u, v) - P(w)] f_1(x, y) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 0,$$

$$\int_0^a \int_0^b [L_v(u, v) - R(w)] f_2(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 0, \tag{11}$$

$$\int_0^a \int_0^b \left[\nabla^4 w - \frac{Q(u, v, w)}{D} \right] f_3(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 0.$$

Cu notația $k = a/b$ și coeficientul Poisson $\mu = 0{,}3$, primele două relații conduc, după efectuarea calculelor, la sistemul de ecuații algebrice liniare în raport cu A_1 și B_1:

$$\begin{aligned} (1 + 0{,}08750\ k^2)A_1 + 0{,}11708\ k\ B_1 &= 0{,}03333\ k^2 \frac{w_1^2}{a}, \\ 0{,}11708\ k\ A_1 + (k^2 + 0{,}08750)B_1 &= 0{,}03333\ k \frac{w_1^2}{a}, \end{aligned} \tag{12}$$

ale cărui soluții

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{(0{,}00842 - 0{,}28467\ k^2)k^2}{0{,}74735 + 8{,}48947\ k^2 + 0{,}74735\ k^4} \cdot \frac{w_1^2}{a}, \\ B_1 &= \frac{(0{,}28467 - 0{,}00842\ k^2)k}{0{,}74735 + 8{,}48947\ k^2 + 0{,}74735\ k^4} \frac{w_1^2}{a} \end{aligned} \tag{13}$$

sînt trecute în tabelul 1, funcție de raportul k între laturile plăcii.

Tabelul 1

Soluțiile sistemului de ecuații (12).

$k = a/b$	1,00	0,75	0,50	0,25	0,00
A_1	0,02766	0,01481	0,00537	0,00045	0,00
B_1	0,02766	0,03645	0,04844	0,05545	0,00
Multiplicator	w_1^2/a				

Notînd apoi

$$q = \frac{0{,}06228 + 0{,}74897\,k^2 + 0{,}59619\,k^4 + 0{,}74897\,k^6 + 0{,}06228\,k^8}{0{,}05108 + 0{,}62974\,k^2 + 0{,}51182\,k^4 + 0{,}62974\,k^6 + 0{,}05108\,k^8}, \tag{14}$$

$$s = -\frac{0{,}00032 + 0{,}00363\,k^2 + 0{,}00032\,k^4}{0{,}05108 + 0{,}62974\,k^2 + 0{,}51182\,k^4 + 0{,}62974\,k^6 + 0{,}05108\,k^8} \cdot \frac{pa^4}{hD},$$

din ultima relație (11), ținînd seama de (4), rezultă ecuația algebrică de gradul trei în (w_1/h),

$$\left(\frac{w_1}{h}\right)^3 + 3q\left(\frac{w_1}{h}\right) + 2s = 0, \tag{15}$$

avînd coeficienții q și s dați în tabelul 2.

Tabelul 2

Coeficienții ecuației (15).

$k = a/b$	1,00	0,75	0,50	0,25	0,00	Multiplicator
q	1,18427	1,18599	1,19233	1,20531	1,21926	1
s	−0,00228	−0,00360	−0,00498	−0,00592	−0,00626	pa^4/hD

Cum realizantul $\Delta = q^3 + s^2 > 0$, singura rădăcină reală a ecuației (15) va fi

$$\frac{w_1}{h} = \sqrt[3]{-s + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-s - \sqrt{\Delta}}. \tag{16}$$

Cea de a doua aproximație [3] se obține păstrînd pentru $u(x, y)$ și $v(x, y)$ aceleași expresii din (9), iar pentru săgeata plăcii luîndu-se suma primilor doi termeni în funcție de aproximare,

$$w(x, y) = \frac{1}{4}\left[w_1 f_3(x, y) + w_2 f_4(x, y)\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[w_1\left(1 - \cos\frac{2\pi x}{a}\right)\left(1 - \cos\frac{2\pi y}{b}\right) + \right. \tag{17}$$

$$+ w_2\left(1 - \cos\frac{4\pi x}{a}\right)\left(1 - \cos\frac{4\pi^a y}{b}\right)\Big],$$

$$(i = j = 1,\ c_{11} = w_1; \qquad i = j = 2,\ c_{22} = w_2).$$

După reluarea calculelor în primele două relații (11), se găsește un nou sistem de ecuații algebrice liniare în A_2 și B_2, de forma

$$\begin{aligned}(1 + 0{,}08750\ k^2)A_2 + 0{,}11708\ kB_2 &= \frac{1}{a}\,[0{,}03333\ k^2 w_1^2 + \\ &+ (0{,}09714\ k^2 - 0{,}60952)\ w_1 w_2],\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}0{,}11708\ kA_2 + (k^2 + 0{,}08750)\ B_2 &= \frac{k}{a}\,[0{,}03333\ w_1^2 + \\ &+ (0{,}09714 - 0{,}60952\ k^2)\ w_1 w_2],\end{aligned}$$

cu soluțiile

$$A_2 = A_1 - \frac{0{,}45552 + 5{,}23056\ k^2 - 1{,}43928\ k^4}{0{,}74735 + 8{,}48947\ k^2 + 0{,}74735\ k^4} \cdot \frac{w_1 w_2}{a}, \tag{19}$$

$$B_2 = B_1 + k \cdot \frac{1{,}43928 - 5{,}23056\ k^2 - 0{,}45552\ k^4}{0{,}74735 + 8{,}48947\ k^2 + 0{,}74735\ k^4} \cdot \frac{w_1 w_2}{a}$$

prezentate în tabelul 3, unde $x_1 = w_1/h$ și $x_2 = w_2/h$.

Tabelul 3

Soluțiile sistemului de ecuații (18).

$k = a/b$	A_2	B_2
1,00	$0{,}02766\ x_1^2 - 0{,}42535\ x_1x_2$	$0{,}02766\ x_1^2 - 0{,}42535\ x_1x_2$
0,75	$0{,}01481\ x_1^2 - 0{,}51089\ x_1x_2$	$0{,}03645\ x_1^2 - 0{,}21449\ x_1x_2$
0,50	$0{,}00537\ x_1^2 - 0{,}57371\ x_1x_2$	$0{,}04844\ x_1^2 + 0{,}01768\ x_1x_2$
0,25	$0{,}00045\ x_1^2 - 0{,}60647\ x_1x_2$	$0{,}05545\ x_1^2 + 0{,}21676\ x_1x_2$
0,00	$- 0{,}60951\ x_1x_2$	0,00
Multiplicator	h^2/a	

Condițiile ca săgeata $w(x, y)$ dată de (17) să satisfacă a treia ecuație (1), unde N_x, N_y și N_{xy} sînt exprimate prin relațiile (4), se vor scrie

$$\begin{aligned}\int_0^a \int_0^b \left[\nabla^4 w - \frac{Q(u,\ v,\ w)}{D}\right] f_3(x,\ y)\,dx\,dy = 0,\\ \int_0^a \int_0^b \left[\nabla^4 w - \frac{Q(u,\ v,\ w)}{D}\right] f_4(x,\ y)\,dx\,dy = 0,\end{aligned} \tag{20}$$

rezultînd astfel un sistem de două ecuații algebrice neliniare, de gradul trei, care determină necunoscutele x_1 și x_2, avînd forma generală

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2) &= a_{30}x_1^3 + a_{21}x_1^2x_2 + a_{12}x_1x_2^2 + a_{03}x_2^3 + a_{20}x_1^2 + \\ &+ a_{11}x_1x_2 + a_{02}x_2^2 + a_{10}x_1 + a_{01}x_2 + a_{00} \cdot \frac{pa^4}{hD} = 0, \\ g_2(x_1, x_2) &= b_{30}x_1^3 + b_{21}x_1^2x_2 + b_{12}x_1x_2^2 + b_{03}x_2^3 + b_{20}x_1^2 + \\ &+ b_{11}x_1x_2 + b_{02}x_2^2 + b_{10}x_1 + b_{01}x_2 + b_{00} \cdot \frac{pa^4}{hD} = 0, \end{aligned} \tag{21}$$

cu coeficienții calculați în tabelul 4, în funcție de raportul între laturi, $k = a/b \leqslant 1$. Soluțiile acestui sistem, stabilite cu ajutorul unui program, scris în limbaj FORTRAN 77, bazat pe subrutina RSMN [4] și rulat pe minicalculatorul CORAL 4030, sînt date în tabelul 5 (valori inițiale: $x_1 = 0{,}80$; $x_2 = 0{,}00$), pentru diferite valori ale factorului de încărcare pa^4/hD.

Tabelul 4

Coeficienții sistem. (21)	$k = a/b \leqslant 1$				
	1,00	0,75	0,50	0,25	0,00
a_{30}	1	1	1	1	1
b_{30}	−1	−1	−1	−1	0
a_{21}	3,89293	3,87392	3,83111	3,82171	3,85453
b_{21}	11,75382	12,81662	18,64688	52,56006	69,64790
a_{12}	3,29016	2,55188	0,69379	−0,80495	−1,20517
b_{12}	0	0	0	0	0
a_{03}	−0,8	−0,67621	−0,36149	−0,09271	0
b_{03}	3,77495	3,74688	3,61788	3,27015	0
a_{20}	0	0	0	0	0
b_{20}	0	0	0	0	0
a_{11}	0	0	0	0	0
b_{11}	0	0	0	0	0
a_{02}	0	0	0	0	0
b_{02}	0	0	0	0	0
a_{10}	5,33334	5,08332	4,44340	3,87765	3,65714
b_{10}	0	0	0	0	0
a_0	0	0	0	0	0
b_{01}	128,85179	144,21351	227,68565	700,24867	947,48202
a_{00}	−0,00684	−0,01028	−0,01237	−0,01269	−0,01251
b_{00}	−0,01033	−0,01823	−0,03961	−0,14323	−0,20264

În tabelul 6 au fost trecute, comparativ, valorile săgeții relative în centrul plăcii ($x = a/2$, $y = b/2$), corespunzătoare aproximațiilor I [soluția (16) a ecuației (15)] și II, iar în cazul plăcii pătrate ($k = 1$) și cele date de teoria liniară, obținute din ecuația (15) neglijînd termenul $(w_1/h)^3$ (deplasări mici în comparație cu grosimea) sau din prima ecuație a sistemului (21), în care se neglijează termenii neliniari

$$\frac{w_1}{h} = -\frac{2s}{3q} = -\frac{a_{00}}{a_{10}} \cdot \frac{pa^4}{hD} = 0{,}00128\,\frac{pa^4}{hD}, \tag{22}$$

Tabelul 5

Soluţiile sistemului de ecuaţii (21): $x_1 = \frac{w_1}{h}$; $x_2 = \frac{w_2}{h}$

Nr. crt.	$\frac{pa^4}{hD}$	$k = \frac{a}{b} \leqslant 1$									
		1,00		0,75		0,50		0,25		0,00	
		x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
2	1	0,00128	0,00008	0,00202	0,00012	0,00278	0,00017	0,00327	0,00020	0,00342	0,00021
3	5	0,00641	0,00040	0,01011	0,00063	0,01391	0,00086	0,01636	0,00102	0,01710	0,00106
4	10	0,01282	0,00080	0,02022	0,00126	0,02783	0,00173	0,03271	0,00204	0,03419	0,00213
5	15	0,01923	0,00120	0,03032	0,00189	0,04173	0,00260	0,04905	0,00306	0,05126	0,00320
6	25	0,03205	0,00200	0,05052	0,00316	0,06950	0,00434	0,08164	0,00511	0,08530	0,00534
7	50	0,06406	0,00400	0,10086	0,00632	0,13845	0,00869	0,16226	0,01021	0,16939	0,01067
8	75	0,09597	0,00601	0,15082	0,00948	0,20633	0,01304	0,24097	0,01529	0,25118	0,01596
9	100	0,12775	0,00802	0,20024	0,01265	0,27270	0,01738	0,31705	0,02034	0,32987	0,02121
10	150	0,19073	0,01203	0,29687	0,01899	0,39960	0,02603	0,45962	0,03033	0,47619	0,03155
11	200	0,25268	0,01606	0,38975	0,02534	0,51749	0,03464	0,58846	0,04015	0,60711	0,04164
12	250	0,31333	0,02010	0,47828	0,03171	0,62600	0,04318	0,70415	0,041978	0,72373	0,05148
13	300	0,37247	0,02414	0,56216	0,03808	0,72550	0,05164	0,80814	0,05921	0,82792	0,06108
14	400	0,48565	0,03226	0,71596	0,05079	0,90072	0,06825	0,98747	0,07751	1,00653	0,07961
15	500	0,59153	0,04039	0,85248	0,06339	1,05002	0,08443	1,13754	0,09512	0,15531	0,09738
16	600	0,69003	0,04854	0,97401	0,07584	1,17933	0,10016	1,26620	0,11212		
17	700	0,78147	0,05666	1,08292	0,08809						
18	800	0,86638	0,06474	1,18128	0,10011						
19	1000	1,01894	0,08071								
20	1100	1,08775	0,08859								
21	1200	1,15226	0,09637								
22	1300	1,21294	0,10407								

Tabelul 6

Variația săgeții relative $\frac{w}{h}$ în centrul plăcii încastrate fix pe contur.

Nr. crt.	$\frac{pa^4}{hD}$	$k = \frac{a}{b} \leqslant 1$											
		1,00			0,75		0,50		0,25		0,00		
		Def. mici	Def. mari										
			Aprox. I	Aprox. a II-a	Aprox. I	Aprox. a II-a	Aprox. I	Aprox. a II-a	Aprox. I	Aprox. a II-a	Aprox. I	Aprox. a II-a	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
1	0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	
2	1	0,00128	0,00128	0,00128	0,00202	0,00202	0,00278	0,00278	0,00327	0,00327	0,00341	0,00342	
3	5	0,00641	0,00641	0,00641	0,01011	0,01011	0,01392	0,01391	0,01636	0,01636	0,01711	0,01710	
4	10	0,01283	0,01282	0,01282	0,02022	0,02022	0,02783	0,02783	0,03272	0,03271	0,03421	0,03419	
5	15	0,01925	0,01924	0,01923	0,03034	0,03032	0,04174	0,04173	0,04908	0,04905	0,05130	0,05126	
6	25	0,03208	0,03206	0,03205	0,05055	0,05052	0,06950	0,06950	0,08170	0,08164	0,08539	0,08530	
7	50	0,06417	0,06409	0,06406	0,10088	0,10086	0,13847	0,13845	0,16252	0,16226	0,16980	0,16939	
8	75	0,09626	0,09600	0,09597	0,15080	0,15082	0,20637	0,20633	0,24167	0,24097	0,25231	0,25118	
9	100	0,12834	0,12775	0,12775	0,20010	0,20024	0,27276	0,27270	0,31849	0,31705	0,33225	0,32987	
10	150	0,19252	0,19057	0,19073	0,29623	0,29687	0,39979	0,39960	0,46360	0,45962	0,48267	0,47619	
11	200	0,25669	0,25218	0,25268	0,38826	0,38975	0,51802	0,51749	0,59625	0,58846	0,61954	0,60711	
12	250	0,32087	0,31229	0,31333	0,47565	0,47828	0,62714	0,62600	0,71676	0,70415	0,74339	0,72373	
13	300	0,38504	0,37070	0,37247	0,55819	0,56216	0,72763	0,72550	0,82628	0,80814	0,85560	0,82792	
14	400	0,51339	0,48189	0,48565	0,70919	0,71596	0,90592	0,90072	1,01800	0,98747	1,05139	1,00653	
15	500	0,64174	0,58529	0,59153	0,84327	0,85248	1,05961	1,05002	1,18129	1,13754	1,21773	1,15531	
16	600	0,77009	0,68114	0,69003	0,96309	0,97401	1,19436	1,17933	1,32350	1,26620			
17	700	0,89844	0,76996	0,78147	1,07113	1,08292							
18	800	1,02679	0,85244	0,86638	1,16942	1,18128							
19	1000	1,28349	1,00108	1,01894									
20	1100	1,41184	1,06848	1,08775									
21	1200	1,54018	1,31395	1,15226									
22	1300	1,66853	1,19192	1,21294									

mai mare cu 1,58% decît valoarea $\frac{w_1}{h} = 0{,}00126\frac{pa^4}{hD}$ calculată mai riguros în [5].

Se constată că dacă $w/h \leqslant 1/5$, rămîne valabilă ipoteza deformațiilor mici, teoria liniară și neliniară conducînd la aceleași rezultate. Dincolo de această limită, acceptarea teoriei liniare determină o subevaluare a rigidității plăcii ca urmare a neglijării extinderii suprafeței mediane. Față de aproximația I, aproximația a II-a conferă o precizie mai mare în calculul neliniar, concretizată în următoarele diferențe care variază, în cadrul aceluiași raport k între laturile plăcii, cu pa^4/hD, după cum urmează:

$k = 1{,}00$; $0{,}20\% \div 1{,}76\%$,

$k = 0{,}75$; $0{,}22\% \div 1{,}01\ \%$,

$k = 0{,}50$; $-0{,}02\% \div -1{,}26\%$;

$k = 0{,}25$; $-0{,}45\% \div -4{,}33\%$,

$k = 0{,}00$; $-0{,}44\% \div -5{,}12\%$,

de unde se deduce că aproximația I este suficientă deocamdată pentru determinarea săgeților plăcii cu deformații mari. Sporul de rigiditate apare evident în cazul deformațiilor mari, deplasările rezultînd mai mici; de exemplu, dacă $pa^4/hD = 1000$ și $k = 1$, se obține o creștere a rigidității plăcii cu 20,61%. În tabelele 5 și 6 este delimitat domeniul deformațiilor mari de cel al deformațiilor mici, iar în figura 2 s-au reprezentat grafic variațiile săgeții relative w/h în centrul plăcii cu factorul de încărcare pa^4/hD, în funcție de raportul între laturile plăcii, $k = a/b$, trasîndu-se și dreapta corespunzătoare deformațiilor mici (22) în cazul plăcii pătrate (pentru $pa^4/hD \leqslant 150$, curba și dreapta coincid).

În punctele rețelei sfertului plăcii pătrate ($a = b$) încastrate fix pe contur din figura 3, s-au calculat, în tabelul 7, momentele de încovoiere și torsiune (6) în cele două aproximații, comparativ cu valorile obținute pe baza teoriei deformațiilor mici, în cazul factorului de încărcare $pa^4/hD = 1000$. Rezultă o neconcordanță de valori oferite de aproximația a doua față de prima, în anumite puncte ale plăcii, pentru ca în altele diferențele să fie acceptabile din punct de vedere ingineresc. Diminuarea efectului de încovoiere, raportată la calculul în cea de a doua aproximație, se evidențiază astfel: în centrul plăcii (punctul 14) unde $M_x = M_y$, dar și pe reazem (punctul 10 sau 10'), pentru $M_x(M_y)$ și, respectiv $M_y(M_x)$, cu 20,61%, adică în aceeași proporție cu creșterea rigidității.

Calitativ și cantitativ diferit se prezintă valorile eforturilor de membrană (4), determinate în baza celor două aproximații, trecute în tabelul 8 corespunzător punctelor aceleiași rețele (fig. 3) a plăcii pătrate avînd factorul de încărcare $\frac{pa^4}{hD} = 1000$. De exemplu, în centrul plăcii $\left(x = y = \frac{a}{2}\right)$, aproximația I conduce la eforturi $N_x = N_y = -2{,}71701\ \frac{D}{a^2}$, de compresiune, în timp ce aproximația a II-a conduce la eforturi de în-

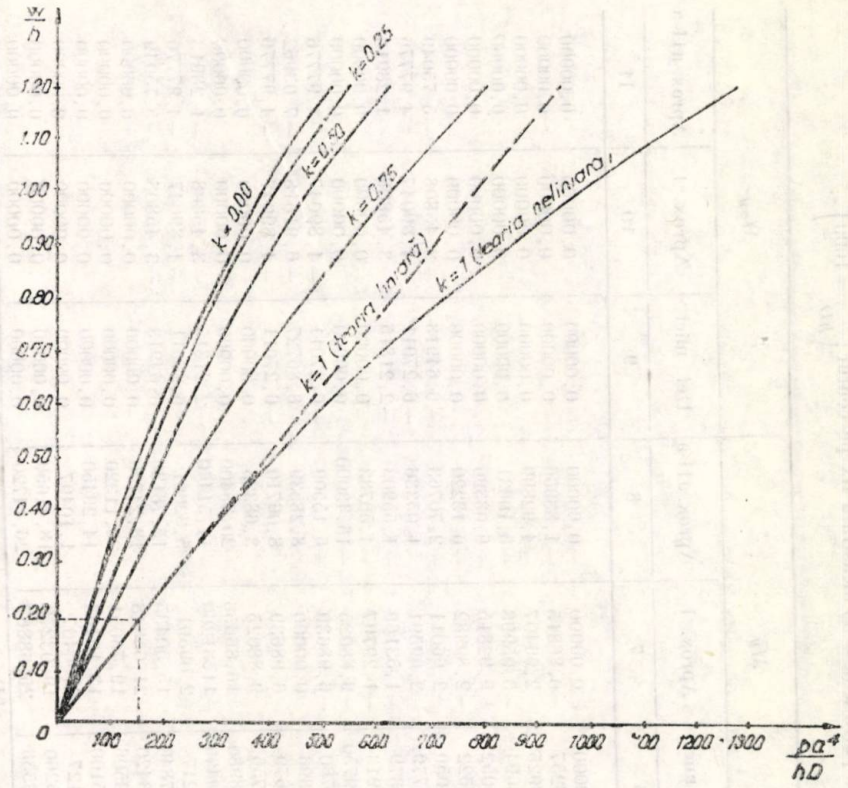


Fig. 2. — Variațiile lui w/h în centrul plăcii încastrate fix pe contur.

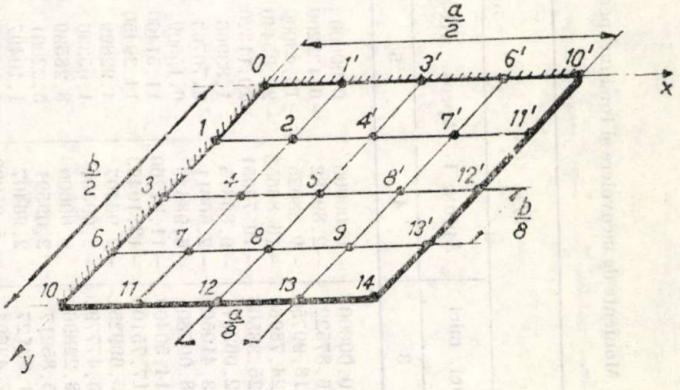


Fig. 3. — Rețeaua de puncte a sfertului de placă.

tindere, $N_x = N_y = 0{,}61423 \dfrac{D}{a^2}$. Pe contur, în aproximația I, N_x și N_y sînt pozitive, iar în aproximația a II-a negative, fapt care poate determina instabilitatea marginilor plăcii sub acțiunea unei anumite încărcări transversale p, *critice*. Aproximația I se dovedește a fi, deci, insuficientă

Tabelul 7

Momente de încovoiere și torsiune pentru placa pătrată ($k = 1$) încastrată fix pe contur $\left(\frac{pa^4}{hD} = 1000\right)$.

Nr crt.	Punct	M_x			M_y			M_{xy}		
		Def. mici	Aprox. I	Aprox. aII-a	Def. mici	Aprox. I	Aprox. aII-a	Def. mici	Aprox. I	Aprox. aII-a
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
2	1	−6,87522	−2,89382	−6,132200	−2,06257	−0,86815	−1,83966	0,00000	0,00000	0,00000
3	3	−18,99750	−9,88025	−16,43000	−5,69925	−2,96407	−4,92899	0,00000	0,00000	0,00000
4	6	−24,78980	−16,86658	−20,35440	−7,43694	−5,05998	−6,10631	0,00000	0,00000	0,00000
5	10	−25,33506	−19,76051	−20,11320	−7,60052	−5,92815	−6,03396	0,00000	0,00000	0,00000
6	1′	−2,06257	−0,86815	−1,83966	−6,87522	−2,89382	−6,13220	0,00000	0,00000	0,00000
7	2	−3,41059	−2,66011	−2,70763	−3,41059	−2,66011	−2,70763	−6,64913	−3,45808	−5,75049
8	4	−8,00780	−6,98639	−6,15509	0,47779	−2,09591	1,05336	−6,27011	−4,89047	−4,97776
9	7	−14,50400	−11,31260	−11,51460	−1,96379	−1,53169	−1,55903	−2,21815	−3,45808	−1,28913
10	11	−17,75100	−13,10463	−14,29450	−4,82913	−1,29797	−4,50783	0,00000	0,00000	0,00000
11	3′	−5,69925	−2,96407	−4,92899	−18,99750	−9,88025	−16,43000	0,00000	0,00000	0,00000
12	4′	0,477791	−2,09591	1,05336	−8,00780	−6,98639	−6,15509	−6,27011	−4,89047	−4,97776
13	5	8,22896	0,00000	8,28539	8,22896	0,00000	8,28539	−8,86727	−6,91618	−7,03962
14	8	5,85217	2,09591	5,32001	9,90679	6,98639	8,06710	−6,27011	−4,89047	−4,97776
15	12	1,90127	2,96407	1,10497	6,33756	9,88025	3,68323	0,00000	0,00000	0,00000
16	6′	−7,43694	− 5,05998	−6,10631	−24,78980	−16,86658	−20,35400	0,00000	0,00000	0,00000
	7′	−1,96379	−1,53169	−1,55903	−14,50400	−11,31260	−11,51460	−2,21815	−3,45808	−1,28913
		9,90679	6,98639	8,06710	5,85217	2,09591	5,32001	−6,27011	−4,89047	−4,97776
17		19,87840	15,50435	15,78120	19,87840	15,50435	15,78120	−6,64913	−3,45808	−5,75049
18	8	45260	19,03279	18,41650	23,83420	21,05848	18,24770	0,00000	0,00000	0,00000
19	9		−5,92815	−6,03396	−25,33506	−19,76051	−20,11320	0,00000	0,00000	0,00000
20	13	23,-	−1,29797	−4,50783	−17,75100	−13,10463	−14,29450	0,00000	0,00000	0,00000
21	10′	−7,60052	08025	3,68323	1,90127	2,96407	1,10497	0,00000	0,00000	0,00000
22	11′	−4,82913	'S	18,24770	23,45260	19,03279	18,41650	0,00000	0,00000	0,00000
23	12′	6,33756	9,0-	26,14720	32,93558	25,68867	26,14720	0,00000	0,00000	0,00000
24	13′	23,83420	21,0584-							
25	14	32,93558	25,68867							

Multiplicator $\frac{hD}{a^2}$

Tabelul 8

Eforturi de membrană în cazul plăcii pătrate (k = 1) încastrate fix pe contur $\left(\frac{pa^4}{hD}=1000\right)$.

Nr. crt.	Punct	N_x		N_y		N_{xy}	
		Aproximația I	Aproximația a II-a	Aproximația I	Aproximația a II-a	Aproximația I	Aproximația a II-a
1	0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
2	1	0,79981	−0,18081	0,23993	−0,05424	0,25861	−0,05846
3	3	1,47785	−0,33410	0,44335	−0,10023	0,36574	−0,08268
4	6	4,93091	−0,43652	0,57926	−0,13095	0,25861	−0,05846
5	10	2,09001	−0,47248	0,62700	−0,14174	0,00000	0,00000
6	1′	0,23993	−0,05424	0,79981	−0,18081	0,25861	−0,05846
7	2	1,39284	2,50383	1,56249	2,50383	0,92332	1,32968
8	4	8,84502	16,27610	3,81172	6,08276	2,67167	3,10923
9	7	23,00482	28,40260	6,96589	8,67025	2,93426	0,63868
10	11	30,91070	30,46160	8,54537	9,30302	0,00000	0,00000
11	3′	0,44335	−0,10023	1,47785	−0,33410	0,36574	−0,08268
12	4′	3,81172	6,08276	8,84502	16,27610	2,67167	3,10923
13	5	19,28731	19,98190	19,28731	19,98190	10,90271	10,64260
14	8	45,14837	45,56660	19,34411	16,01500	12,85920	7,09464
15	12	58,90221	61,58310	16,32580	18,77900	0,00000	0,00000
16	6′	0,57926	−0,13095	1,93091	−0,43652	0,25861	−0,05846
17	7′	6,96589	8,67025	23,00482	28,40260	2,93426	0,63868
18	8′	19,34411	16,01500	45,14837	45,56660	12,85920	7,09464
19	9	26,32869	22,37550	26,32869	22,37550	15,33067	11,78760
20	13	27,61564	31,20650	6,52754	9,75918	0,00000	0,00000
21	10′	0,62700	−0,14174	2,09001	−0,47248	0,00000	0,00000
22	11′	8,54537	9,30302	30,91070	30,46160	0,00000	0,00000
23	12′	16,32580	18,77900	58,90221	61,58310	0,00000	0,00000
24	13′	6,52754	9,75918	27,61564	31,20650	0,00000	0,00000
25	14	−2,71701	0,61423	−2,71701	0,61423	0,00000	0,00000
Multiplicator		$\frac{D}{a^2}$					

pentru stabilirea stării de membrană. În figura 4 sînt prezentate diagramele de variație ale eforturilor de membrană pentru un sfert al plăcii pătrate încastrate fix pe contur, în cazul $pa^4/hD = 1000$.

b) PLACA ÎNCASTRATĂ MOBIL PE CONTUR

Un asemenea mod de rezemare se realizează considerînd că placa pe contur este prinsă între două reazeme rigide orizontale, între placă și unul dintre aceste reazeme fiind dispusă o garnitură, astfel că marginile plăcii se pot deplasa liber.

În prima aproximație, funcția eforturilor $F(x, y)$, îndeplinind condițiile la limită

$$x = 0,\ a;\quad N_x = h\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0,$$

$$y = 0,\ b;\quad N_y = h\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0, \tag{23}$$

se consideră sub forma

$$F(x, y) = C f_5(x, y) = C \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}, \tag{24}$$

iar săgeata plăcii $w(x, y)$ este dată de a treia expresie din (9).

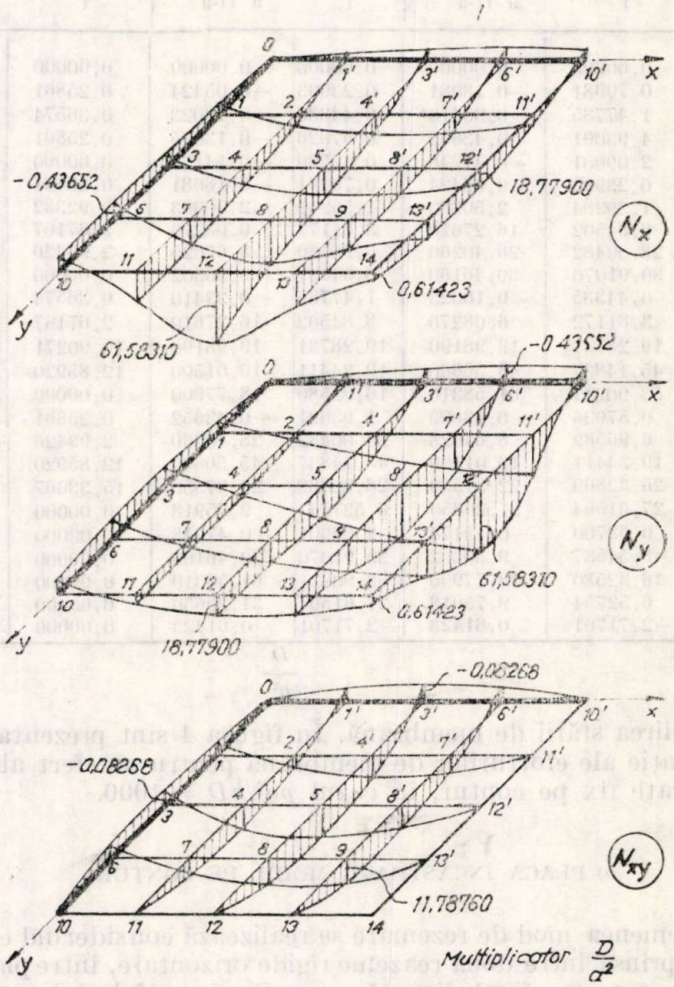


Fig. 4. — Diagramele de variație ale eforturilor de membrană corespunzătoare sfertului de placă pătrată ($k = 1$) încastrată fix pe contur ($pa^4/hD = 1000$).

Constantele C și w_1 se determină astfel încît să fie verificat aproximativ grupul de ecuații (2), ceea ce implică satisfacerea condițiilor variaționale în metoda Bubnov-Galerkin,

$$\int_0^a \int_0^b \left\{\nabla^4 F - E\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]\right\} f_5(x, y)\, dx\, dy = 0,$$

$$\int_0^a \int_0^b \left[\nabla^4 w - \frac{Q(F, w)}{D} \right] f_3(x, y)\, dx\, dy = 0. \tag{25}$$

Efectuînd calculele ($\mu = 0{,}3$) în prima relație, se obține

$$C = -0{,}57640 \frac{k^2}{(1+k^2)^2} E w_1^2, \tag{26}$$

mai departe găsindu-se expresiile eforturilor de membrană (5)

$$\begin{aligned} N_x &= 62{,}12213 \frac{k^4}{(1+k^2)^2} \left(\frac{w_1}{h}\right)^2 \frac{D}{a^2} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}, \\ N_y &= 62{,}12213 \frac{k^2}{(1+k^2)^2} \left(\frac{w_1}{h}\right)^2 \frac{D}{a^2} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}, \\ N_{xy} &= 62{,}12213 \frac{k^3}{(1+k^2)^2} \left(\frac{w_1}{h}\right)^2 \frac{D}{a^2} \cos\frac{\pi x}{a} \cos\frac{\pi y}{b}, \end{aligned} \tag{27}$$

din cea de a doua rezultînd, dacă se înlocuiesc eforturile de membrană prin relațiile stabilite, tot o ecuație algebrică de tipul (15), dar avînd acum coeficienții ($k \neq 0$),

$$\begin{aligned} q &= 0{,}04593 \frac{1}{k^4} (1+k^2)^2 (3 + 2k^2 + 3k^4), \\ s &= -0{,}000707 \frac{1}{k^4} (1+k^2)^2 \frac{pa^4}{hD}, \end{aligned} \tag{28}$$

ale căror valori au fost calculate în tabelul 9 funcție de k.

Tabelul 9

Coeficienții ecuației (15)

$k = a/b$	1,00	0,75	0,50	0,25	Multiplicator
q	1,46976	1,79829	4,23417	41,63608	1
s	−0,00282	−0,00545	−0,01767	−0,20432	pa^4/hD

Cum realizantul $\Delta = q^3 + s^2 > 0$ și în acest caz, rădăcina reală este dată de relația (16).

În a doua aproximație se reține pentru $F(x, y)$ expresia (24), iar pentru săgeata $w(x, y)$ a plăcii se va lua funcția (17). Astfel, din prima ecuație (25) se găsește o nouă constantă C,

$$C = (-0{,}57640 w_1^2 + 0{,}52699 w_1 w_2 - 1{,}40533 w_2^2) \frac{k^2}{(1+k^2)^2} E, \tag{29}$$

și, în consecință, din (5) vor rezulta eforturile de membrană corespunzătoare

$$N_x = 107{,}77608 \frac{k^4}{(1+k^2)^2} \cdot f(x_1, x_2) \frac{D}{a^2} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b},$$

$$N_y = 107{,}77608 \frac{k^2}{(1+k^2)^2} \cdot f(x_1, x_2) \frac{D}{a^2} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}, \tag{30}$$

$$N_{xy} = 107{,}77608 \frac{k^3}{(1+k^2)^2} \cdot f(x_1, x_2) \frac{D}{a^2} \cos\frac{\pi x}{a} \cos\frac{\pi y}{b},$$

unde

$$f(x_1, x_2) = 0{,}57640 \; x_1^2 - 0{,}52699 \; x_1 x_2 + 1{,}40533 \; x_2^2, \tag{31}$$

cu aceleași notații :

$$x_1 = \frac{w_1}{h} \quad \text{și} \quad x_2 = \frac{w_2}{h}.$$

Pentru ca $w(x, y)$ din (17) să satisfacă a doua ecuație (2), va trebui să avem simultan

$$\int_0^a \int_0^b \left[\nabla^4 w - \frac{Q(F, w)}{D}\right] f_3(x, y)\,dx\,dy = 0,$$

$$\int_0^a \int_0^b \left[\nabla^4 w - \frac{Q(F, w)}{D}\right] f_4(x, y)\,dx\,dy = 0, \tag{32}$$

condiții care, ținînd seama de (30), conduc, după efectuarea calculelor, la sistemul de ecuații algebrice neliniare, de gradul trei, în x_1 și x_2 ($k \neq 0$) :

$$g_1(x_1, x_2) = x_1^3 - 1{,}37142 \; x_1^2 x_2 + 2{,}85607 \; x_1 x_2^2 - 1{,}11456 \; x_2^3 + \\ + 0{,}13781 \; (3 + 2k^2 + 3k^4) \frac{(1+k^2)^2}{k^4} x_1 - \\ - 0{,}00141 \frac{(1+k^2)^2}{k^4} \cdot \frac{pa^4}{hD} = 0,$$

$$g_2(x_1, x_2) = -x_1^3 + 6{,}24760 \; x_1^2 x_2 - 7{,}31426 \; x_1 x_2^2 + 13{,}00327 \; x_2^3 + \\ + 4{,}82351 \; (3 + 2k^2 + 3k^4) \frac{(1+k^2)^2}{k^4} x_2 - \\ - 0{,}00309 \frac{(1+k^2)^2}{k^4} \cdot \frac{pa^4}{hD} = 0, \tag{33}$$

Tabelul 10

Soluțiile sistemului de ecuații (33):

$$x_1 = \frac{w_1}{h}; \quad x_2 = \frac{w_2}{h}.$$

Nr. crt.	$\frac{pa^4}{hD}$	$k = a/b \leqslant 1$; $k \neq 0$							
		1,00		0,75		0,50		0,25	
		x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2
1	0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
2	1	0,00127	0,00008	0,00201	0,00012	0,00277	0,00017	0,00326	0,00020
3	5	0,00639	0,00040	0,01008	0,00063	0,01387	0,00086	0,16030	0,00102
4	10	0,01278	0,00080	0,02016	0,00126	0,02774	0,00173	0,03261	0,00204
5	15	0,01918	0,00120	0,03024	0,00189	0,04161	0,00260	0,04892	0,00306
6	25	0,03196	0,00200	0,05039	0,00315	0,06934	0,00434	0,08154	0,00510
7	50	0,06389	0,00400	0,10064	0,00631	0,13853	0,00869	0,16306	0,01021
8	75	0,09573	0,00600	0,15064	0,00948	0,20744	0,01304	0,24453	0,01532
9	100	0,12745	0,00801	0,20026	0,01265	0,27593	0,01740	0,32592	0,02042
10	150	0,19039	0,01204	0,29793	0,01902	0,41114	0,02615	0,48841	0,03065
11	200	0,25241	0,01608	0,39291	0,02544	0,54327	0,03497	0,65033	0,04088
12	250	0,31329	0,02014	0,48466	0,03193	0,67166	0,04385	0,81150	0,05113
13	300	0,37283	0,02423	0,57286	0,03847	0,79584	0,05281	0,97176	0,06140
14	400	0,48739	0,03248	0,73817	0,05175	1,03068	0,07096	1,28890	0,08200
15	500	0,59546	0,04086	0,88911	0,06526	1,24738	0,08941		
16	600	0,69697	0,04934	1,02699	0,07893				
17	700	0,79216	0,05791	1,15340	0,09273				
18	800	0,88147	0,06656	1,26991	0,10662				
19	1000	1,04445	0,08404						
20	1100	1,11912	0,09284						
21	1200	1,18982	0,10167						
22	1300	1,25697	0,11051						

Tabelul 11

Variația săgeții relative $\frac{w}{h}$ în centrul plăcii încastrate mobil pe contur.

$k = \frac{a}{b} \leqslant 1 \; ; \; k \neq 0$

Nr. crt.	$\frac{pa^4}{hD}$	1,00			0,75		0,50		0,25	
		Def. mici	Deformații mari		Aproximația		Aproximația		Aproximația	
			Aprox. I	Aprox. aII-a	I	aII-a	I	a II-a	I	a II-a
1	0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
2	1	0,00127	0,00127	0,00127	0,00201	0,00201	0,00278	0,00277	0,00327	0,00326
3	5	0,00639	0,00638	0,00639	0,01009	0,01008	0,01391	0,01387	0,01636	0,01630
4	10	0,01279	0,01278	0,01278	0,02020	0,02016	0,02782	0,02774	0,03271	0,03261
5	15	0,01918	0,01917	0,01918	0,03029	0,03024	0,04173	0,04161	0,04907	0,04892
6	25	0,03197	0,03196	0,03196	0,05048	0,05039	0,06952	0,06934	0,08178	0,08154
7	50	0,06395	0,06389	0,06389	0,10082	0,10064	0,13889	0,13853	0,16354	0,16306
8	75	0,09593	0,09572	0,09573	0,15089	0,15064	0,20795	0,20744	0,24525	0,24453
9	100	0,12791	0,12744	0,12745	0,20054	0,20026	0,27655	0,27593	0,32687	0,32592
10	150	0,19186	0,19029	0,19039	0,29815	0,29793	0,41182	0,41114	0,48979	0,48841
11	200	0,25582	0,25217	0,25241	0,39284	0,39291	0,54377	0,54327	0,65208	0,65033
12	250	0,31978	0,31283	0,31329	0,48407	0,48466	0,67168	0,67166	0,81357	0,81150
13	300	0,38373	0,37205	0,37283	0,57152	0,57286	0,79507	0,79584	0,97406	0,97176
14	400	0,51164	0,48566	0,48739	0,73467	0,73817	1,02746	1,03068	1,29137	1,28890
15	500	0,63956	0,59240	0,59546	0,88272	0,88911	1,24071	1,24738		
16	600	0,76734	0,69224	0,69697	1,01718	1,02699				
17	700	0,89523	0,78547	0,79216	1,13981	1,15340				
18	800	1,02312	0,87260	0,88147	1,25230	1,26991				
19	1000	1,27912	1,03075	1,04445						
20	1100	1,40679	1,10283	1,11912						
21	1200	1,53468	1,17088	1,18982						
22	1300	1,66257	1,23532	1,25697						

ale cărui soluții, înscrise în tabelul 10 pentru diferite rapoarte k și valori ale factorului de încărcare pa^4/hD, s-au determinat cu ajutorul aceleiași subrutine — RSMN [4].

Tabelul 11 conține variația săgeților relative în centrul plăcii încastrate mobil pe contur, în aproximația I [soluțiile (16) ale ecuației (15), avînd coeficienții (28)] și II, pentru placa pătrată trecîndu-se și valorile date de teoria deformațiilor mici, aproximativ aceleași cu cele obținute din relația (22) — $\frac{w_1}{h} = 0{,}001279\ \frac{pa^4}{hD}$, în teoria liniară rezemarea încastrată realizînd același tip de legătură din punct de vedere mecanic. Prin linie groasă, în tabelele 10 și 11 a fost delimitat din nou domeniul deformațiilor mici de cel al deformațiilor mari.

Se evidențiază și în acest caz faptul că teoria liniară este acceptabilă numai dacă $w/h \leqslant 1/5$; diferențele dintre rezultatele oferite de aproximația I și a II-a, în domeniul deformațiilor mari, sînt mult mai mici, ele scăzînd cu micșorarea raportului $k = \frac{a}{b}$, în funcție de $\frac{pa^4}{hD}$:

$$k = 1{,}00; \quad 0{,}095\% \div 1{,}75\%,$$

$$k = 0{,}75; \quad - \ 0{,}073\% \div 1{,}40\%,$$

$$k = 0{,}50; \quad - \ 0{,}22\ \% \div 0{,}53\%,$$

$$k = 0{,}25; \quad - \ 0{,}29\ \% \div -0{,}19\%,$$

constatîndu-se suficiența aproximației I pentru calculul săgeții în centrul plăcii încastrate mobil pe contur. Creșterea rigidității plăcii acum, în raport cu teoria deformațiilor mici, este mai mică; dacă $pa^4/hD = 1000$ și $k = 1$, de numai 18,34%. Rezultatele din tabelul 11 au fost reprezentate grafic în figura 5, unde s-a trasat și dreapta teoriei deformațiilor mici în cazul plăcii pătrate, pentru $pa^4/hD \leqslant 150$ rezultatele în cele două teorii coincizînd, iar pentru celelalte rapoarte k între laturile plăcii, valorile de graniță pa^4/hD scăzînd conform aceluiași tabel.

Introducînd succesiv expresiile (9) și (17) ale săgeții plăcii în relațiile (6), cu soluțiile din tabelul 10, sînt calculate momentele de încovoiere și torsiune pentru cazul plăcii pătrate ($k = 1$; $pa^4/hD = 1000$), în punctele rețelei din figura 3, valorile lor fiind prezentate, comparativ, în tabelul 12. Aceeași nepotrivire între rezultate se constată în anumite puncte, în altele diferențele în cele două aproximații fiind acceptabile practic. Față de primul mod de rezemare pe contur, diminuarea efectului de încovoiere, în centrul plăcii și pe reazeme, este de 18,34%.

Diferențe acceptabile, sub aspect calitativ și cantitativ, privind eforturile de membrană N_x, N_y și N_{xy} se înregistrează din tabelul 13, unde valorile lor au fost calculate, în aproximația I, cu relațiile (27), iar în aproximația a II-a, cu relațiile (30), pentru aceeași rețea (fig. 3) a plăcii pătrate ($k = 1$; $pa^4/hD = 1000$) încastrate mobil pe contur, apoi reprezentate grafic în figura 6. Luînd ca referință aproximația a II-a, unde valorile sînt mai mici, diferența între rezultate este de 3,25%, în toate punctele plăcii.

Rezultă de aici suficiența aproximației I pentru calculul săgeții plăcii și al eforturilor de membrană, insuficientă fiind însă la determinarea

momentelor de încovoiere și torsiune în unele puncte. De exemplu, în punctul 3 rezultatele diferă cu 39,96%, iar în punctul 8, cu 60,79% (pentru M_x sau M_y în 3′ și 8′).

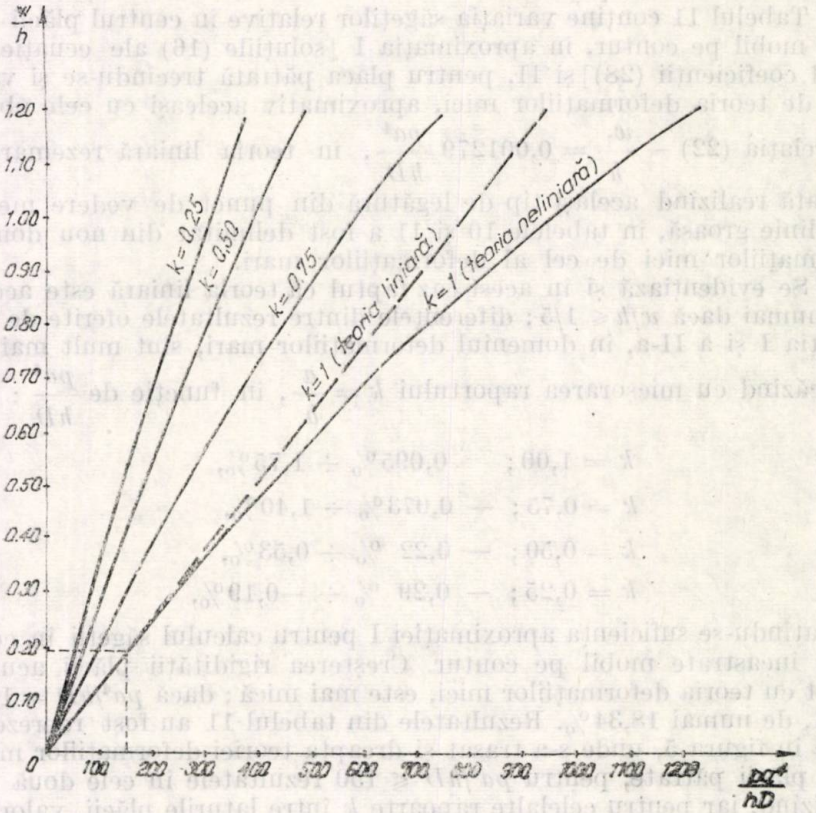


Fig. 5. — Variația lui w/h în centrul plăcii încastrate mobil pe contur.

3. CONCLUZII

Calculul neliniar al plăcilor plane acționate transversal evidențiază rezerva de rigiditate pe care o prezintă aceste plăci (fig. 7) față de teoria liniară, mai însemnată procentual în cazul încastrării fixe pe contur, datorită considerării deformațiilor din suprafața mediană și, prin urmare, a prezenței eforturilor de membrană. Diminuarea corespunzătoare a efectului de încovoiere este ilustrată în figura 8, unde sînt trasate, comparativ, diagramele M_x și M_y în punctele rețelei de pe linia 10—14. Mai departe, calculul tensiunilor normale σ se face cu relațiile cunoscute

a) în teoria liniară :

$$\sigma = \pm \frac{6M}{h^2};$$

b) în teoria neliniară : (34)

$$\sigma = \frac{N}{h} \pm \frac{6M}{h^2},$$

Tabelul 12

Momente de încovoiere și torsiune pentru placa pătrată ($k = 1$) încastrată mobil pe contur $\left(\frac{pa^4}{hD} = 1000\right)$.

Nr. crt.	Punct	M_x			M_y			M_{xy}		
		Def. mici	Aprox. I	Aprox. a II-a	Def. mici	Aprox. I	Aprox. aII-a	Def. mici	Aprox. I	Aprox. aII-a
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
2	1	−6,85809	−2,97959	−6,33727	−2,05743	−0,89388	−1,90118	0,00000	0,00000	0,00000
3	3	18,94460	−10,17309	−16,94440	−5,68338	−3,05192	−5,08332	0,00000	0,00000	0,00000
4	6	−24,70900	−17,36647	−20,91550	−7,41271	−5,20995	−6,27464	0,00000	0,00000	0,00000
5	10	−25,24510	−20,34618	−20,61670	−7,57352	−6,10385	−6,18500	0,00000	0,00000	0,00000
6	1′	−2,05743	−0,89388	−1,90118	−6,85809	−2,97959	−6,33727	0,00000	0,00000	0,00000
7	2	−3,39847	−2,73896	−2,77540	−3,39847	−2,73896	−2,77540	−6,63061	−3,56057	−5,93054
8	4	−7,97716	−7,19346	−6,29368	0,48339	−2,15803	1,13130	−6,24783	−5,03542	−5,10236
9	7	−14,45250	−11,64788	−11,80280	−1,95681	−1,57708	−1,59805	−2,20516	−3,56057	−1,28529
10	11	−17,69010	−13,49303	−14,66780	−4,81927	−1,33644	−4,67224	0,00000	0,00000	0,00000
11	3′	−5,68338	−3,05192	−5,08332	−18,94460	−10,17309	−16,94440	0,00000	0,00000	0,00000
12	4′	0,48339	−2,15803	1,13130	−7,97716	−7,19346	−6,29368	−6,24783	−5,03542	−5,10236
13	5	8,21869	0,00000	8,62688	8,21869	0,00000	8,62688	−8,83577	−7,12116	−7,21583
14	8	5,83868	2,15803	5,50476	9,87379	7,19346	8,28450	−6,24783	−5,03542	−5,10236
15	12	1,89014	3,05192	1,10168	6,30046	10,17309	3,67227	0,00000	0,00000	0,00000
16	6′	−7,41271	−5,20995	−6,27464	−24,70900	−17,36647	−20,91550	0,00000	0,00000	0,00000
17	7′	−1,95681	−1,57708	−1,59805	−14,45250	−11,64788	−11,80280	−2,20516	−3,56057	−1,28529
18	8′	9,87379	7,19346	8,28450	5,83868	2,15803	5,50476	−6,24783	−5,03542	−5,10236
19	9	19,80780	15,96387	16,17620	19,80780	15,96387	16,17620	−6,63061	−3,56057	−5,93054
20	13	23,36700	19,59688	18,86200	23,74230	21,68262	18,65280	0,00000	0,00000	0,00000
21	10′	−7,57352	−6,10385	−6,18500	−25,24510	−20,34618	−20,61670	0,00000	0,00000	0,00000
22	11′	−4,81927	−1,33644	−4,67224	−17,69010	−13,49303	−14,66780	0,00000	0,00000	0,00000
23	12′	6,30046	10,17309	3,67227	1,89014	3,05192	1,10168	0,00000	0,00000	0,00000
24	13′	23,74230	21,68262	18,65280	23,36700	19,59688	18,86200	0,00000	0,00000	0,00000
25	14	32,81860	26,45003	26,80170	32,81860	26,45003	26,80170	0,00000	0,00000	0,00000

Multiplicator $\frac{hD}{a^2}$

Tabelul 13

Eforturi de membrană în cazul plăcii pătrate ($k = 1$) încastrate mobil pe contur $\left(\frac{pa^4}{hD} = 1000\right)$.

Nr. crt.	Punct	$N_x = N_y$		N_{xy}	
		Aproximația I	Aproximația a II-a	Aproximația I	Aproximația a II-a
1	2	3	4	5	6
1	0	0,00000	0,00000	16,50034	15,96300
2	1	0,00000	0,00000	15,24432	14,74790
3	3	0,00000	0,00000	11,66750	11,28750
4	6	0,00000	0,00000	6,31440	6,10877
5	10	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
6	1′	0,00000	0,00000	15,24432	14,74790
7	2	2,41641	2,33773	14,08390	13,62530
8	4	4,46496	4,31956	10,77926	10,42830
9	7	5,83375	5,64377	5,83375	5,64377
10	11	6,31440	6,10878	0,00000	0,00000
11	3′	0,00000	0,00000	11,66750	11,28750
12	4′	4,46496	4,31956	10,77936	10,42830
13	5	8,25016	7,98150	8,25016	7,98150
14	8	10,77936	10,42830	4,46496	4,31956
15	12	11,66750	11,28750	0,00000	0,00000
16	6′	0,00000	0,00000	6,31440	6,10877
17	7′	5,83375	5,64377	5,83375	5,64377
18	8′	10,77936	10,42830	4,46496	4,31956
19	9	14,08390	13,62530	2,41641	2,33773
20	13	15,24432	14,74790	0,00000	0,00000
21	10′	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
22	11′	6,31440	6,10878	0,00000	0,00000
23	12′	11,66750	11,28750	0,00000	0,00000
24	13′	15,24432	14,74790	0,00000	0,00000
25	14	16,50034	15,96300	0,00000	0,00000
Multiplicator		$\frac{D}{a^2}$			

găsindu-se următoarele valori :

a) — în centrul plăcii (14)

$$\sigma_x = \sigma_y = \pm 197{,}4 \frac{D}{a^2 h} ;$$

— pe reazem (10)

$$\sigma_x = \mp 151{,}8 \frac{D}{a^2 h} ; \quad \sigma_y = \pm 45{,}6 \frac{D}{a^2 h} ,$$

indiferent de natura rezemării în suprafața mediană ;

b) 1. placa încastrată fix pe contur — în centrul plăcii (14)

$$\sigma_x = \sigma_y = \begin{cases} + 157{,}49 \dfrac{D}{a^2 h} \\ - 156{,}26 \dfrac{D}{a^2 h}; \end{cases}$$

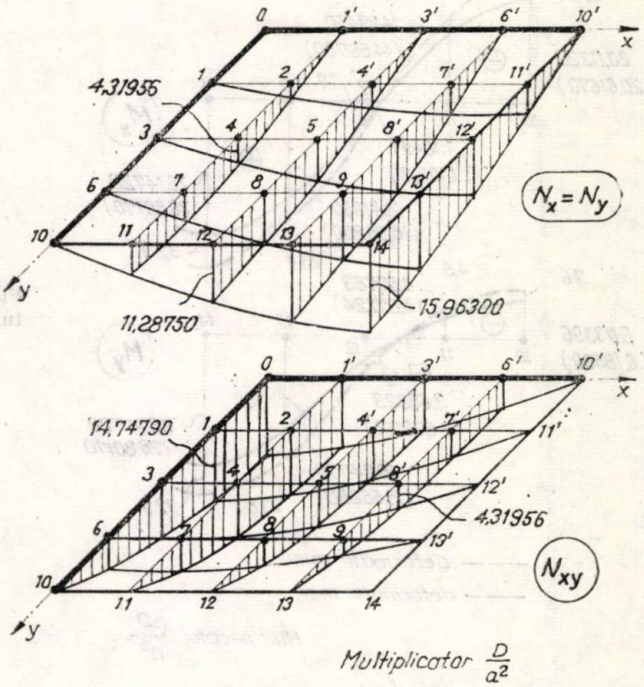


Fig. 6. — Diagramele de variație ale eforturilor de membrană corespunzătoare sfertului de placă pătrată ($k = 1$) încastrată mobil pe contur ($pa^4/hD = 1000$).

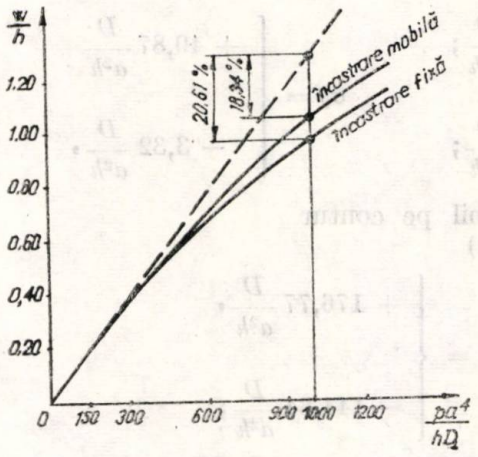


Fig. 7. — Subevaluarea rigidității plăcii în cazul deformațiilor mici ($k = 1$; $pa^4/hD = 1000$).

— pe reazem (10)

$$\sigma_x = \begin{cases} -121{,}15\,\dfrac{D}{a^2h}; \\ +120{,}20\,\dfrac{D}{a^2h}; \end{cases} \qquad \sigma_y = \begin{cases} -36{,}34\,\dfrac{D}{a^2h} \\ +36{,}06\,\dfrac{D}{a^2h}; \end{cases}$$

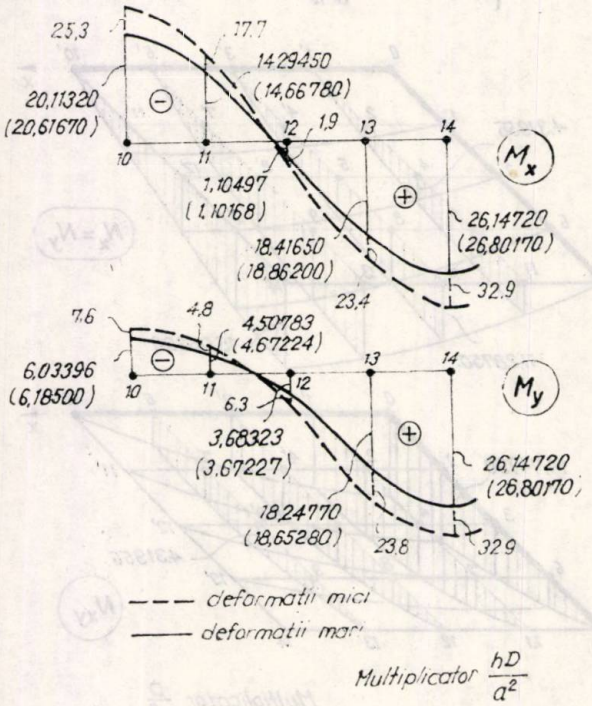


Fig. 8. — Diminuarea efectului de încovoiere ($k = 1$; $(pa^4/hD = 1000)$.

— în punctul (12), unde N_x este maxim

$$\sigma_x = \begin{cases} +68{,}21\,\dfrac{D}{a^2h}; \\ +54{,}95\,\dfrac{D}{a^2h}; \end{cases} \qquad \sigma_y = \begin{cases} +40{,}87\,\dfrac{D}{a^2h} \\ -3{,}32\,\dfrac{D}{a^2h}, \end{cases}$$

2. placa încastrată mobil pe contur
— în centrul plăcii (14)

$$\sigma_x = \sigma_y = \begin{cases} +176{,}77\,\dfrac{D}{a^2h}, \\ -144{,}84\,\dfrac{D}{a^2h}; \end{cases}$$

— pe reazem (10)

$$\sigma_x = \mp 123{,}70 \frac{D}{a^2 h}; \qquad \sigma_y = \mp 37{,}11 \frac{D}{a^2 h}.$$

Se constată astfel și o diminuare a tensiunilor normale, concomitent cu utilizarea mai rațională a materialului plăcii în raport cu teoria liniară, dată fiind extinderea zonei întinse pe grosimea h.

Primit în redacție la 27 februarie 1989

BIBLIOGRAFIE

1. I. MARȚIAN, *Plăci plane cu deformații mari de diferite contururi*, Teză de doctorat, Institutul Politehnic, Cluj-Napoca, 1986.
2. C. BIA, V. ILLE, M. V. SOARE, *Rezistența materialelor și Teoria elasticității*, Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1983.
3. S. P. TIMOSHENKO, M. J. GERE, *Theory of elastic stability*, Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York—Toronto—London, 1961.
4. G. VRACIU, A. POPA, *Metode numerice cu aplicații în tehnica de calcul*, vol. I, Edit. Scrisul Românesc, Craiova, 1982.
5. S. P. TIMOSHENKO, S. WOINOWSKY-KRIEGER, *Theory of plates and shells*, Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York — Toronto — London, 1959.

CALCULUL DISCURILOR ȘI PLĂCILOR CIRCULARE ÎNCĂRCATE AXIAL SIMETRIC PRIN METODA DE RECURENȚĂ A CELOR TREI NECUNOSCUTE

de P. CIZMAȘ

Institutul Politehnic, București

Considerînd o variație hiperbolică a grosimii discului pe rază cît și o variație hiperbolică a rigidității la încovoiere a plăcii circulare se obțin ecuațiile diferențiale de echilibru într-o formă asemănătoare. Discretizînd discurile și plăcile de grosime variabilă prin tronsoane cu variație hiperbolică s-au calculat tensiunile printr-un algoritm unic, folosind metoda de recurență a celor trei necunoscute.

1. INTRODUCERE

Calculul discurilor și plăcilor circulare de grosime variabilă prin metoda de recurență a celor trei necunoscute s-a făcut în [1], [2] prin aproximarea discului/plăcii cu tronsoane de grosime constantă. Calculul discurilor cu grosime variind hiperbolic s-a efectuat în [3] prin metoda celor două calcule.

Discretizînd discurile și plăcile prin tronsoane cu variație hiperbolică s-au obținut ecuații diferențiale de echilibru similare, permițîndu-se abordarea printr-o metodologie comună, utilizînd metoda de recurență a celor trei necunoscute.

2. ECUAȚIILE DIFERENȚIALE DE ECHILIBRU

2.1. CAZUL DISCULUI ÎN MIȘCARE DE ROTAȚIE

În cazul unui disc ce se rotește cu viteza unghiulară ω, avînd o distribuție de temperatură cunoscută pe rază (constantă pe grosimea discului la o rază dată) se obține ecuația diferențială de echilibru ([3], p. 37):

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\left(1+\frac{r}{h}\cdot\frac{dh}{dr}\right)\frac{du}{dr}-\left(1-\nu\frac{r}{h}\cdot\frac{dh}{dr}\right)\frac{u}{r^2}+\frac{1-\nu^2}{E}\rho\omega^2 r-$$

$$-(1+\nu)\left(\frac{d\theta}{dr}+\frac{\theta}{h}\frac{dh}{dr}\right)=0. \tag{1}$$

Considerînd variația hiperbolică a grosimii pe rază:

$$h=h_0 r^{-\beta}$$

și înlocuind-o în ecuația (1) se obține:

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1-\beta}{r}\frac{du}{dr}-\frac{1+\nu\beta}{r^2}u=f_1(r,\ \omega,\ \theta), \tag{3}$$

unde pentru o variaţie liniară a deformaţiei specifice datorată gradientului de temperatură :

$$\theta = \theta_1 + \lambda(r - r_1), \tag{4}$$

termenul liber este :

$$f_1(r, \omega, \theta) = \lambda(1 + \nu)(1 - \beta) - \beta(1 + \nu)\frac{\theta_1 - \lambda r_1}{r} - \frac{1 - \nu^2}{E}\rho\omega^2 r. \tag{5}$$

2.2. CAZUL PLĂCII CIRCULARE

Fie o placă circulară, încărcată axial simetric, cu o variaţie oarecare a grosimii pe rază. Scriind că elementul de placă este în echilibru sub efectul eforturilor aplicate asupra lui, se obţine ecuaţia diferenţială ([4]) :

$$D\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} + \frac{\Phi}{r}\right) + \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} + \nu\frac{\Phi}{r}\right) = -Q. \tag{6}$$

Pentru o variaţie hiperbolică a rigidităţii la încovoiere :

$$D = D_0 r^{-\beta}, \tag{7}$$

ecuaţia diferenţială de echilibru (6) devine :

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1 - \beta}{r}\cdot\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} - \frac{1 + \nu\beta}{r^2}\Phi = f_2(r, Q), \tag{8}$$

unde $f_2(r, Q) = -\dfrac{Q}{D_0 r^{-\beta}}$. (9)

2.3. SOLUŢIILE ECUAŢIILOR DE ECHILIBRU

Din relaţiile (3), (8) se observă că ecuaţiile de echilibru ale discului şi plăcii circulare diferă doar prin termenii liberi f_1 şi f_2. De aceea soluţiile ecuaţiilor omogene vor fi identice :

$$u_0 = A_u r^m + B_u r^{-n}, \tag{10a}$$

$$\Phi_0 = A_\Phi r^m + B_\Phi r^{-n}, \tag{10b}$$

unde A_u, A_Φ, B_u şi B_Φ sînt constante ce se determină din condiţiile la limită, iar

$$m = \frac{\beta}{2} + \sqrt{1 + \nu\beta + \frac{\beta^2}{4}}, \tag{11a}$$

$$n = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{1 + \nu\beta + \frac{\beta^2}{4}}. \tag{11b}$$

În cazul discului, ţinînd seama de expresia termenului liber f_1 din relaţia (5), se va căuta soluţia particulară u_p de forma :

$$u_p = c_1 r + c_2 r^2 + c_3 r^3. \tag{12}$$

Prin identificarea termenilor în r se obţin constantele c_1, c_2, c_3 astfel încît soluţia particulară este :

$$u_p = (\theta_1 - \lambda r_1) r + \frac{\lambda(1+\nu)(1-\beta)}{3-\beta(2+\nu)} r^2 - \rho \frac{\omega^2(1-\nu^2)}{E[8-\beta(3+\nu)]} r^3. \tag{13}$$

În cazul plăcii circulare încărcate simetric, ţinînd seama de definiţia forţei de forfecare :

$$2\pi r Q = F_i + \pi(r^2 - r_i^2) p_i \tag{14}$$

şi de expresia termenului liber f_2 din relaţia (9), se obţine :

$$\Phi_p = -\frac{F_i}{2\pi D_0 \beta r^{-\beta-1}(1-\nu)} - \frac{p_i}{2D_0 r^{-\beta-1}} \left[\frac{r^2}{8+\beta(3-\nu)} - \frac{r_i^2}{\beta(1-\nu)} \right]. \tag{15}$$

Relaţiile (10—15) conduc la următoarele soluţii ale ecuaţiilor de echilibru :

$$u = u_0 + u_p = A_u r^m + B_u r^{-n} + (\theta_1 - \lambda r_1) r + \frac{\lambda(1+\nu)(1-\beta)}{3-\beta(2+\nu)} r^2 - \rho \frac{\omega^2(1-\nu^2)}{E[8-\beta(3+\nu)]} r^3, \tag{16a}$$

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_p = A_\Phi r^m + B_\Phi r^{-n} - \frac{F_i}{2\pi D_0 \beta(1-\nu)} r^{\beta+1} - \frac{p_i}{2D_0} r^{\beta+1} \left[\frac{r^2}{8+\beta(3-\nu)} - \frac{r_i^2}{\beta(1-\nu)} \right], \tag{16b}$$

3. EXPRESIILE TENSIUNILOR ÎN DISC ŞI ALE MOMENTELOR ÎNCOVOIETOARE ÎN PLACA CIRCULARĂ

Avînd determinate funcţiile $u(r)$ şi $\Phi(r)$, rezultă tensiunile şi momentele încovoietoare :

— disc în rotaţie, cu variaţie de temperatură pe rază ([3], p. 54).

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} - \theta(1+\nu) \right], \tag{17a}$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} - \theta(1+\nu) \right]; \tag{17b}$$

— placă circulară (cu temperatură constantă)[5]:

$$\sigma_\theta = \frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\Phi}{r} + \nu\frac{d\Phi}{dr}\right), \tag{18a}$$

$$\sigma_r = \frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{d\Phi}{dr} + \nu\frac{\Phi}{r}\right), \tag{18b}$$

$$M_t = D\left(\frac{d\Phi}{dr} + \nu\frac{\Phi}{r}\right), \tag{18c}$$

$$M_r = D\left(\frac{\Phi}{r} + \nu\frac{d\Phi}{dr}\right). \tag{18d}$$

Înlocuind expresiile lui $u(r)$ și $\Phi(r)$ din relațiile (16a, b) în relațiile (17a, b) și (18c, d) se obțin tensiunile σ_θ, σ_r în disc și placă (tabelul 1).

Tabelul 1

Expresiile tensiunilor în disc și în placa circulară

	Disc	Placa
Parametrul variabil	$h = h_0 r^{-\beta}$	$D = D_0 r^{-\beta}$
ecuația diferențială	$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1-\beta}{r}\frac{du}{dr} - \frac{1+\nu\beta}{r^2}u = f_1(r, \omega, \theta)$	$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1-\beta}{r}\frac{d\Phi}{dr} - \frac{1+\nu\beta}{r^2}\Phi = f_2(r, Q)$
constante	$\beta = -\frac{\ln h_1/h_2}{\ln r_1/r_2}$; $h_0 = r_1^\beta h_1$	$\beta = -3\frac{\ln h_1/h_2}{\ln r_1/r_2}$; $D_0 = r_1^\beta D_1$
soluția ecuației diferențiale	$u = A_u r^m + B_u r^{-n} + u_p$	$\Phi = A_\Phi r^m + B_\Phi r^{-n} + \Phi_p$
	$m = \frac{\beta}{2} + \sqrt{1 + \nu\beta + \frac{\beta^2}{4}}$; $n = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{1 + \nu\beta + \frac{\beta^2}{4}}$	
tensiuni σ_θ	$\frac{E}{1-\nu^2}\left\{A_u[r^{m-1}(1+\nu m)] + B_u[r^{-n-1}\times(1-\nu n)] + \frac{u_p}{r} + \nu u_p' - \theta(1+\nu)\right\}$	$\frac{Ez}{1-\nu^2}\left\{A_\Phi[r^{m-1}(1+\nu m)] + B_\Phi\times[r^{-n-1}(1-\nu n)] + \frac{\Phi_p}{r} + \nu\Phi_p'\right\}$
σ_r	$\frac{E}{1-\nu^2}\left\{A_u[r^{m-1}(m+\nu)] + B_u[r^{-n-1}\times(\nu-n)] + u_p' + \nu\frac{u_p}{r} - \theta(1+\nu)\right\}$	$\frac{Ez}{1-\nu^2}\left\{A_\Phi[r^{m-1}(m+\nu)] + B_\Phi\times[r^{-n-1}(\nu-n)] + \Phi_p' + \nu\frac{\Phi_p}{r}\right\}$

În cazul plăcii este mai comod ca în programul de calcul să se lucreze cu expresiile momentelor M_t, M_r:

$$M_t = D\left\{A_\Phi[r^{m-1}(m+\nu)] + B_\Phi[r^{-n-1}(\nu-n)] + \Phi_p' + \nu\frac{\Phi_p}{r}\right\}, \tag{19a}$$

$$M_r = D\left\{A_\Phi[r^{m-1}(1+m\nu)] + B_\Phi[r^{-n-1}(1-n\nu)] + \frac{\Phi_p}{r} + \nu\Phi_p'\right\}. \tag{19b}$$

4. METODA DE RECURENȚĂ A CELOR TREI NECUNOSCUTE

Fie un disc în mișcare de rotație, solicitat de sarcini laterale, axial-simetrice. Determinarea stării de tensiune se poate face prin suprapunerea efectelor rotației și ale sarcinii laterale, calculînd deci un disc și o placă circulară.

Împărțind discul în n tronsoane trebuie determinate pe rînd cele $2n$ necunoscute A_{ui}, B_{ui} și $A_{\Phi i}$, $B_{\Phi i}$, folosind metodologii diferite, specifice discului și plăcii.

Metoda de recurență a celor trei necunoscute permite determinarea constantelor A_{ui}, B_{ui} și $A_{\Phi i}$, $B_{\Phi i}$ printr-o metodă unică.

Ținînd seama de asemănarea între expresiile tensiunilor în disc și placă se obține un algoritm unitar și eficient, concretizat într-un program de calcul rapid și compact.

Pentru stabilirea relației de recurență a celor trei necunoscute se presupune că din integrarea unei ecuații diferențiale cu coeficienți constanți (de exemplu ecuația (1) sau (6) se pot obține două funcții oarecare (σ_r, σ_0 sau M_r, M_t) ce depind de constantele de integrare. Forma generală a acestor ecuații va fi ([6], p. 716):

$$\varphi = Aa(r) + Bb(r) + c(r), \tag{20a}$$

$$\psi = Ad(r) + Be(r) + f(r), \tag{20b}$$

unde cu A și B s-au înlocuit constantele de integrare A_u (sau A_Φ) și B_u (sau B_Φ).

Considerăm că discul/placa studiată a fost discretizat în n tronsoane (corespunzînd a n porțiuni de încărcare). Deoarece în punctele de trecere de la un interval la altul funcțiile pot avea discontinuități, în punctul i (fig. 1) funcția va avea valorile φ_i^{st} la stînga lui i și $\varphi_i^{dr} = \varphi_i$ la dreapta; similar pentru funcția ψ se va nota ψ_i^{st} și $\psi_i^{dr} = \psi_i$.

Între cele două funcții φ și ψ, la stînga și dreapta punctului i pot scrie relațiile:

$$\varphi_i^{st} = k_1\varphi_i, \tag{21a}$$

$$\varphi_{i+1}^{st} = k_4\varphi_{i+1}, \tag{21b}$$

$$\psi_i^{st} = k_2\psi_i + k_3\varphi_i, \tag{21c}$$

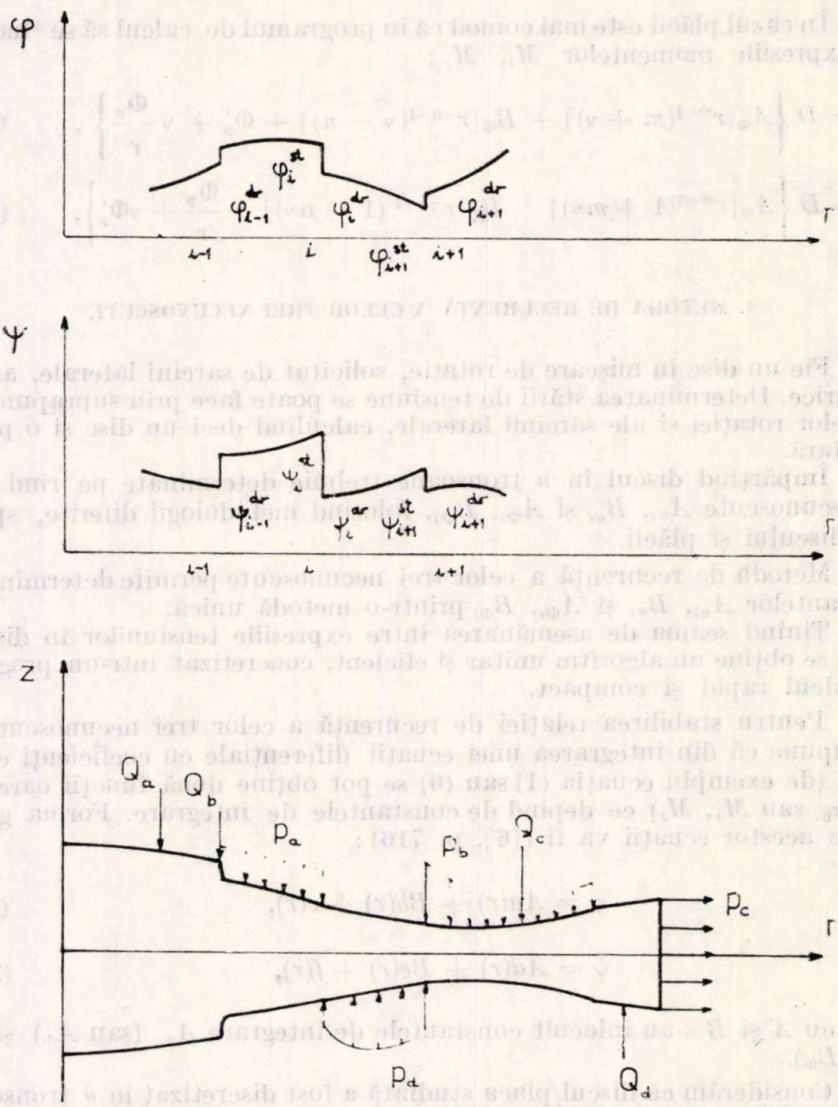


Fig. 1. — Variaţia funcţiilor φ şi ψ pentru un caz oarecare de disc în rotaţie, solicitat de forţe şi presiuni laterale.

unde constantele k_j, $j = \overline{1,4}$ au valorile :

— pentru disc :

$$k_1 = \frac{h_i^{st}}{h_i^{dr}}, \quad k_2 = 1, \quad k_3 = \nu(k_1 - 1), \quad k_4 = \frac{h_{i+1}^{st}}{h_{i+1}^{dr}}, \tag{22}$$

— pentru placă :

$$k_1 = 1, \quad k_2 = \left(\frac{h_i^{dr}}{h_i^{st}}\right)^3, \quad k_3 = \nu(1 - k_2), \quad k_4 = 1. \tag{23}$$

Scriind ecuaţiile (20) pentru două tronsoane consecutive (tronsonul I cuprins între punctele $i-1$ şi i, tronsonul II cuprins între punctele i şi $i+1$), exprimînd pe φ în cele patru puncte $(i-1)^{dr}$, i^{st}, i^{dr}, $(i+1)^{st}$ şi înlocuind valorile lui ψ în relaţia (21c) se obţine un sistem cu cinci ecuaţii liniare şi patru necunoscute (constantele A şi B pe tronsoanele I şi II). Condiţia de compatibilitate a sistemului furnizează relaţia între necunoscutele φ_{i-1}, φ_i, φ_{i+1}, care stă la baza metodei de recurenţă ([6], p. 719):

$$-\varphi_{i-1}\frac{P}{M}+\varphi_i\left(k_2\frac{S}{N}+k_1\frac{R}{M}-k_3\right)-\varphi_{i+1}\frac{T}{N}k_2k_4=$$

$$=-c^{\mathrm{I}}_{i-1}\frac{P}{M}+c^{\mathrm{I}}_i\frac{R}{M}+c^{\mathrm{II}}_ik_2\frac{S}{N}-c^{\mathrm{II}}_{i+1}k_2\frac{T}{N}-(f^{\mathrm{I}}_i-f^{\mathrm{II}}_ik_2), \tag{24}$$

unde

$$M=a^{\mathrm{I}}_{i-1}b^{\mathrm{I}}_i-a^{\mathrm{I}}_ib^{\mathrm{I}}_{i-1},\qquad N=a^{\mathrm{II}}_i\,b^{\mathrm{II}}_{i+1}-a^{\mathrm{II}}_{i+1}b^{\mathrm{II}}_i,$$

$$P=a^{\mathrm{I}}_ie^{\mathrm{I}}_i-d^{\mathrm{I}}_ib^{\mathrm{I}}_i,\qquad R=a^{\mathrm{I}}_{i-1}e^{\mathrm{I}}_i-d^{\mathrm{I}}_ib^{\mathrm{I}}_{i-1}, \tag{25}$$

$$S=e^{\mathrm{II}}_ia^{\mathrm{II}}_{i+1}-b^{\mathrm{II}}_{i-1}d^{\mathrm{II}}_i,\qquad T=e^{\mathrm{II}}_ia^{\mathrm{II}}_i-b^{\mathrm{II}}_id^{\mathrm{II}}_i.$$

În cazul unui exemplu cu n tronsoane se pot scrie numai $n-2$ ecuaţii de tipul (24). Pentru rezolvarea sistemului mai sînt necesare două relaţii, acestea fiind condiţiile la limită ale problemei date. În cazul discului sau plăcii pot fi: deplasări sau deformaţii unghiulare cunoscute, tensiuni sau momente date (la raza interioară şi exterioară).

Sistemul de n ecuaţii în necunoscutele φ_i este de tip bandă, cu lăţime de trei, pentru rezolvarea căruia se poate folosi o metodă recursivă, foarte rapidă. Avînd determinate valorile lui φ_i, se pot calcula apoi necunoscutele ψ_i, cu relaţia:

$$\psi(r)=\frac{(b^{\mathrm{I}}_{i-1}c^{\mathrm{I}}_i-c^{\mathrm{I}}_{i-1}b^{\mathrm{I}}_i)\,d^{\mathrm{I}}(r)+(a^{\mathrm{I}}_ic^{\mathrm{I}}_{i-1}-a^{\mathrm{I}}_{i-1}c^{\mathrm{I}}_i)e^{\mathrm{I}}(r)}{a^{\mathrm{I}}_{i-1}b^{\mathrm{I}}_i-a^{\mathrm{I}}_ib^{\mathrm{I}}_{i-1}}+f^{\mathrm{I}}(r)+$$

$$+\varphi_{i-1}\frac{b^{\mathrm{I}}_i\,d^{\mathrm{I}}(r)-a^{\mathrm{I}}_i\,e^{\mathrm{I}}(r)}{a^{\mathrm{I}}_{i-1}\,b^{\mathrm{I}}_i-a^{\mathrm{I}}_i\,b^{\mathrm{I}}_{i-1}}+\varphi_i\frac{a^{\mathrm{I}}_{i-1}\,e^{\mathrm{I}}(r)-b^{\mathrm{I}}_{i-1}\,d^{\mathrm{I}}(r)}{a^{\mathrm{I}}_{i-1}\,b^{\mathrm{I}}_i-a^{\mathrm{I}}_i\,b^{\mathrm{I}}_{i-1}}, \tag{26}$$

care a fost obţinută prin determinarea în prealabil a constantelor de integrare A şi B.

5. EXEMPLE DE CALCUL

5.1. DISC DE TURBINĂ

Se consideră discul din figura 2*a* ([7]), avînd turaţia $n=11500$ rot/min şi variaţia de temperatură pe rază prezentată în figura 2*b* (temperatura este considerată constantă pe grosimea discului).

Presiunea, la diametrul exterior, datorată forţei centrifuge ce ia naştere în palete este de 59,8 MPa.

Tensiunile σ_r şi σ_t s-au determinat prin metoda celor două calcule, metoda elementului finit şi metoda celor trei necunoscute. În cazul

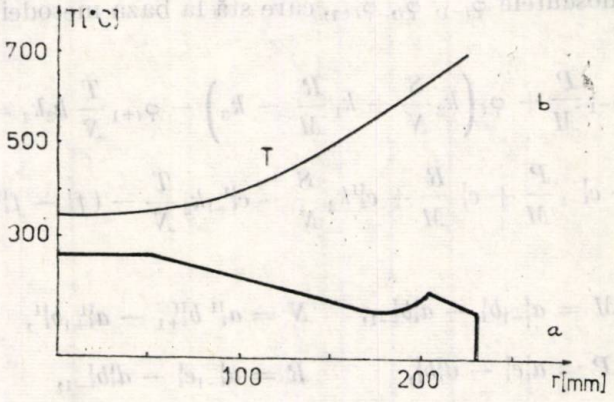


Fig. 2. — Disc turbină : *a* — geometrie ; *b* — variaţia temperaturii pe raza.

raza (mm)	0	50	80	110	143	177	203	217	230
grosimea (mm)	111	111	96	80	63	54	69	58	48

utilizării metodei celor două calcule discul a fost înlocuit cu un profil în trepte, format din opt tronsoane de grosime constantă (fig. 3*a*, [8]).

Pentru calculul discului cu metoda elementului finit s-a utilizat programul SAP, considerîndu-se piesa discretizată în 51 elemente (fig.3*b*).

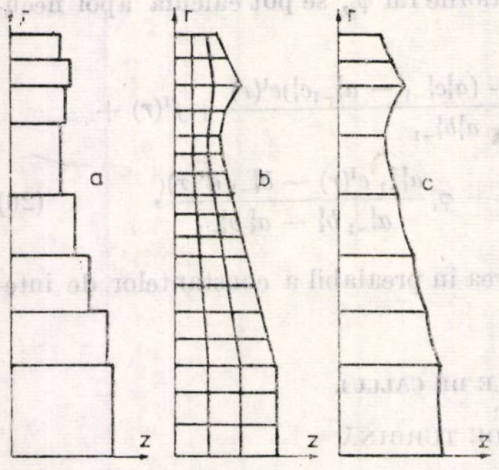


Fig. 3.—Discretizarea discului : a—metoda celor două calcule; b — metoda elementului finit (51 elemente); c — metoda celor trei necunoscute (8 tronsoane).

În cazul metodei celor trei necunoscute a fost utilizat un program original, scris în limbajul FORTRAN. Discul a fost împărţit în 8 şi respectiv 16 tronsoane, a căror grosime s-a considerat că variază hiperbolic (fig. 3*c*).

Rezultatele sînt prezentate în figura 4. Se observă că valorile tensiunii radiale calculate prin metoda celor trei necunoscute şi metoda celor două calcule sînt apropiate (diferenţa maximă fiind de 6%).

În cazul metodei celor trei necunoscute se obţine o diferenţă maximă de 2% între valorile tensiunilor calculate cu discretizarea de 8 şi respectiv

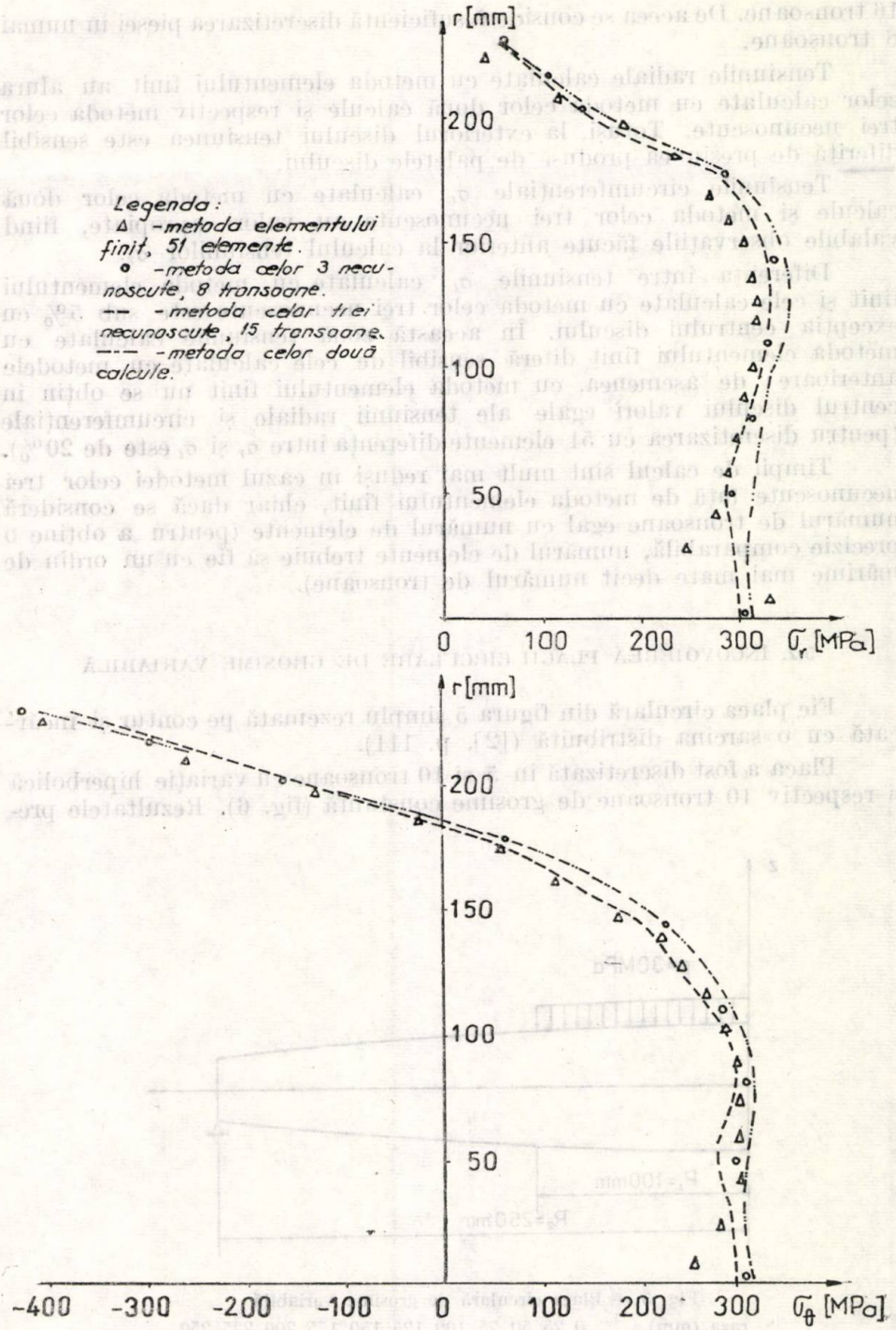


Fig. 4.—Variația tensiunilor σ_r și σ_θ în discul de turbină.

16 tronsoane. De aceea se consideră suficientă discretizarea piesei în numai 8 tronsoane.

Tensiunile radiale calculate cu metoda elementului finit au alura celor calculate cu metoda celor două calcule și respectiv metoda celor trei necunoscute. Totuși, la exteriorul discului tensiunea este sensibil diferită de presiunea produsă de paletele discului.

Tensiunile circumferențiale σ_t calculate cu metoda celor două calcule și metoda celor trei necunoscute au valori apropiate, fiind valabile observațiile făcute anterior la calculul tensiunilor σ_r.

Diferența între tensiunile σ_t calculate cu metoda elementului finit și cele calculate cu metoda celor trei necunoscute este sub 5% cu excepția centrului discului. În această zonă tensiunile calculate cu metoda elementului finit diferă sensibil de cele calculate cu metodele anterioare; de asemenea, cu metoda elementului finit nu se obțin în centrul discului valori egale ale tensiunii radiale și circumferențiale (pentru discretizarea cu 51 elemente diferența între σ_r și σ_t este de 20%).

Timpii de calcul sînt mult mai reduși în cazul metodei celor trei necunoscute față de metoda elementului finit, chiar dacă se consideră numărul de tronsoane egal cu numărul de elemente (pentru a obține o precizie comparabilă, numărul de elemente trebuie să fie cu un ordin de mărime mai mare decît numărul de tronsoane).

5.2. ÎNCOVOIEREA PLĂCII CIRCULARE DE GROSIME VARIABILĂ

Fie placa circulară din figura 5 simplu rezemată pe contur și încărcată cu o sarcina distribuită ([2], p. 111).

Placa a fost discretizată în 5 și 10 tronsoane cu variație hiperbolică și respectiv 10 tronsoane de grosime constantă (fig. 6). Rezultatele pre-

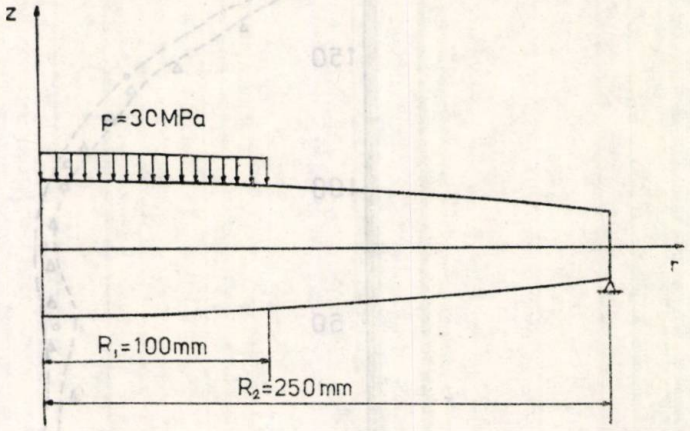


Fig. 5. — Placa circulară de grosime variabilă

raza (mm)	0	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250
grosimea (mm)	60	59	58	56	53	50	48	44	40	35	30

zentate în tabelul 2 arată că pentru o variație redusă a grosimii discului momentele (tensiunile) calculate cu același număr de tronsoane de grosime constantă și de variație hiperbolică au valori apropiate. Tronsoanele cu

Tabelul 2

Valorile tensiunilor σ_r, σ_θ în placa circulară

	10 tronsoane var. hiperbolică		5 tronsoane var. hiperbolică				10 tronsoane grosime constantă			
r (mm)	$\sigma_{r_{10}}$ (MPa)	$\sigma_{\theta_{10}}$ (MPa)	σ_{r_5} (MPa)	ε_r (%)	σ_{θ_5} (MPa)	ε_θ (%)	$\sigma^{ct}_{r_{10}}$ (MPa)	ε^{ct}_r (%)	$\sigma^{ct}_{\theta_{10}}$ (MPa)	ε^{ct}_θ (%)
0	324,2	324,2	321,2	−0,9	321,0	−0,9	328,3	1,3	328,3	1,3
25	331,1	328,6					330,4	−0,2	332,7	1,2
50	321,6	316,4	327,2	1,7	316,2	0,1	316,2	−1,7	319,3	0,9
75	304,4	288,2					301,9	−0,8	301,1	4,5
100	278	250,4	282,7	1,7	250,5	0,0	279,4	0,5	271,3	8,3
125	247,2	213					249,6	1	230,4	8,2
150	217,4	185,1	221,7	2	184,9	−0,1	220,9	1,6	201,3	8,7
175	188,4	154′					195,0	4	169,	9,7
200	158,2	116,7	161	1,8	116,8	0,1	170	7,4	136,7	17,1
225	122,9	71,8					137,7	12	86,1	19,9
250	78,9	0	80,8	2,4	0	0	86,7	9,9	0	0

unde $\varepsilon_{r(\theta)} = \dfrac{\sigma_{r(\theta)_5} - \sigma_{r(\theta)_{10}}}{\sigma_{r(\theta)_{10}}}$, $\varepsilon^{ct}_{r(\theta)} = \dfrac{\sigma^{ct}_{r(\theta)_{10}} - \sigma_{r(\theta)_{10}}}{\sigma_{r(\theta)_{10}}}$

variație hiperbolică pot aproxima mai bine conturul plăcii, astfel încît pentru o discretizare cu 5 tronsoane eroarea maximă este 2,4%, față de 20%, în cazul cu 10 tronsoane de grosime constantă.

5.3. DISC ÎN ROTAȚIE SOLICITAT LATERAL

În figura 7*a* este prezentat discul unei trepte de compresor. Presiunea exercitată de palete la diametrul exterior este de 32MPa. Discul este solicitat lateral de o presiune de 0,1MPa între razele de 100 și 175 mm

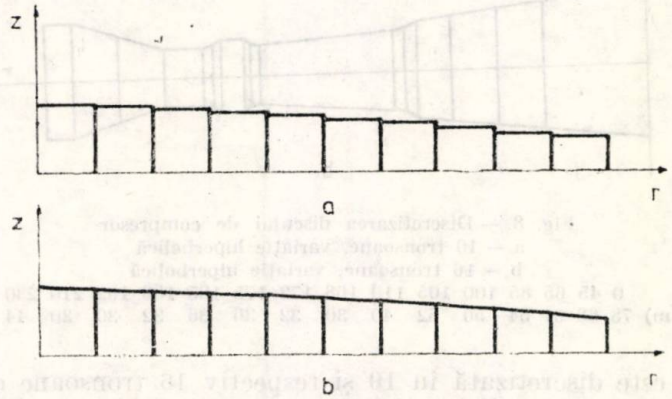


Fig. 6. — Discretizarea plăcii circulare de grosime variabilă : a — cu grosime constantă, 10 tronsoane; b — cu grosime variind hiperbolic, 10 tronsoane.

și de o presiune de 0,08 MPa între razele de 185 și 210 mm. Turația este de 10500 rot/min, iar distribuția temperaturilor și caracteristicilor materialului sînt prezentate în figura *7b*.

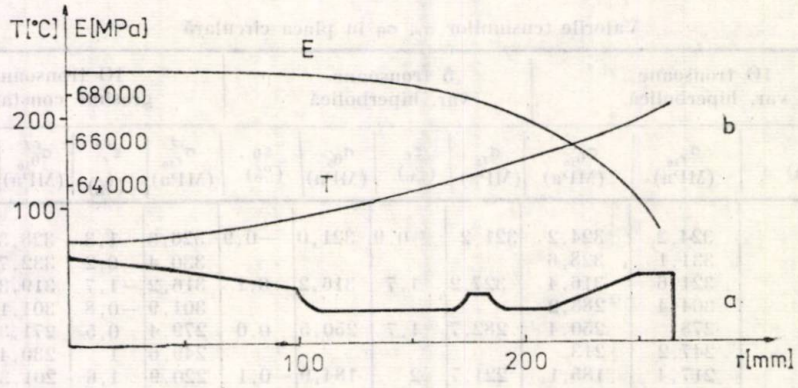


Fig. 7. — Disc de compresor, solicitat lateral

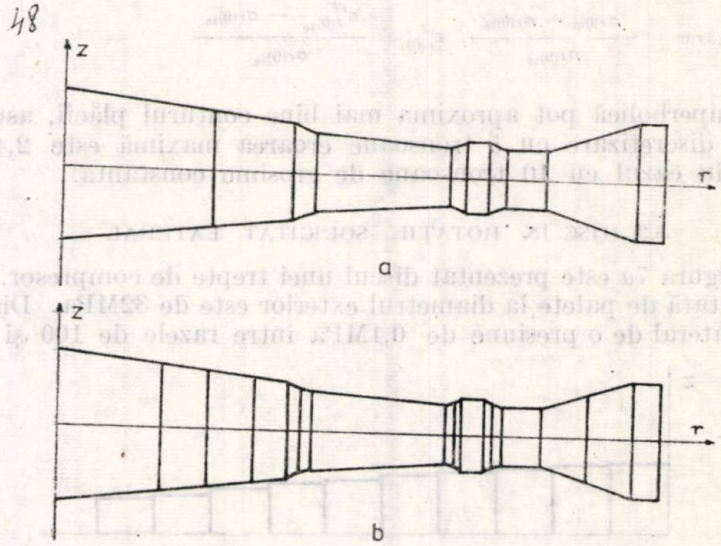


Fig. 8. — Discretizarea discului de compresor
a — 10 tronsoane, variație hiperbolică
b — 16 tronsoane, variație hiperbolică

raza (mm)	0	45	65	85	100	105	110	168	172	175	185	188	192	210	230	250	265
grosimea (mm)	78	68	61	54	50	52	40	30	32	36	36	32	30	30	44	60	60

Piesa este discretizată în 10 și respectiv 16 tronsoane cu variație hiperbolică (fig. 8). Rezultatele prezentate în figura 9 arată o bună apropiere între valorile tensiunilor corespunzătoare celor două discretizări.

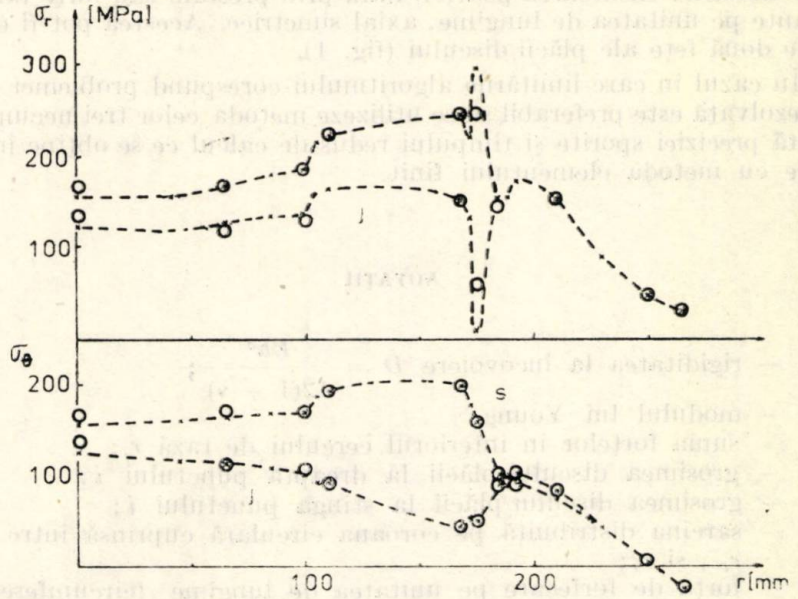


Fig. 9. — Valorile tensiunilor σ_r şi σ_θ în discul de compresor : s — pe contur, sus ; j — pe contur, jos ; 0 — varianta cu 10 tronsoane ; x — varianta cu 16 tronsoane.

6. CONCLUZII

Similitudinea ecuaţiilor de echilibru ale discurilor şi plăcilor circulare cu variaţie hiperbolică a permis, utilizînd metoda de recurenţă a celor trei necunoscute, realizarea unui algoritm comun concretizat în programul de calcul cu care au fost analizate exemplele de la capitolul 5.

Folosirea relaţiilor analitice permite obţinerea soluţiei exacte, cu condiţia ca grosimea să varieze hiperbolic. Aceasta înseamnă că singura sursă de erori a algoritmului este discretizarea conturului discului sau plăcii.

Algoritmul bazat pe metoda celor trei necunoscute necesită un timp de calcul redus. Astfel, pentru rularea pe calculatorul Coral a exemplului 5.1 au fost necesare 171 secunde pentru SAP cu o discretizare de 51 elemente şi numai 4 secunde pentru metoda celor trei necunoscute, cu 16 tronsoane.

În afara preciziei şi vitezei de calcul sporite, efortul la discretizare şi introducerea datelor este mult mai redus la metoda celor trei necunoscute faţă de metoda elementului finit. Metoda elementului finit are însă marele avantaj al generalităţii sale, putînd rezolva un domeniu mult mai vast de cazuri faţă de metoda celor trei necunoscute la care apar limitări în ceea ce priveşte forma şi felul încărcării discului/plăcilor.

Programul de calcul bazat pe metoda celor trei necunoscute poate fi utilizat însă numai pentru discuri şi/sau plăci axial simetrice care au

contur simetric. Încărcarea poate fi dată prin presiuni sau forțe tăietoare constante pe unitatea de lungime, axial simetrice. Acestea pot fi diferite pe cele două fețe ale plăcii/discului (fig. 1).

În cazul în care limitările algoritmului corespund problemei ce trebuie rezolvată este preferabil să se utilizeze metoda celor trei necunoscute datorită preciziei sporite și timpului redus de calcul ce se obține în comparație cu metoda elementului finit.

NOTAȚII

D — rigiditatea la încovoiere $D = \dfrac{Eh^3}{12(1+\nu)}$;
E — modulul lui Young;
F_i — suma forțelor în interiorul cercului de rază r_i;
h_i^{dr} — grosimea discului/plăcii la dreapta punctului i;
h_i^{st} — grosimea discului/plăcii la stînga punctului i;
p_i — sarcina distribuită pe coroana circulară cuprinsă între razele r_{i-1} și r_i;
Q — forța de forfecare pe unitatea de lungime (circumferențial);
u — deplasarea radială;
u_p' — derivata soluției particulare u_p;
α — coeficientul de dilatare;
Φ — panta suprafeței meridiane;
Φ_p' — derivata soluției particulare Φ_p;
ν — coeficientul lui Poisson;
ρ — densitatea;
θ — deformația specifică datorată gradientului de temperatură pe rază, $\theta = \int_{t_0}^{t} \alpha dt$.

Primit în redacție la 20 decembrie 1988

BIBLIOGRAFIE

1. M. BLUMENFELD, *Calculul discurilor de grosime variabilă în mișcare de rotație prin metoda celor trei necunoscute*, St. cerc. mec. apl., **14**, 1 (1963).
2. M. BLUMENFELD, *Circular symetricaly loaded plates of constant and variable thickness, calculated by the three unknowns method*, Buletinul I.P.B., **XXIV**, 3 (1962).
3. S. D. PONOMARIOV, ș.a., *Bazele metodelor moderne de calcul de rezistență în construcția de mașini*, Masgiz, 1952.
4. H. D. CONWAY, *Note on Bending of Circular Plates of Variable Thickness*, Journal of Applied Mechanics, **16**, 2 (1949).
5. Gh. BUZDUGAN, *Rezistența materialelor*, Edit. Tehnică, București, 1980, p. 424—426.
6. M. BLUMENFELD, *Relații generalizate ale metodei de recurență a celor trei necunoscute, pentru studiul sistemelor elastice*, St. cerc. mec. apl., **14**, 3, (1963).
7. S. S. MANSON, *Determination of elastic stresses in gas-turbine discs*, NACA Report 871, 1947.
8. S. D. PONOMARIOV, ș.a., *Calculul de rezistență în construcția de mașini*, volum **III**, Edit. Tehnică, București, 1964, p. 138—141.

O EXTINDERE A METODEI PARAMETRILOR INIȚIALI LA CALCULUL NUMERIC AL REZERVOARELOR*)

de M.V. SOARE și D. IORDACHE

Institutul de Construcții, București

Aplicarea metodei diferențelor finite pentru găsirea soluției unui sistem de ecuații diferențiale ordinare, cu condiții bilocale, revine la rezolvarea unui sistem de ecuații algebrice liniare.
În lucrare se arată că, prin utilizarea metodei parametrilor inițiali, se ajunge la determinarea parametrilor inițiali, diferiți de aceia precizați în originea axei de coordonate, dintr-un sistem de două pînă la patru ecuații (după natura problemei) oricare ar fi discretizarea adoptată.
În rest, calculul se reduce la determinarea necunoscutelor din relații de recurență.
Aplicarea metodei este ilustrată prin calculul unui rezervor cilindric circular, cu grosimea peretelui variabilă, solicitat axial simetric.

1. INTRODUCERE

În numeroase probleme de Mecanica construcțiilor rezolvarea revine la găsirea soluției unei ecuații diferențiale liniare. Cînd coeficienții sînt variabili, sînt foarte rare situațiile cînd poate fi găsită o soluție analitică; dacă acest lucru nu este posibil, metoda diferențelor finite constituie un instrument de calcul eficient pentru obținerea soluției numerice.

Dacă ecuația diferențială presupune impunerea tuturor condițiilor la unul dintre capete, ales ca origine, se spune că avem de-a face cu o *problemă de valori inițiale*, și relațiile obținute prin introducerea diferențelor finite au avantajul conferit de relațiile de recurență.

Dacă, în schimb, avem de-a face cu o *problemă de condiții bilocale*, relațiile obținute prin introducerea diferențelor finite constitue un *sistem de ecuații* care trebuie să fie rezolvat în ansamblu.

Este știut că, în felul acesta, calculul numeric conține atît erori introduse de metoda numerică (aproximarea derivatelor de diferite ordine prin diferențe finite), cît și erori de rotunjire (care apar în procesul de rezolvare a sistemului de ecuații). Cu cît numărul ecuațiilor este mai mare (discretizare mai fină), cu atît cresc dificultățile de obținere a rădăcinilor.

În cele ce urmează ne propunem să arătăm cum, prin utilizarea *metodei parametrilor inițiali*, problema rezolvării poate fi simplificată drastic, sistemul de ecuații de rezolvat fiind redus la numai două la patru ecuații (după natura problemei), oricare ar fi discretizarea adoptată în cazul concret.

Metoda propusă va fi expusă pe baza exemplului concret al unui rezervor cilindric circular, cu grosimea peretelui variind liniar pe înălțime, solicitat simetric în raport cu axa de rotație. Un caz mai complex va fi expus într-un studiu viitor.

---

*) Lucrare prezentată la a XIII-a Consfătuire de Mecanica Solidelor, Sibiu, 3 iunie 1989, de către primul autor.

2. ECUAȚIILE GENERALE ALE REZERVORULUI SOLICITAT AXIAL-SIMETRIC

Sînt cunoscute din literatura de specialitate ecuațiile generale ale plăcilor subțiri cilindrice circulare solicitate axial-simetric

$$\frac{dw}{dx} = \chi, \tag{1}$$

$$\frac{d\chi}{dx} = -\frac{M_x}{K_x}, \tag{2}$$

$$\frac{dM_x}{dx} = Q_x, \tag{3}$$

$$\frac{dQ_x}{dx} = \frac{E\delta_x}{a^2} w - Z, \tag{4}$$

în care w reprezintă săgeata suprafeței mediane (pozitivă cînd se produce spre interior); χ — panta tangentei la generatoarea deformată (pozitivă cînd se produce în sens orar, cînd se consideră peretele din stînga al secțiunii verticale); M_x — momentul încovoietor în sensul generatoarelor, pe unitatea de lățime de placă (pozitiv cînd întinde fibrele intradosului); Q_x — forța tăietoare în sensul generatoarelor, pe unitatea de lățime de placă; Z — componenta normală a încărcării exterioare, pe unitatea de suprafață (pozitivă cînd este dirijată spre axa de rotație); a — raza suprafeței mediane cilindrice circulare; δ_x — grosimea peretelui, variabilă în lungul generatoarelor;

$K_x = \dfrac{E\delta_x^3}{12(1-\mu^2)}$ — rigiditatea la încovoiere a plăcii, pe unitatea de lățime, de placă;

E, μ — constantele elastice ale materialului.

Cunoscînd săgețile w, eforturile inelare N_φ rezultă direct din relația

$$N_\varphi = -\frac{E\delta_x}{a} w. \tag{5}$$

Procedeul uzual de rezolvare a ecuațiilor diferențiale (1)—(4) constă în reducerea la o singură ecuație diferențială de ordinul al patrulea avînd ca funcție necunoscută săgeata w, în metoda deplasărilor,

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(K_x \frac{d^2 w}{dx^2}\right) + \frac{E\delta_x}{a^2} w = Z, \tag{6}$$

sau reducerea la un sistem de două ecuații diferențiale de ordinul al doilea, în metoda mixtă,

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_x}{K_x}, \tag{7a}$$

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} = \frac{E\delta_x}{a^2} w - Z. \tag{7b}$$

K. Beyer [1] și M. Soare [4] au aplicat diferențele finite, după metoda parabolei, pentru un rezervor de beton armat, la care grosimea peretelui varia liniar cu înălțimea. Pentru împărțirea înălțimii l în $n = 25$ intervale egale, M. Soare [4] arată că se obține un sistem de 27 ecuații liniare, în care necunoscutele sînt valorile săgeților w în nodurile $n = 1,2,\ldots,24$ interioare, în nodul $n = 25$ de la marginea superioară și în nodurile exterioare $n = 26$ și 27.

Calculul rezervorului a fost reluat de M. Soare și D. Iordache [5] aplicînd metoda plurilocală sistemului (6). Pentru același număr de intervale, sistemul de ecuații este practic dublat, iar rezolvarea a fost făcută în baza unui program de calcul specializat.

3. METODA PARAMETRILOR INIȚIALI

Este știut că, în metoda parametrilor inițiali, se aleg drept constante de integrare, valorile funcțiilor necunoscute, în originea axei de coordonate ($x = 0$); în cazul de care ne ocupăm, acești parametri, avînd o semnificație fizică, sînt w_0, χ_0, M_0 și Q_0. Unul dintre avantajele metodei rezidă în faptul că doi dintre parametrii inițiali sînt cunoscuți din condițiile în origine; de exemplu, considerînd peretele cilindric încastrat perfect la bază, condițiile inițiale sînt $w_0 = 0$ și $\chi_0 = 0$.

Ceilalți doi parametri urmează să fie determinați la cealaltă extremitate a peretelui, pentru $x = l$. Odată determinați ceilalți doi parametri, soluția este complet precizată și expresiile lui w, χ, N_φ, M_x și Q_x vor putea fi evaluate numeric pentru orice secțiune x.

În calculul numeric se caută să se aplice același algoritm de calcul.

Ținînd seama că relațiile diferențiale (1)—(4) sînt toate de ordinul întîi, diferențele finite vor putea fi utilizate dacă se aplică metoda trapezului (cu diferențe progresive) sau metoda Runge-Kutta.

Vom detalia procedeul de calcul utilizînd diferențele progresive deoarece se ajunge la relații explicite simple care permit urmărirea diferitelor etape.

După schema

$$\frac{\mathrm{d}(\ldots)_m}{\mathrm{d}x} \approx \frac{(\ldots)_{m+1} - (\ldots)_m}{\Delta x},$$

relațiile diferențiale pot fi transcrise în ecuații cu diferențe finite relative la nodul m *).

$$w_{m+1} = w_m + \chi_m \Delta x, \tag{8}$$

$$\chi_{m+1} = \chi_m - \frac{M_m \Delta x}{K_m}, \tag{9}$$

$$M_{m+1} = M_m + Q_m \Delta x, \tag{10}$$

$$Q_{m+1} = Q_m + \frac{E\delta_m}{a^2} w_m \Delta x - Z_m \Delta x. \tag{11}$$

*) Pentru simplificarea scrierii, se suprimă indicele inferior x

Se observă așadar că, dacă am cunoaște valorile funcțiilor necunoscute în nodul m — fie w_m, χ_m, M_m, Q_m — din relațiile (8)—(11) ar rezulta valorile funcțiilor necunoscute în nodul următor $m+1$; în particular, pentru $m = 0$, avem

$$w_1 = w_0 + \chi_0 \Delta x, \tag{12a}$$

$$\chi_1 = \chi_0 - \frac{M_0 \Delta x}{K_0}, \tag{12b}$$

$$M_1 = M_0 + Q_0 \Delta x, \tag{12c}$$

$$Q_1 = Q_0 + -\frac{E\delta_0}{a^2} w_0 \Delta x - Z_0 \Delta x. \tag{12d}$$

În membrii secunzi ai relațiilor (12) sînt puși în evidență parametrii inițiali w_0, χ_0, M_0, Q_0. Dacă admitem, pentru fixarea ideilor, că peretele cilindric este încastrat la bază, vom avea $w_0 = 0$, $\chi_0 = 0$ și relațiile (12) capătă forma mai simplă

$$\begin{aligned} w_1 &= 0, \\ \chi_1 &= -\frac{M_0 \Delta x}{K_0}, \\ M_1 &= M_0 + Q_0 \Delta x, \\ Q_1 &= Q_0 - Z_0 \Delta x. \end{aligned} \tag{13}$$

Fie n nodul de la marginea superioară a cilindrului. Dacă aceasta este liberă, condițiile la limită ce trebuie să fie satisfăcute sînt $M_n = 0$ și $Q_n = 0$. Scriind relațiile (8)—(11) pentru toate nodurile interioare, va rezulta un sistem de ecuații avînd rădăcinile w_m, χ_m, M_m, $Q_m (m = 1, 2, \ldots, n-1)$.

Rezolvarea sistemului poate fi evitată procedînd în modul următor. Se consideră următoarele trei scheme de încărcare

$$1^\circ \; M_0 = 0, \; Q_0 = 0 \text{ și } Z \neq 0;$$

$$2^\circ \; M_0 = 1, \; Q_0 = 0 \text{ și } Z = 0;$$

$$3^\circ \; M_0 = 0, \; Q_0 = 1 \text{ și } Z = 0.$$

Să ne ocupăm de schema de încărcare 1. Relațiile (13) dau

$$\begin{aligned} w_1 &= 0, \\ \chi_1 &= 0, \\ M_1 &= 0, \\ Q_1 &= -Z_0 \Delta x. \end{aligned}$$

Din (8)—(11), pentru $m = 1$ se deduce

$$w_2 = w_1 + \chi_1 \Delta x = 0,$$

$$\chi_2 = \chi_1 - \frac{M_1 \Delta x}{K_1} = 0,$$

$$M_2 = M_1 + Q_1 \Delta x = -Z_0 (\Delta x)^2,$$

$$Q_2 = Q_1 + \frac{E\delta_1}{a^2} w_1 \Delta x - Z_1 \Delta x = -(Z_0 + Z_1)\Delta x;$$

analog, pentru $m = 2$ rezultă

$$w_3 = w_2 + \chi_2 \Delta x = 0,$$

$$\chi_3 = \chi_2 - \frac{M_2 \Delta x}{K_2} = \frac{Z_0 (\Delta x)^3}{K_2},$$

$$M_3 = M_2 + Q_2 \Delta x = -Z_0 (\Delta x)^2 - (Z_0 + Z_1)(\Delta x)^2 =$$

$$= -(2Z_0 + Z_1)(\Delta x)^2,$$

$$Q_3 = Q_2 + \frac{E\delta_2}{a^2} w_2 \Delta x - Z_2 \Delta x = -(Z_0 + Z_1 + Z_2)\Delta x.$$

Din aproape în aproape vor fi determinate valorile în rostul marginal n, pe care le vom nota $w_{n,z}$, $\chi_{n,z}$, $M_{n,z}$, $Q_{n,z}$.

Se trece la schema de încărcare 2. Relațiile (13) dau

$$w_1 = 0,$$

$$\chi_1 = -\frac{\Delta x}{K_0},$$

$$M_1 = 1,$$

$$Q_1 = 0.$$

Din (8)— (11), pentru $m = 1$ se deduce

$$w_2 = w_1 + \chi_1 \Delta x = -\frac{(\Delta x)^2}{K_0},$$

$$\chi_2 = -\frac{\Delta x}{K_0} - \frac{\Delta x}{K_1} = -\left(\frac{1}{K_0} + \frac{1}{K_1}\right)\Delta x,$$

$$M_2 = M_1 + Q_1 \Delta x = 1,$$

$$Q_2 = Q_1 + \frac{E\delta_1}{a^2} w_1 \Delta x = 0;$$

analog, pentru $m = 2$ rezultă

$$w_3 = w_2 + \chi_2 \Delta x = -\frac{(\Delta x)^2}{K_0} - \left(\frac{1}{K_0} + \frac{1}{K_1}\right)(\Delta x)^2 =$$

$$= -\left(\frac{2}{K_0} + \frac{1}{K_1}\right)(\Delta x)^2,$$

$$\chi_3 = \chi_2 - \frac{M_2 \Delta x}{K_2} = -\left(\frac{1}{K_0} + \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}\right)\Delta x,$$

$$M_3 = M_2 + Q_2 \Delta x = 1,$$

$$Q_3 = Q_2 + \frac{E\delta_2}{a^2} w_2 \Delta x = -\frac{E\delta_2}{K_0 a^2}(\Delta x)^3.$$

Din aproape în aproape vor fi determinate valorile în rostul marginal n, pe care le vom nota $w_{n,M}$, $\chi_{n,M}$, $M_{n,M}$, $Q_{n,M}$.

În sfîrșit, în schema de încărcare 3, relațiile (13) dau

$$w_1 = 0,$$

$$\chi_1 = 0,$$

$$M_1 = \Delta x,$$

$$Q_1 = 1.$$

Din (8)—(11), pentru $m = 1$ se deduce

$$w_2 = 0,$$

$$\chi_2 = -\frac{(\Delta x)^2}{K_1},$$

$$M_2 = 2\Delta x,$$

$$Q_2 = 1;$$

analog, pentru $m = 2$ rezultă

$$w_3 = -\frac{(\Delta x)^3}{K_1},$$

$$\chi_3 = -\frac{(\Delta x)^2}{K_1} - \frac{2(\Delta x)^2}{K_2} = -\left(\frac{1}{K_1} + \frac{2}{K_2}\right)(\Delta x)^2,$$

$$M_3 = 3\Delta x,$$

$$Q_3 = 1.$$

Din aproape în aproape vor fi determinate valorile în rostul marginal n, pe care le vom nota $w_{n,Q}$, $\chi_{n,Q}$, $M_{n,Q}$, $Q_{n,Q}$.

Prin suprapunerea efectelor se obțin mărimile w, χ, M, Q într-o secțiune m. Dacă marginea superioară este liberă, condițiile $M_n = 0$, $Q_n = 0$, conduc la *sistemul de două ecuații canonice*

$$\begin{aligned} M_0 \cdot M_{n,M} + Q_0 \cdot M_{n,Q} + M_{n,Z} = 0, \\ M_0 \cdot Q_{n,M} + Q_0 \cdot Q_{n,Q} + Q_{n,Z} = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

care determină parametrii inițiali M_0 și Q_0.

Pentru determinarea valorilor finale este suficient să se plece cu valorile (12) și apoi, pentru $m = 1, 2, 3, \ldots, n-1$ să fie utilizate relațiile (8)—(11) care, de data aceasta constituie relații de recurență, care însă satisfac condițiile marginale pentru $m = n$.

Se vede că metoda descrisă are avantajul că reduce problema la rezolvarea sistemului (14) și a patru serii de relații de recurență.

Erorile implicate în utilizarea metodei trapezului sînt de ordinul $0(\Delta x)$; la o împărțire suficient de densă rezultatele vor fi absolut satisfăcătoare.

Metoda Runge-Kutta este adaptată prin excelență problemelor de valori inițiale în care intervin ecuații sau sisteme de ecuații diferențiale ordinare de ordinul întîi; se demonstrează că erorile sînt de ordinul $0(\Delta x)^5$, ceea ce reprezintă o precizie excelentă. Aplicarea practică a metodei Runge-Kutta a fost prezentată în [6].

4. PROGRAM DE CALCUL

Rezolvarea numerică bazată pe metoda parametrilor inițiali și metoda Runge-Kuta (ca metodă de discretizare) este relativ simplă, însă necesită un volum de calcul foarte mare, iar efectuarea lui ar răpi un timp îndelungat pentru un calcul manual. De aceea a fost elaborat programul de calcul automat REZ-1 corespunzător calculului în teoria încovoierii a rezervoarelor cilindrice circulare avînd grosimea peretelui variabilă și solicitate axial-simetric.

Notațiile au fost sistematizate, codificate și definite în Anexa 1. În anexa 2 este redată organigrama programului REZ-1.

Datele de intrare sînt următoarele: l, a, d_0, d_s, μ, E, γ, n, K.

Unitățile de măsură folosite sînt: m pentru lungimi, mm pentru săgeți, kNm/m pentru momentele încovoietoare, kN/m pentru eforturi, kN/cm^2 pentru modulul de elasticitate, kN/m^3 pentru greutatea specifică.

În funcție de datele inițiale, programul furnizează valorile săgeților (w), eforturilor inelare (N_φ), momentelor încovoietoare în sensul generatoarelor (M_x) și ale forței tăietoare Q_x în secțiuni situate la o distanță $m\Delta x$ față de origine, unde $1 \leqslant m \leqslant n + 1$ și $\Delta x = l/n$, conform anexei 1.

Programul este scris în limbaj FORTRAN, însă folosind organigrama din anexa 2 poate fi rescris ușor în orice limbaj de programare (BASIC, PASCAL, etc.) și deoarece necesită o capacitate de memorie relativ mică (23 Ko) poate fi ușor utilizat pe calculatoare PC de tip HC 85, TIM-S, etc.

Programul conține și o opțiune (k), valorile menționate precedent fiind obținute pentru $k = 1$.

În cazul în care $k = 2$ se afișează valorile adimensionalizate pentru aceleași mărimi și anume:

$$w = (\text{coeficient}) \times \frac{\gamma a^2 \cdot l}{E \cdot d_0},$$

$$N_\varphi = (\text{coeficient}) \times \gamma a l,$$

$$M_x = (\text{coeficient}) \times \frac{\gamma l^3}{100},$$

$$Q_x = (\text{coeficient}) \times \gamma l^2.$$

Utilizarea opțiunii $k = 2$ este utilă în condițiile în care se dorește obținerea coeficienților care multiplică factorii dimensionali corespunzători eforturilor în rezervor.

Coeficienții obținuți pot fi utilizați la toate rezervoarele care au aceleași rapoarte a/l și δ_0/δ_s și aceleași valori pentru n, E și μ (unde, a, l, δ_0, δ_s, n, E și μ sînt precizați în anexa 1).

Pentru exemplificare a fost considerat rezervorul studiat în [1], [4], [5].

5. EXEMPLU DE CALCUL

Rezervorul este considerat încastrat perfect la bază ($x = 0$), iar marginea superioară ($x = l$) este liberă; el este umplut cu un lichid de greutate specifică γ. Grosimea peretelui variază liniar pe înălțime avînd valoarea δ_0 la bază și δ_s la marginea superioară.

Date numerice:

— înălțimea rezervorului: $l = 9{,}0$ m,
— raza cilindrului: $a = 9{,}0$ m,
— grosimea peretelui la bază: $\delta_0 = 0{,}4$ m,
— idem la marginea superioară: $\delta_s = 0{,}2$ m.
— coeficientul de contracție transversală: $\mu = 1/6$.

Înălțimea peretelui este împărțită în $n = 25$ intervale egale, deci $\Delta x = l/n = 0{,}36$ m.

Grosimea peretelui este exprimată prin relația

$$\delta_x = \delta_0 \left[1 + \left(\frac{\delta_s}{\delta_0} - 1\right)\frac{x}{l}\right] = 0{,}2 \cdot \left(1 - 0{,}5\,\frac{x}{l}\right).$$

Presiunea lichidului variază după legea

$$Z(x) = -\gamma(l - x) = -\gamma l \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right).$$

Din studierea succesivă a celor trei scheme de încărcare rezultă următorii coeficienți ai ecuațiilor canonice (14):

$$M_{25,M} = + 2042{,}0667,$$

$$Q_{25,M} = - 758{,}4765$$

$$M_{25,Q} = 3454{,}5929$$

$$Q_{25,Q} = 2636{,}1264$$

$$M_{25,Z} = 24145{,}3052$$

$$Q_{25,Z} = 37312{,}1387.$$

Cu acestea, ecuațiile canonice se scriu

$$2042{,}0667\, M_0 + 3454{,}5929\, Q_0 + 24145{,}3052 = 0,$$

$$- 758{,}4765\, M_0 + 2636{,}1264\, Q_0 + 37312{,}1387 = 0,$$

cu rădăcinile

$$M_0 = + 81{,}52583 \quad , Q_0 = - 118{,}0846.$$

Notă. Sistemul de ecuații canonice și rădăcinile M_0, Q_0 au fost date informativ, pentru ilustrarea metodei; programul de calcul furnizează direct valorile finale.

În tabelul 1 au fost trecute valorile finale ale lui w, N_φ, M_x și Q_x.

Tabelul 1

x (m)	w (mm)	N_φ (kN/m)	M_x (kNm/m)	Q_x (kN/m)
0	0	0	81,5258	−118,0846
0,36	−0,041	35,8027	44,7188	− 86,8281
0,72	−0,139	118,6872	18,5403	− 59,3556
1,08	−0,263	219,3809	1,3653	− 36,9326
1,44	−0,389	317,8016	− 8,6991	− 19,8415
1,80	−0,502	401,6117	−13,5223	− 7,7216
2,16	−0,594	464,5741	−14,7708	+ 0,1538
2,52	−0,661	504,9221	−13,8162	4,6663
2,88	−0,702	523,8847	−11,7079	6,7038
3,24	−0,720	524,4505	− 9,1895	7,0661
3,60	−0,718	510,4024	− 6,7406	6,4149
3,96	−0,700	485,6225	− 4,6303	5,2567
4,32	−0,672	453,6401	− 2,9725	3,9484
4,68	−0,635	417,3819	− 1,7770	2,7176
5,04	−0,592	379,0794	− 0,9909	1,6883
5,40	−0,547	340,2872	− 0,5309	0,9090
5,76	−0,500	301,9725	− 0,3062	0,3783
6,12	−0,451	264,6410	− 0,2322	+ 0,0656
6,48	−0,402	228,4760	− 0,2380	− 0,0729
6,84	−0,351	193,4725	− 0,2694	− 0,0841
7,20	−0,299	159,5554	− 0,2887	− 0,0132
7,56	−0,246	126,6763	− 0,2741	+ 0,0977
7,92	−0,191	94,8830	− 0,2187	0,2064
8,28	−0,134	64,3548	− 0,1314	0,2663
8,64	−0,077	35,3887	− 0,0395	0,2212
9,00	−0,019	8,3120	0	0

O comparație cu rezultatele obținute precedent [4], [5] arată o bună concordanță. Se mai evidențiază și faptul că toate mărimile căutate rezultă direct, fără a mai fi necesare operații de diferențiere numerică.

Primit în redacție la 23 martie 1989

BIBLIOGRAFIE

1. K. BEYER, *Die Statik im Stahlbetonbau*, 2. Aufl., Springer-Verlag, Berlin /Göttingen/ Heidelberg, 1956.
2. K. GIRKMANN, *Flächentragwerke*, 6 Aufl., Springer-Verlag, Wien, 1963.
3. J. E. GOLDBERG, J. L. BOGDANOFF, D. W. ALSPAUGH, *Stresses in Spherical Domes under Arbitrary Loading Including Thermal and Shrinkage Effects*, Non-Classical Shell Problems, Proceedings of the IASS-Symposium, Warsaw, September 2—5, 1963, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1964, 116—135.
4. M. SOARE, Aplicarea ecuațiilor cu diferențe finite la calculul plăcilor curbe subțiri, Ed. a 2-a, Edit. Academiei, București, 1968.
5. M. V. SOARE, D. IORDACHE, *Contribuții la calculul numeric al plăcilor subțiri de grosime variabilă*, St. cerc. mec. apl., **48**, *4*, 345—358 (1988).
6. M. V. SOARE, D. IORDACHE, *Calculul eforturilor de membrană în turnurile de răcire hiperbolice*, St. cerc. mec. apl., **48**, *5*, 499—514 (1989).

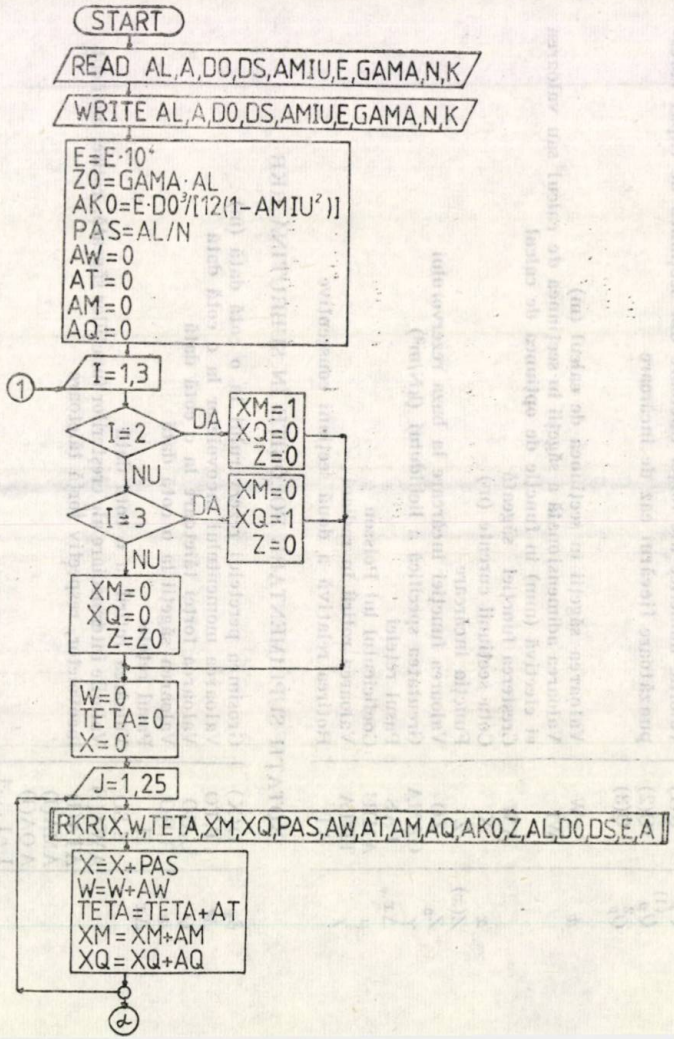
ANEXA 1

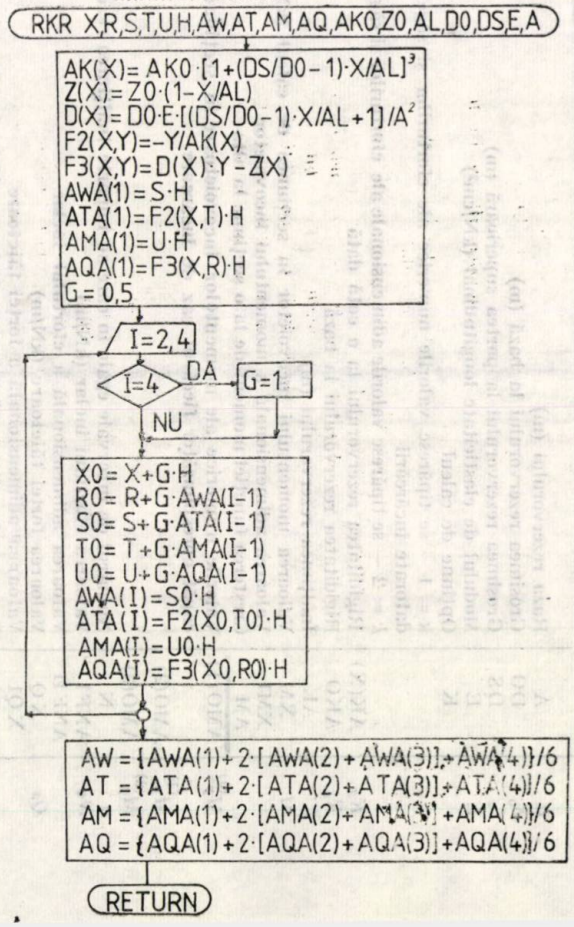
Simbol	Codificare	Definiţie
a	A	Raza rezervorului (m)
δ_0	DO	Grosimea rezervorului la bază (m)
δ_s	DS	Grosimea rezervorului la partea superioară (m)
E	E	Modulul de elasticitate longitudinal (kN/cm²)
	K	Opţiune de calcul $k = 1$ — se tipăresc valorile numerice ale eforturilor şi săgeţilor datorate încărcării $k = 2$ — se tipăresc valorile adimensionale ale eforturilor şi săgeţilor
K_x	AK(X)	Rigiditatea rezervorului la o cotă dată
K_0	AKO	Rigiditatea rezervorului la bază
l	AL	Înălţimea rezervorului (m)
M	XM	Valoarea momentului încovoietor în secţiunea de calcul (kNm/m)
	XM1	Valoarea adimensională a momentului încovoietor
	AM	Creşterea funcţiei moment de la o secţiune la alta
$M_p^{(0)}$	AMO(1)	Valorile numerice ale momentelor încovoietoare în secţiunea de capăt corespunzător fiecărui caz de încărcare
$M_p^{(1)}$	AMO(2)	
$M_p^{(2)}$	AMO(3)	
n	N	Numărul de intervale egale în care se împarte înălţimea rezervorului
N_φ	ANFI	Valoarea efortului inelar (kN/m)
	ANFI1	Valoarea adimensională a efortului inelar
Q_x	XQ	Valoarea forţei tăietoare (kN/m)
	XQ1	Valoarea adimensională a forţei tăietoare
	AQ	Creşterea funcţiei forţă tăietoare de la o secţiune la alta
$Q_p^{(0)}$	Q(1)	Valorile numerice ale forţei tăietoare din secţiunea de capăt corespunzătoare fiecărui caz de încărcare
$Q_p^{(1)}$	Q(2)	
Q_p^2	Q(3)	
w	W	Valoarea săgeţii în secţiunea de calcul (m)
	W1	Valoarea adimensională a săgeţii în secţiunea de calcul sau valoarea ei efectivă (mm) în funcţie de opţiunea de calcul
	AW	Creşterea funcţiei săgeată
x	X	Cota secţiunii curente (m)
$Z(x)$	Z	Funcţia încărcare
Z_0	ZO	Valoarea funcţiei încărcare la baza rezervorului
γ	GAMA	Greutatea specifică a lichidului (kN/m³)
Δx	PAS	Pasul reţelei
μ	AMIU	Coeficientul lui Poisson
χ	TETA	Valoarea rotirii în radiani
	AT	Rotirea relativă a două secţiuni consecutive

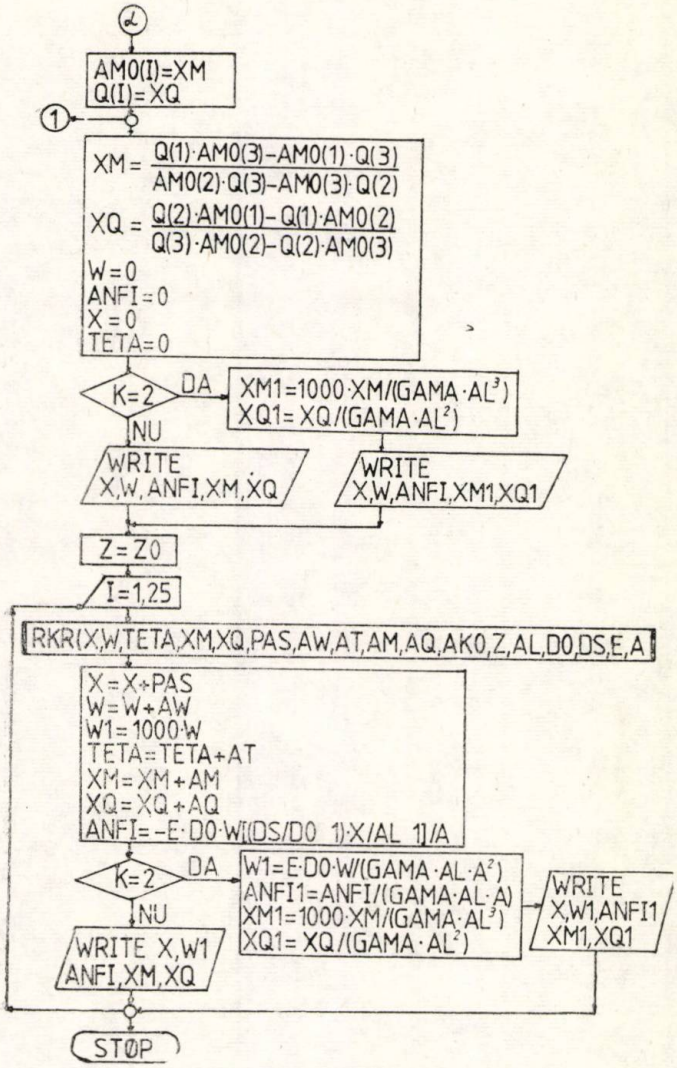
NOTAŢII SUPLIMENTARE FOLOSITE ÎN SUBRUTINA RKR

δ_x	D(X)	Grosimea peretelui rezervorului la o cotă dată (m)
M	T,TO	Valoarea momentului încovoietor la o cotă dată
Q	U,UO	Valoarea forţei tăietoare la o cotă dată
w	R,RO	Valoarea săgeţii la o cotă dată
Δx	H	Pasul reţelei
	S,SO	Valoarea rotirii la o cotă dată
	AWA(I)	Valorile intermediare ale creşterilor funcţiilor săgeată, rotire, moment încovoietor, respectiv forţă tăietoare
	ATA(I)	
	AMA(I)	
	AQA(I)	
	I=1...4	
	F2(X,Y)	Funcţii ajutătoare
	F3(X,Y)	F2(X,Y) = −Y/AK(X) F3(X,Y) = D(X)• Y − Z(X) (AK(X), D(X) şi Z(X) au fost definiţi precedent)

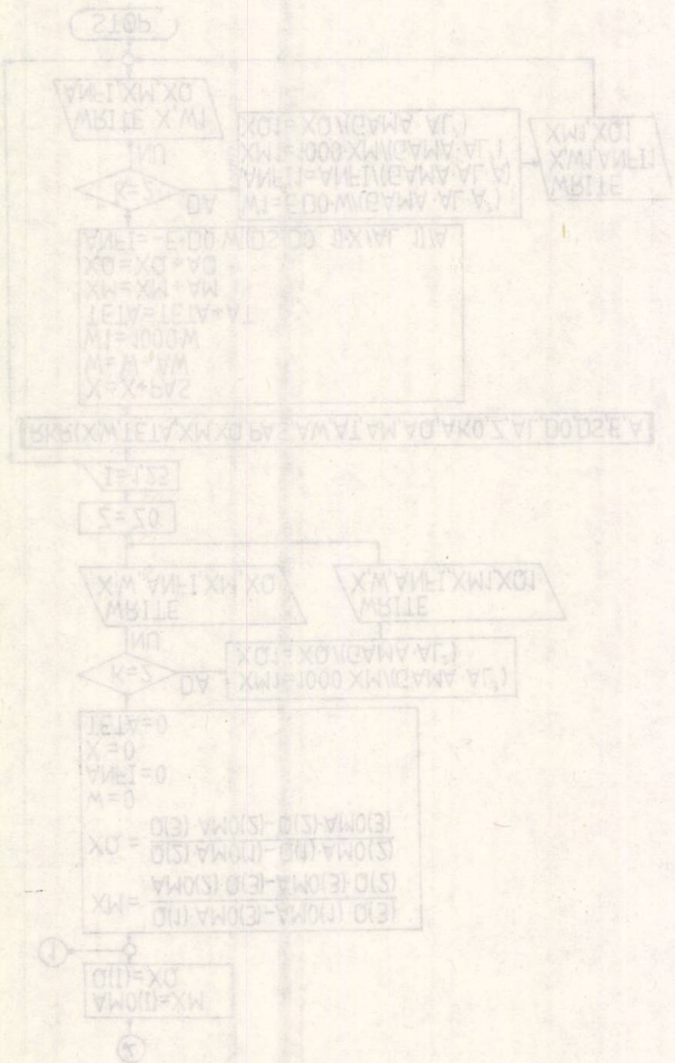
ANEXA 2


START
READ AL,A,D0,DS,AMIU,E,GAMA,N,K
WRITE AL,A,D0,DS,AMIU,E,GAMA,N,K
E=E·10⁴
Z0=GAMA·AL
AK0=E·D0³/[12(1-AMIU²)]
PAS=AL/N
AW=0
AT=0
AM=0
AQ=0
1
I=1,3
I=2
DA
XM=1
XQ=0
Z=0
NU
I=3
DA
XM=0
XQ=1
Z=0
NU
XM=0
XQ=0
Z=Z0
W=0
TETA=0
X=0
J=1,25
RKR(X,W,TETA,XM,XQ,PAS,AW,AT,AM,AQ,AK0,Z,AL,D0,DS,E,A)
X=X+PAS
W=W+AW
TETA=TETA+AT
XM=XM+AM
XQ=XQ+AQ
2


RKR X,R,S,T,U,H,AW,AT,AM,AQ,AK0,Z0,AL,D0,DS,E,A
AK(X)=AK0·[1+(DS/D0-1)·X/AL]³
Z(X)=Z0·(1-X/AL)
D(X)=D0·E·[(DS/D0-1)·X/AL+1]/A²
F2(X,Y)=-Y/AK(X)
F3(X,Y)=D(X)·Y-Z(X)
AWA(1)=S·H
ATA(1)=F2(X,T)·H
AMA(1)=U·H
AQA(1)=F3(X,R)·H
G=0,5
I=2,4
I=4
DA
G=1
NU
X0=X+G·H
R0=R+G·AWA(I-1)
S0=S+G·ATA(I-1)
T0=T+G·AMA(I-1)
U0=U+G·AQA(I-1)
AWA(I)=S0·H
ATA(I)=F2(X0,T0)·H
AMA(I)=U0·H
AQA(I)=F3(X0,R0)·H
AW={AWA(1)+2·[AWA(2)+AWA(3)]+AWA(4)}/6
AT={ATA(1)+2·[ATA(2)+ATA(3)]+ATA(4)}/6
AM={AMA(1)+2·[AMA(2)+AMA(3)]+AMA(4)}/6
AQ={AQA(1)+2·[AQA(2)+AQA(3)]+AQA(4)}/6
RETURN



ANEXA 2 (continuare)



OPTIMIZAREA CONTACTULUI CU TRACȚIUNE ELASTOHIDRODINAMICĂ DIN PUNCT DE VEDERE AL FORFECĂRILOR PARAZITE

de I.M. CIORNEI și E.N. DIACONESCU

Institutul de Învățământ Superior Suceava

În lucrare se prezintă forfecările parazite dintr-un contact cu tracțiune EHD, și anume spinul, alunecarea laterală și nesincronizarea, scoțindu-se în evidență principalele căi de diminuare a lor, în vederea optimizării transmisiilor EHD.

GENERALITĂȚI

Succesele obținute în lămurirea fenomenului ungerii EHD, implicațiile practice, care vizează, printre altele, transmiterea puterii mecanice între elemente cu mișcare de rotație, fără uzură, fenomen numit tracțiune EHD, au determinat, în ultimii ani, studiul teoretic și experimental al acesteia.

Teoria lubrificației EHD poate prezice cu suficientă precizie configurația și dimensiunile filmului de ulei dintre două elemente în contact cu rostogolirea, în cele mai variate condiții. Aceasta, deoarece formarea filmelor EHD este guvernată de condițiile din zona de intrare în contact, fără să depindă de starea lubrifiantului din interiorul contactului. Intrat între cele două elemente, lubrifiantul nu se poate scurge decît prin ieșirea normală, așa încît grosimea filmului se menține, aproximativ constantă, indiferent de transformările pe care uleiul le suferă, inclusiv modificarea stării de agregare.

Tracțiunea EHD, ca rezultat direct al comportării filmului EHD la forfecare, depinde esențial de starea lubrifiantului din interiorul contactului. Astfel o particulă de lubrifiant, aflată în zona de intrare la presiune atmosferică, traversează contactul într-un timp de tranzit de ordinul a 1—100 μs, fiind astfel supusă la un impuls, aproximativ semieliptic, de presiune de cîțiva giga Pascali precum și la însemnate eforturi de forfecare.

Pe lîngă natura uleiului, tracțiunea EHD mai este influențată de unii factori de exploatare (temperatura, presiunea, viteza de rostogolire), precum și de cei cinematici (spinul, alunecarea laterală, nesincronizarea).

Lucrarea de față se oprește asupra factorilor cinematici, indicînd, în final, direcțiile de reducere a influenței acestora, în vederea optimizării contactului cu tracțiune EHD.

CONSIDERAȚIUNI TEORETICE ȘI MĂSURĂTORI EXPERIMENTALE

Deși forfecarea peliculei de ulei, într-un contact cu tracțiunea, al unei transmisii EHD, constituie chiar principiul funcțional al acesteia, în el mai pot să apară și alte forfecări, numite forfecări parazite, datorită

factorilor cinematici, care îi diminuează performanțele. Forfecările care apar, utile sau parazite, sînt legate de deformațiile de contact ale celor două corpuri.

Se cunoaște că pentru a putea transmite puterea utilă, elementele care formează contactul sînt apăsate, după normala comună, de forțe considerabile. Dacă materialele nu ar fi elastice, deci elementele nu s-ar deforma (fig. 1), atunci mișcarea relativă a lor este dată numai de alunecare, alte mișcări nu ies în evidență.

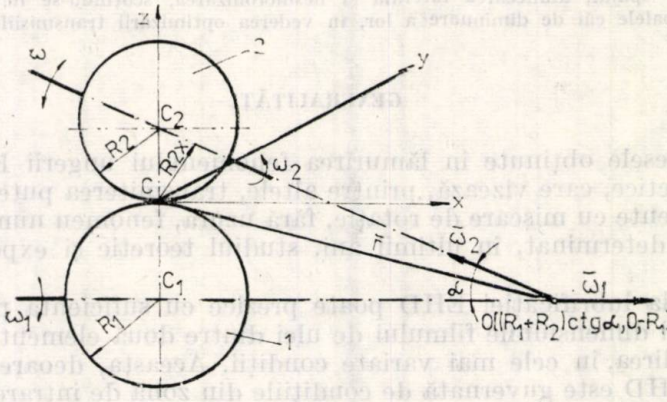


Fig. 1. — Mișcarea relativă a solidului nedeformabil.

În schimb, materialele reale sînt elastice, elementele se deformează local, așa cum prevede teoria contactului elastic, iar punctul de contact se transformă într-o arie de contact (fig. 2). În acest caz, diferența de viteză, între cele două elemente ce formează contactul, are trei componente [1] [3] [7]:

$$A\bar{V} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C}.$$

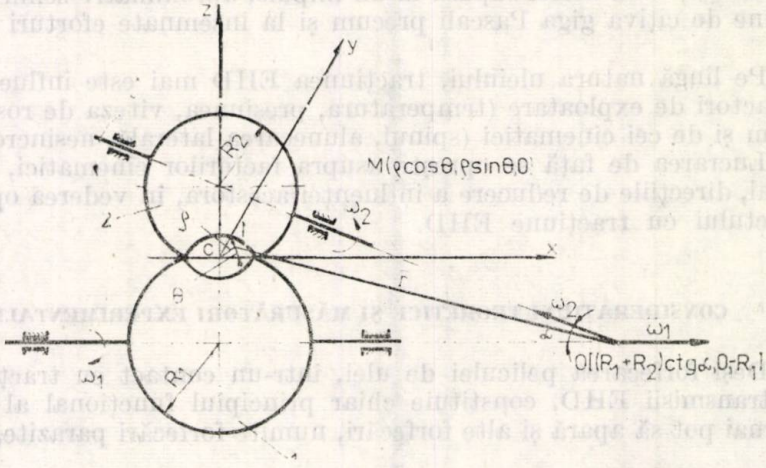


Fig. 2. — Mișcarea relativă a solidului deformabil.

Vectorul $\bar{A}$ dat de relația :

$$\bar{A} = \omega_1 \rho \operatorname{tg} \beta \left(\frac{R_1}{R_2} - \frac{\omega_{SL}}{\omega_1} \right) (\sin \theta \bar{i} - \cos \theta \bar{j})$$

are direcția vectorului unitar $(\sin\theta\bar{i} - \cos\theta\bar{j})$ care, evident, este situat în planul de contact perpendicular pe vectorul de poziție al punctului M. Se observă că, dacă ω_1, ω_{SL}, β sînt constante, ceea ce se întîmplă la o funcționare de regim, atunci $\bar{A}$ este proporțional, în modul, cu vectorul ρ; rezultă că vectorul $\bar{A}$ reprezintă pe aria de contact o viteză relativă de pivotare, cunoscută și sub numele de spin.

Vectorul $\bar{B}$, dat de relația :

$$\bar{B} = -\omega_{SL} R_2 \bar{j},$$

reprezintă, în cazul unui regim constant de funcționare, o viteză de alunecare relativă repartizată uniform pe întreaga suprafață de contact și orientată în sens opus direcției de rostogolire.

Vectorul $\bar{C}$, dat de relația :

$$\bar{C} = -\omega_1 \left(\frac{R_1}{R_2} + \frac{\omega_1 + \omega_{SL}}{\omega_1} \right) \sin \theta \bar{k},$$

indică o viteză de apropiere în zona de intrare a contactului și de revenire, în zona de ieșire din contact. Ea este cauzată de deformațiile hertziene ale celor două elemente, care însă nu afectează mișcarea lor relativă, în plan tangențial, și ca urmare nu se va lua în considerare, în continuare. Față de cazul precedent, diferența de viteză relativă dintre cele două corpuri prezintă două componente suplimentare : de spin și de apropiere-revenire.

La aceste mișcări relative, arătate mai sus, se adaugă și cea de alunecare laterală, caracterizată de o viteză relativă perpendiculară pe direcția de rostogolire, și apare datorită impreciziei de execuție și aliniere a axelor celor două corpuri, ce formează contactul ; o evidențiere a mișcărilor prezentate mai sus, în plan tangențial, arată figura 3. În figura 3a este ilustrat contactul, în cazul cel mai general, dintre două corpuri, iar în figura 3*b*, mișcările relative pe aria de contact, în plan tangențial.

Cu notațiile din figura 3, rezultă următoarele relații de calcul :

$V_{SP} = (\omega_a \sin \Theta_a - \omega_b \sin \Theta_b) \max (a, b)$ — viteza de spin,

$\zeta_{SP} = (\omega_a \sin \Theta_a - \omega_b \sin \Theta_b) \max (a, b)/u$ — parametrul adimensional al spinului,

$\zeta_{AL} = \operatorname{tg}\beta$ — parametrul adimensional al alunecării laterale.

Alunecarea longitudinală funcțională, care constituie singura forfecare utilă, din contact, este determinată de comportarea la forfecare a peliculei de ulei, comportare determinată de coeficientul maxim de tracțiune care poate varia de la 0,1 pentru uleiul sintetic Santotrac, la 0,055 pentru uleiul indigen, nespecializat T90, [1], [2] [3] [4] [8]. Orice creștere a ei are ca efect creșterea temperaturii, făcînd posibilă intrarea contactului în patinare. Pentru diminuarea alunecării longitudinale funcționale, se recomandă utilizarea de lubrifianți specializați, sarcini de apăsare cît mai mari, cu efect negativ asupra durabilității elementelor din contact, viteză cît mai mică, suficientă pentru formarea unei pelicule de lubrifiant, și o temperatură cît mai scăzută.

Forfecarea datorită spinului apare din cinematica contactului, fiind subiectul a numeroase lucrări de specialitate, [1] [2] [3] [4] [5] [6] [8]. Lucrările menţionate mai sus prezintă rezultate experimentale care arată

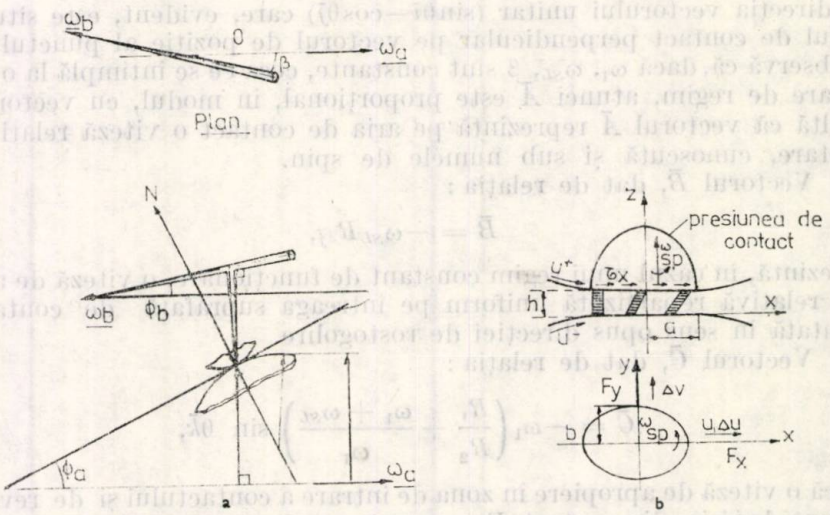


Fig. 3. — Mişcările relative între două corpuri aflate în contact : *a*) caz general ; *b*) aria de contact.

clar influenţa negativă a spinului asupra tracţiunii (fig. 4), ducînd la scăderea pantei curbelor de tracţiune şi la creşterea alunecării longitudinale, efect mai pronunţat cu cît viteza de rostogolire este mai mare, deci la pelicule mai groase ; acest efect depinde în mod esenţial de comportarea reologică a lubrifiantului.

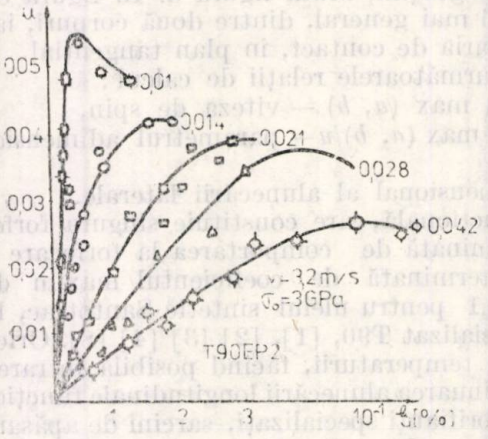


Fig. 4. — Curbe de tracţiune în prezenţa spinului.

De asemenea, spinul are o influenţă deosebită şi asupra coeficientului maxim de tracţiune (fig. 5, 6, 7). Se observă că la început panta de scădere este destul de mică, după care, aceasta creşte, stabilindu-se în acest fel pragul spinului ; pentru marea majoritate a uleiurilor el capătă valoarea de aproximativ 2,5%, după această valoare influenţa devine drastică.

Experimental s-a stabilit şi variaţia coeficientului maxim de tracţiune la diverşi parametri adimensionali ai spinului, funcţie de viteza de rostogolire (fig. 8, 9, 10). Se observă că o dată cu creşterea vitezei de rostogolire are loc o scădere a coeficientului maxim

de tracțiune. Literatura de specialitate [1] indică relații de calcul pentru forța de tracțiune, atît în prezența spinului, cît și fără spin. Raportul dintre cele două forțe este dat de o expresie de forma:

$$\frac{F_{xSP}}{F_x} = e^{\frac{-\alpha^* \beta \eta_c \omega^2 a^2}{12K}},$$

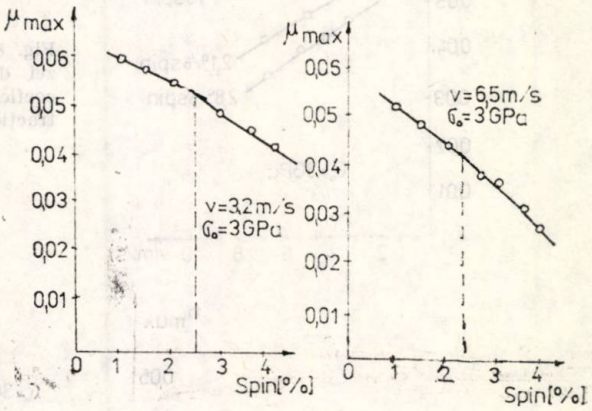


Fig. 5. — Influența spinului asupra coeficientului maxim de tracțiune T90EP2.

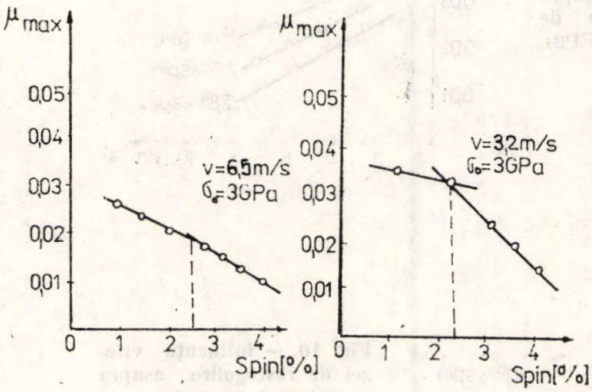


Fig. 6. — Influența spinului asupra coeficientului maxim de tracțiune T80EP2.

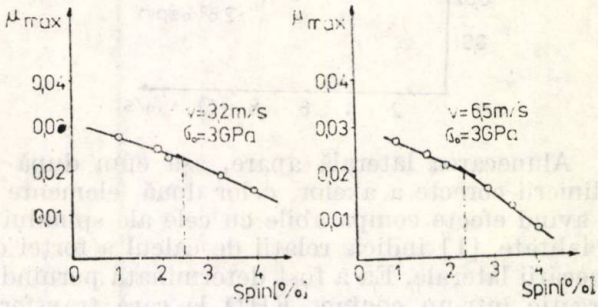


Fig. 7. — Influența spinului asupra coeficientului maxim de tracțiune TIN 25.

relație care concordă destul de bine cu rezultatele experimentale, unde η_e reprezintă viscozitatea efectivă din contact, evaluată conform [1], [10], α^* este un coeficient de ordinul de mărime al unității, iar K coeficient de conductibilitate termică.

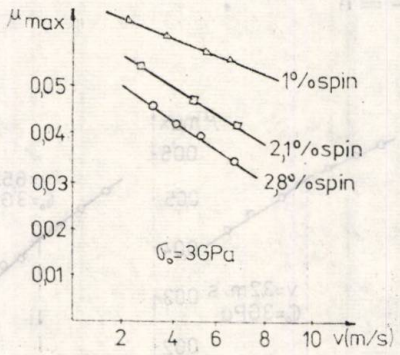


Fig. 8. — Influența vitezei de rostogolire asupra coeficientului maxim de tracțiune (ulei T90EP2).

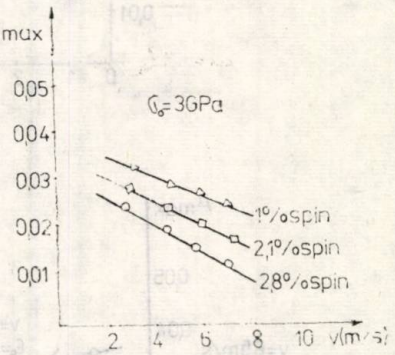


Fig. 9. — Influența vitezei de rostogolire asupra coeficientului maxim de tracțiune (ulei T80EP2).

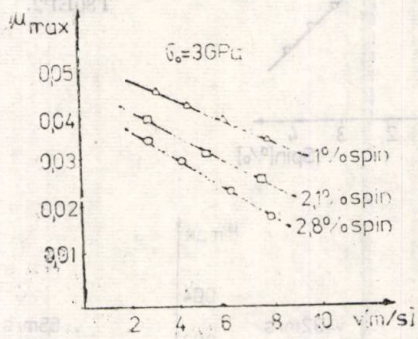


Fig. 10. — Influența vitezei de rostogolire asupra coeficientului maxim de tracțiune (ulei TIN 25).

Alunecarea laterală apare, așa cum după s-a menționat, datorită nealinierii corecte a axelor celor două elemente care alcătuiesc contactul, avînd efecte comparabile cu cele ale spinului (fig. 11). Literatura de specialitate [1] indică relații de calcul a forței de tracțiune în prezența alunecării laterale. Ea a fost determinată pornind de la ecuația bilanțului energetic într-un contact EHD la care transferul prin conductibilitate

este dominant. Raportul dintre forța de tracțiune în prezența alunecării laterale și fără ea, capătă forma:

$$\frac{F_{xAL}}{F_x} = e^{\frac{-\alpha^* \beta r_e \Delta v}{12\,K}},$$

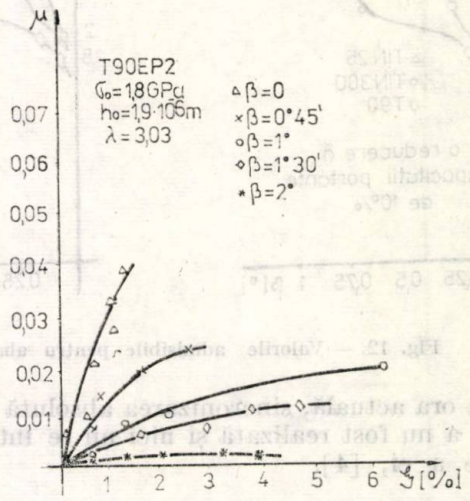


Fig. 11. — Curbe de tracțiune în prezența alunecării laterale.

valabilă pentru o comportare viscoasă, expresie verificată satisfăcător de datele experimentale [1].

Diaconescu, [9], utilizînd modelul Eyring pentru viscozitate, prezintă relații teoretice pentru coeficientul de tracțiune în cazul fluidelor viscoase, elastice și perfect plastice, și ele verificate de rezultatele experimentale date în [11] [12].

Întrucît optimizarea contactului din punct de vedere al alunecării laterale, impune abateri limită de la paralelismul celor două axe ale elementelor aflate în contact, în figura 12 s-a prezentat, funcție de tensiunea maximă de contact, valorile pentru unghiul de dezaxare care produc o reducere a capacității portante de 10%, respectiv 20%.

Nesincronizarea este caracteristică situației cînd se transmit puteri mari, prin divizarea puterii totale în fluxuri paralele. La baza apariției ei stă, fie abaterea poziției centrului elementului intermediar, fie abaterea de la poziția unghiulară comună a liniei ce unește contactele elementelor cu cele două discuri (fig. 13).

Prima are ca efect variația, în același sens, a mărimii razelor de dispunere a punctelor de contact de pe cele două discuri, iar a doua determină o variație, dar în sens contrar, a respectivelor raze. Datorită nesincronizării forța tangențială, deci și coeficientul de tracțiune, va varia considerabil de la un element la altul, cu consecințe negative, în repartizarea puterii transmise prin ramurile paralele ale fluxului de putere; la valori mai mari ale nesincronizării, este posibilă scoaterea unei ramuri a fluxului de putere din regim normal de funcționare și transferul în regim de patinare a curbei de tracțiune.

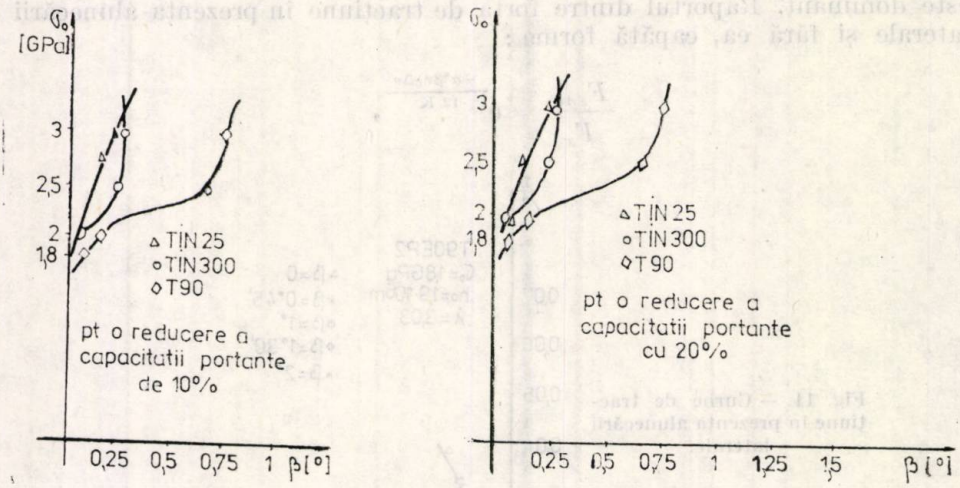


Fig. 12. — Valorile admisibile pentru abaterea de la paralelism.

La ora actuală, sincronizarea absolută a poziţiilor elementelor intermediare a nu fost realizată şi nici nu se întrevăd posibilităţi practice de realizare a ei, [4].

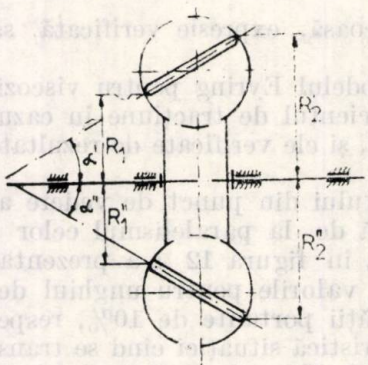


Fig. 13. — Abaterile care produc nesincronizarea.

CONCLUZII

În lucrare s-au prezentat factorii de influenţă ai tracţiunii EHD, scoţîndu-se în evidenţă existenţa celor cinematici, datorită deformaţiilor elastice de contact.

Pentru a optimiza un contact EHD cu tracţiune din punct de vedere al spinului, se recomandă : reducerea tensiunii de contact ; alegerea unui raport între dimensiunile geometrice ale corpului conducător şi condus, cît mai mic ; reducerea turaţiei de intrare la valori mici, dar suficientă pentru a forma o peliculă de ulei ; nedepăşierea unui parametru adimensional al spinului de 2,5%.

Pentru a optimiza un contact EHD cu tracțiune, din punct de vedere al alunecării laterale, se recomandă reducerea tensiunii de contact, reducerea turației de intrare, la valori mici, dar suficientă pentru a forma o peliculă de ulei; limitarea nealinierii corecte a axelor celor două elemente ce alcătuiesc contactul, la valori de max. 50′.

O primă cale de îmbunătățire a sincronizării elementelor intermediare constă în mărirea preciziei de execuție și de montaj a elementelor variatorului, soluție care conduce la ridicarea însemnată a prețului de cost. A doua cale de sincronizare constă în introducerea unor mecanisme suplimentare care să asigure poziționarea corectă a elementelor intermediare, dar care complică construcția și ridică și ea prețul de cost. Rezolvarea ideală a acestei probleme constă în rezolvarea unui dispozitiv de schimbare automată a elementelor intermediare.

Primit în redacție la 23 martie 1989

BIBLIOGRAFIE

1. I. M. CIORNEI, *Utilizarea efectelor elastohidrodinamice în construcția variatoarelor de turație de tip frontal cu bile*, *Teză de doctorat*, Institutul Politehnic, București, 1986.
2. I. M. CIORNEI, *Implications of Spin in EHD Traction Drives*, International Scientific Conference on Friction, Wear and Lubricants, Taschkent, 1985.
3. I. M. CIORNEI, E. N. DIACONESCU, *Căi de optimizare a contactului cu tracțiune din punct de vedere al forfecărilor parazite*, Seminarul „Stadiul actual și perspectiva cercetării contactului cu rostogolire", Suceava, 1985, p. 35—41.
4. O. S. CREȚU, *Cercetări privind capacitatea portantă și durabilitatea variatoarelor cu role toroidale cu aplicație la mașini-unelte*, *Teză de doctorat*, Institutul Politehnic, Iași, 1981.
5. B. K. DANIELS, *Traction Contact Optimization*, ASLE, **24**, 1 (1981).
6. B. K. DANIELS, *Non-Newtonian Termoviscoelastic EHD Traction from Combined Slip and Spin*, **ASLE, 23**, 2 (1980).
7. E. N. DIACONESCU, *Pitting under Traction in Heavily Loaded Point Contacts*, *Ph. s. Thesis*, University of London, 1975.
8. E. N. DIACONESCU, I. M. CIORNEI, *Tracțiunea elastohidrodinamică*, **T.C.M.M.1.** Editura Tehnică, București, 1987, p. 158—165.
9. E. N. DIACONESCU, *Efectul alunecării laterale asupra tracțiunii EHD*, **VAREHD 4**, Suceava, 1986, p. 127—138.
10. E. N. DIACONESCU, ș.a., *Un model simplu pentru distribuția tensiunilor de forfecare în filmele EHD de lubrifiant supuse la tracțiune*, **VAREHD 1**, Suceava, 1980.
11. H. GAGGERMAIER, *Untersuchungen zur Reibkraftübertraguna in Regel, Reibradgersiben in Bereich EHD Schmierung*, DISS, in München, 1977.
12. H. WINTER, H. GAGGERMEIER, *Versucihe zur Kraft-Übertragung in Verstell-Reibradgehieben in Bereich der EHD-Schmirung*, Konstruktion, **31**, 1 și 2 (1979).

J. CORNU, *Advanced Welding Systems, vol. 3 : TIG and Related Processes* (Sisteme de sudare avansate. WIG și procedee conexe). IFS Publications Ltd., UK, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York—London—Paris—Tokyo, 1988, 369 p.

Cartea reprezintă volumul al treilea al unei lucrări ample referitoare la procesele de sudare prin topire, respectiv caracteristicile îmbinărilor sudate prezentate prin prisma posibilităților de aplicare în sisteme mecanizate, automatizate și robotizate.

Volumul de față se referă la sudarea în mediu de gaz protector inert cu electrod nefuzibil (WIG), respectiv la procedeele conexe acestuia.

Capitolul întîi tratează procesul de sudare WIG considerat ca bază a sistemelor de sudare automatizate și robotizate. Pe lîngă informații generale privind performanțele procedeului, domeniile principale de utilizare, alegerea gazelor de protecție, stabilirea parametrilor de sudare, alegerea electrozilor nefuzibili și a materialelor de sudare, caracteristicile surselor de sudare, pregătirea pieselor pentru sudare, respectiv particularitățile sudării unor materiale de bază frecvent utilizate se prezintă date privind programarea secvențelor de sudare automate, reglarea tensiunii în timpul sudării și sudarea în impulsuri. O atenție specială este acordată problemelor legate de stabilizarea, devierea și oscilarea electromagnetică a arcului electric.

În capitolul al doilea sînt tratate problemele specifice sudării cu plasmă și microsudare cu plasmă. Astfel, sînt analizate variantele și domeniile de utilizare ale procedeelor de plasmă cu arc transferat, respectiv netransferat, sînt prezentate principalele tipuri de generatoare de plasmă folosite la sudare, respectiv cîteva particularități ale procedeului referitoare la sursele de curent pentru sudare, reglarea tensiunii arcului, pregătirea pieselor pentru sudare, introducerea unui material de sudare, stabilirea parametrlior de sudare și performanțele procedeului.

Calitatea sudurilor fiind determinată în mare măsură de atmosfera de protecție a arcului electric, în capitolul al treilea se discută aspectele legate de protecția gazoasă. Se prezintă proprietățile principalelor gaze utilizate la sudarea prin topire, date privind producerea și condițiile de puritate impuse acestora, precum și particularitățile utilizării gazelor inerte (argon, heliu), neutre (azot), reducătoare (hidrogen), oxidante (bioxid de carbon), respectiv a amestecurilor binare, ternare și cuaternare de gaze. În mod special sînt analizate gazele de protecție folosite la procedeele de sudare MIG/MAG (bioxid de carbon, amestec argon-oxigen și amestec argon-bioxid de carbon).

Capitolul al patrulea se referă la procedeele de sudare derivate din procedeele de bază (sudare MIG/MAG, sudare WIG și sudare cu plasmă). Astfel, sînt analizate performanțele și particularitățile procedeelor de sudare MAG cu protecție dublă (bioxid de carbon-argon), sudare MAG cu două sîrme, sudare plasma-MIG, sudare WIG cu arc constrîns, sudare WIG cu protecție dublă, sudare WIG cu sîrmă caldă și deflexie a arcului), sudare WIG multicatod, sudare plasma-WIG și sudare cu plasmă cu sîrmă caldă.

Sudarea cu laser este prezentată în capitolul al cincilea. Sînt indicate principiile de operare ale unui laser, principalele tipuri de laseri aplicați în sudură, precum și specificul interacțiunii radiației laser cu materialele metalice. Se descriu o serie de aplicații ale procedeului, și se analizează performanțele acestuia comparativ cu procedeele clasice de sudare.

Ultimele două capitole se referă la defectele îmbinărilor sudate prin topire, respectiv la controlul structurilor sudate. Se reține analiza sintetică a cauzelor și măsurilor de evitare a principalelor defecte specifice proceselor de sudare prin topire mecanizate. Referitor la acceptabilitatea defectelor de sudare se sugerează, avînd în vedere repetabilitatea operațiilor de sudare automată, respectiv rezultatele încercărilor de mecanica ruperii o mai mare toleranță față de defectele de sudare. În felul acesta printr-o coroborare a prescripțiilor de calitate cu mijloacele de control pertinente este posibilă definirea unor specificații de acceptare a defectelor flexibile care să permită reducerea cheltuielilor de execuție fără a altera siguranța în exploatare a structurii sudate respective.

Se apreciază că lucrarea, care se adresează în primul rînd specialiștilor din domeniul fabricației de structuri sudate, este utilă atît în faza de proiectare, cît și în cea de realizare a sudurilor, în special în varianta mecanizată, automatizată și robotizată.

D. Dehelean

J. HOLLINGUM, G. CASSFORD, *Speech Technology at Work* (Tehnologia vorbirii la lucru), IFS (Publications) Ltd, UK, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1988, 158 p., 46 fig.

Prelucrarea semnalului vocal a ajuns la o dezvoltare pe care o putem caracteriza ca „explozivă". Se vorbește, în momentul de față, de o tehnologie a vorbirii, adică un ansamblu de procese și metode de prelucrare a semnalului vocal în vederea îndeplinirii unor sarcini bine precizate.

De mulți ani în cercetare, produsele tehnologiei vorbirii au început abia recent să iasă din laboratoare și să devină comercial utilizabile. S-a început cu mesaje vorbite prin sinteză automată, apoi s-a trecut la recunoașterea de către computer a cuvintelor rostite și s-a ajuns la aplicații care presupun și recunoașterea și reproducerea vorbirii umane.

Autorii sînt de părere că tehnologia vorbirii a avansat deja la punctul în care aplicațiile recunoașterii și sintezei vocii sînt fezabile și atractive economic. Calculatoarele care să înțeleagă limbajul natural sînt încă un proiect de perspectivă îndepărtată, dar există domenii de aplicații bine precizate în care poate fi folosit un limbaj cu multe constrîngeri.

Scopul declarat al lucrării este de a prezenta, într-o manieră accesibilă, ce este posibil acum cu ajutorul tehnologiei vorbirii. Sînt incluse multe exemple de aplicații curente în industrie, comerț și alte domenii ; sînt detaliate cinci aplicații industriale curente ce combină atît recunoașterea, cît și sinteza automată a vorbirii. S-au ales aplicații în industrie deoarece, pe de o parte, acesta este domeniul în care se vizează cele mai importante dezvoltări ale tehnologiei vorbirii în următorii cîțiva ani și, pe de altă parte, aici sînt estimate cele mai mari dificultăți în recunoaștere : dacă un produs funcționează bine în mediu industrial, el va funcționa bine oriunde.

Capitolul 1, de exemplu, descrie aplicațiile posibile, avantajele și dezavantajele recunoașterii și sintezei automate ale vorbirii. Sînt considerate investițiile necesare introducerii unui echipament de conversație prin voce om-mașină și dacă acesta se justifică din diferite puncte de vedere.

Capitolul al 2-lea se ocupă de recunoaștere. Sînt expuse sumar, cîteva considerații teoretice despre semnalul vocal și sînt cele mai importante probleme pe care trebuie să le rezolve automatele de recunoaștere : mărimea vocabularului, coarticulările cuvintelor, diferențele de pronunțare de la vorbitor la vorbitor sau chiar pentru același vorbitor în circumstanțe diferite.

Sinteza automată este detaliată în capitolul al 3-lea. Se insistă, în special, pe existența „cipurilor de sinteză", mult răspîndite în diverse domenii de activitate. O variantă evoluată de reproducere a mesajelor vorbite o constituie sinteza unui vocabular practic nelimitat pornind de la un text introdus la claviatură. Produsele de acest gen necesită o serie de prelucrări suplimentare trecerii de la litere la sunete : considerarea regulilor de concatenare a cuvintelor în freze, ajustarea pronunției, considerarea prozodiei etc.

O atenție deosebită se acordă trecerii în revistă a domeniilor posibile de aplicare a tehnologiei vorbirii (capitolul 4) : folosirea telefonului ca terminal de calculator, aplicații industriale, aplicații în chirurgie, utilizarea în învățămînt, traducerile automate dintr-o limbă în alta, ajutor pentru handicapați, aplicații de „uz casnic" etc. Evantaiul domeniilor de utilizare poate fi oricînd completat de cititor conform unor cerințe specifice și imaginației fiecăruia.

De o deosebită importanță mi se pare considerarea „factorilor umani" în interacțiunea om mașină" (capitolul 5). Alegerea vocabularului, necesitatea unor vorbitori „dispuși să coopereze", calitatea (inteligibilitatea și naturalețea) răspunsurilor sintetizate de către mașină sînt tot atîtea probleme pe care trebuie să le rezolve atît producătorul, cît și utilizatorul automatelor de recunoaștere și sinteza vorbirii.

Un potențial beneficiar al acestor produse este învățat să pornească la drum (capitolul 6) : cum să aleagă domeniul de aplicație cît mai potrivit, cum să calculeze eficiența economică, cum să evalueze performanțele sistemelor de recunoaștere și sinteză automată.

În capitolul al 7-lea sînt descrise cele cinci sisteme industriale pe care autorii le consideră prototipuri în aplicarea cu foarte bune rezultate a tehnologiei vorbirii ; în sfîrșit, capitolul al 8-lea examinează tendințele de viitor.

Lucrarea este completată cu o listă „la zi" a sistemelor disponibile : firmele producătoare, performanțe, limitări.

Volumul este destinat unui cerc foarte larg de cititori : toți cei care vor să înțeleagă ce înseamnă, în momentul de față, tehnologia vorbirii ; dar mai ales, lucrarea este utilă factorilor de decizie în diverse domenii de activitate care pot evalua avantajele folosirii sistemelor de recunoaștere și sinteză automată a vorbirii.

C. Burileanu

W. WUNDERLICH, E. STEIN, *Finite Elemente. Anwendungen in der Baupraxis* (Elemente finite. Aplicații în practica construcțiilor), Ernst u. Sohn, Berlin, 1988, X+513 p., 507 fig.

Cea de a patra sesiune de comunicări privind utilizarea metodei elementelor finite (MEF) și a proiectării asistate de calculator (PAC) în R.F.G. a avut loc în 1988 la Universitatea din Bochum. Au fost prezentate 45 referate, grupate în zece secțiuni, de către specialiști din R.F.G., Austria și R.D.G. Volumul apărut cu ocazia celei de a treia sesiuni de la München a fost recenzat în nr. 6/1987 al acestei reviste.

Secțiunea A este formată din șase lucrări ce dau o privire de ansamblu asupra stadiului actual al dezvoltării MEF. Se apreciază că aplicarea acesteia mai întîmpină unele dificultăți datorită cunoașterii ei insuficiente de către utilizatori. Foarte importantă operație de modelare cu elemente finite este prezentată apoi sub aspectele ei cele mai importante. Urmează o lucrare privind modul cum în activitatea curentă de proiectare apare necesitatea aplicării MEF și cum acest lucru poate fi realizat eficient. Cîteva aplicații practice ale metodei sînt cuprinse într-un referat ce cuprinde și aprecieri privind tratarea problemelor neliniare. După o lucrare cu observații critice privind MEF se prezintă stadiul actual și perspectivele cuplării ei cu PAC.

În secțiunea B, referitoare la construcțiile din beton, sînt cuprinse patru referate. Primul se ocupă de calculul neliniar al plăcilor curbe din beton precomprimat ținînd seama de contracția, curgerea lentă și creșterea rezistențelor betonului, cu o modelare atentă a armăturii pretensionate. Urmează studiul cuplării unui sistem PAC cu un sistem expert pentru proiectarea grinzilor continue din beton armat. Analiza stării de tensiune în zona de transmitere a eforturilor de la armătura preîntinsă la beton face obiectul unui studiu ce a permis renunțarea la cercetări experimentale costisitoare. În încheiere se prezintă probleme legate de stabilitatea și capacitatea portantă a plăcilor subțiri tronconice din beton armat pentru turnuri de răcire hibride, pe baza unei analize neliniare — geometric și fizic.

Construcțiile metalice sînt tratate în cinci lucrări grupate în secțiunea C. În vederea fundamentării unor reguli tehnice pentru Eurocode 3 referitor la construcțiile metalice s-a utilizat MEF; pînă în 1992 normele pentru calculul construcțiilor în Europa de Vest vor fi unificate. Lucrarea următoare se referă la calculul cadrelor metalice cu ajutorul elementelor finite de grindă cu comportare neliniară. Un scurt rezumat prezintă calculul capacității portante a rezervoarelor. Pentru studiul comportării plăcilor de bază toriconice și a cupolelor s-a utilizat un program destinat calculului plăcilor de rotație neliniare, elastico-plastice sub încărcări oarecare și cu imperfecțiuni geometrice oarecare. Ultima lucrare din această secțiune tratează simularea cu elemente finite a comportării stîlpilor metalici sub acțiunea focului.

Secțiunea D este alcătuită din patru lucrări privind aplicații speciale ale MEF. După prezentarea unui procedeu de calcul pentru excitații variabile în timp ce se propagă rectiliniu într-un semispațiu stratificat se prezintă posibilități de aplicare a programelor de calcul interactive la compararea unor variante constructive și la aprecierea comportării unor structuri în caz de avarii. Studiul mișcării apelor subterane în vederea exploatării raționale a rezervelor de apă se face de asemenea cu MEF utilizînd tehnici PAC și procedee moderne de rezolvare a sistemelor de ecuații. Secțiunea se încheie cu prezentarea unui element finit special pentru analiza statică și dinamică a structurilor din elemente cu pereți subțiri.

Cele cinci lucrări ale secțiunii E tratează probleme de fundații și de construcții din beton. În primul rînd se pun în evidență deosebirile existente între calculul tensiunilor și deformațiilor terenului de fundație respectiv cel al structurilor de rezistență, cu referiri la probleme topologice și de combinare a MEF cu MEFR (metoda elementelor de frontieră). Elementele speciale pentru modelarea terenurilor și rocilor cum sînt cele infinite, de interfață și de ancorare fac obiectul următoarei lucrări. Proiectarea unui baraj din materiale locale și recalcularea acestuia pe baza deformațiilor măsurate la execuție, cu ajutorul MEF, a dat rezultate bune. Celelalte două lucrări se ocupă de studiul plăcilor carosabile ale tunelurilor respectiv de calculul rezervoarelor din beton precomprimat pentru gaze lichefiate sub acțiunea unui șoc de frig.

Secțiunea F grupează cinci lucrări privind cuplarea MEF-PAC. În prima lucrare se dezvoltă proiectarea completă cu ajutorul calculatorului, ce pornește de la un set de date de bază și trece de la planurile de arhitectură la cele de cofraj, la calculul static și de dimensionare și pînă la desenele de armare și de detalii. Pentru eliminarea punctelor slabe ale MEF — legate de introducerea datelor și de interpretarea rezultatelor — se prezintă tehnici PAC sprijinite de sisteme expert. Alte două lucrări se referă la integrarea MEF-PAC realizată la două institute de proiectare. Ultimul referat se ocupă de mai multe tipuri de cuplări MEF-PAC pentru construcții metalice.

Precizia rezultatelor obținute cu MEF face obiectul celor patru lucrări din secțiunea G. Se discută reducerea erorilor de discretizare, presupunîndu-se că erorile de rotunjire pot fi evitate. Generarea rețelei de elemente, optimizarea lățimii semibenzii matricei rigidităților și îmbunătățirea adaptivă a discretizării sînt tratate în lucrarea următoare. Ultimele două lucrări se ocupă de combinarea indicatorului de erori bazat pe norma energetică cu cel bazat pe tensiunea maximă, respectiv de procedee adaptive pentru structuri rezemate elastic, utilizîndu-se elemente de contact ierarhice.

Secțiunea H se ocupă de tuneluri. Cele cinci lucrări se referă la studii privind proiectarea unui tunel de cale ferată, calculul tunelurilor în terenuri nisipoase, experiența utilizării MEF la studiul noii tehnologii austriece pentru realizarea tunelurilor, studiul stabilității cavernelor saline pentru depozitări și depuneri și la un model de calcul neliniar al unui tunel dublu într-o rocă stratificată.

Secțiunea I cuprinde patru lucrări legate de utilizarea microcalculatoarelor tratînd proiectarea inginerească integrală, sisteme de bănci de date, avantaje și limite ale sistemelor cu elemente finite și sisteme PAC pentru proiectarea construcțiilor din lemn.

Ultimele trei referate sînt cuprinse în secțiunea I și se referă la alte dezvoltări ale MEF, utilizarea sistemelor expert și a rețelelor de comunicații pentru proiectarea în construcții.

Volumul de față, cu contribuții ale unor specialiști din învățămîntul superior, din institute de proiectare, întreprinderi de construcții și centre de calcul documentează din nou rolul central al MEF în analiza numerică a structurilor de rezistență. Dezvoltarea acestei metode continuă cerința definirii unor elemente simple, eficiente și robuste fiind încă mare. Este necesară de asemenea găsirea unor posibilități noi de generare și îmbunătățire adaptivă a discretizării, cît și realizarea unor progrese în cuplarea MEF-PAC. Cartea prezintă stadiul actual al aplicării MEF în mecanica construcțiilor, mai ales în RFG, cît și unele perspective ale acesteia, fiind foarte utilă tuturor celor ce se ocupă de probleme de mecanică aplicată.

R. Friedrich

TH. PFEIFFER, *CAD fur Bauingenieure. Konstruktionstechniken mit CAD — Programmen*, (PAC pentru ingineri constructori. Tehnici constructive cu program PAC), Friedrich Vieweg u. Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1989, 275 p., peste 1100 figuri.

Proiectarea asistată de calculator (PAC) oferă inginerului constructor posibilități noi de elaborare a documentației necesare realizării structurilor de rezistență și de colaborare cu arhitectul și cu ceilalți specialiști angajați în procesul de proiectare a construcțiilor.

Cartea de față, structurată pe șapte capitole, se bazează pe aproximativ 30 sisteme PAC specifice domeniului construcțiilor, astfel încît asigură o privire de ansamblu asupra posibilităților oferite de această tehnică eficientă și de viitor.

Primul capitol se ocupă de arhitectura hardware a sistemelor de calcul, prezentînd diferite tipuri de unități de intrare și de ieșire, modul de funcționare a unui calculator, memoria internă și cea externă, legarea în rețea a microcalculatoarelor și structura unui sistem PAC.

Bazele software sînt tratate în capitolul al 2-lea, referindu-se la elementele matematice, modelele de reprezentare bi- și tri- dimensionale, diferențele între construcția geometrică pe calculator și desenul convențional și la utilizarea meniurilor.

Capitolul al 3-lea cuprinde funcțiile de bază ale PAC. Se insistă asupra parametrilor sistemului, referitori la modul de reprezentare, la elemente și la manipulări. Urmează prezentarea funcțiilor ajutătoare, a poziționării și identificării.

Tehnicile de lucru în sistemul bidimensional (2D) sînt cuprinse în capitolul al 4-lea: trasarea elementelor de bază, funcțiile de modificare și de manipulare, prelucrarea desenelor existente, tehnica simbolurilor și a macrourilor, scrierea și cotarea. Capitolul al 5-lea tratează tehnicile de lucru tridimensionale (3D) inclusiv executarea secțiunilor și a desenelor în perspectivă.

Capitolul al 6-lea se ocupă de tehnici de armare cu plase sudate și cu bare izolate, ce au ajuns să fie foarte flexibile și eficiente, iar capitolul al 7-lea de cuplarea metodei elementelor finite cu tehnici PAC, ce mărește considerabil eficiența aplicării acestei metode importante pentru analiza numerică a structurilor de rezistență.

Cartea se încheie cu o listă de 66 sisteme PAC pentru construcții, 62 din R.F.G. și cîte unul din Austria, Elveția, Franța și Anglia.

Expunerea este foarte clară, iar cele peste o mie desene realizate de autor, cu ajutorul unui sistem PAC, ilustrează foarte bine subiectele tratate.

R. Friedrich

M. MUKHOPADYAY, *Matrix, Finite Element, Computer and Structural Analysis* (Calculul structurilor cu metode matriceale și elemente finite), Oxford & IBH Publishing Co., New Delhi (Bombay) Calcutta, 1987, XVI+383 pagini, 214 figuri, 41 tabele, 117 ref. bibl.

Apărută în seria „IIT Kharagpur — Oxford & IBH Series in Engineering and Technology", cartea profesorului indian se ocupă de calculul matriceal al structurilor elastice din bare și plăci plane sub acțiuni statice ; pe scurt se prezintă și analiza dinamică respectiv studiul stabilității acestor structuri. Materia tratată poate fi grupată în trei părți inegale ca volum : În prima parte a cărții (cap. 1—9) patru capitole au caracter general, iar următoarele cinci se referă la structuri din bare. Partea a doua (cap. 10—16) este inițiată de două capitole cu caracter general urmînd patru capitole privind analiza statică a plăcilor plane cu metoda elementelor finite și un capitol referitor la dinamica și stabilitatea structurilor. Ultima parte a cărții este formată dintr-un singur capitol (cap. 17) ce se ocupă de metoda diferențelor finite.

Primele două capitole cuprind noțiuni generale privind calculul matriceal și programarea în limbajul FORTRAN. Conceptele de bază ale analizei structurale sînt prezentate în capitolul al 3-lea, iar principiile energetice în capitolul al 4-lea. Capitolul al 5-lea constituie o introducere în cele două metode de bază ale calculului în stadiul elastic — metoda flexibilităților și metoda rigidităților. Abordarea ultimei metode în concordanță cu C.K. Wang face obiectul capitolului al 6-lea. Capitolul al 7-lea se referă la metoda rigidităților însă în varianta potrivită calculului automat, iar capitolul al 8-lea la tehnica substructurării pentru analiza sistemelor complexe. Calculul automat utilizînd metoda flexibilităților este prezentat în capitolul al 9-lea.

Capitolul al 10-lea cuprinde elemente de teoria elasticității, iar capitolul al 11-lea o introducere în metoda elementelor finite — sub forma unei extinderi la structurile continue a metodei rigidităților pentru structurile din bare. Starea plană de tensiuni este tratată în capitolele 12 și 13, ultimul referindu-se la elemente finite izoparametrice. Încovoierea plăcilor plane este tratată cu metoda elementelor finite în capitolul al 14-lea și cu metoda fișiilor finite în capitolul al 15-lea. În capitolul al 16-lea metoda elementelor finite servește analizei dinamice și de stabilitate a elementelor sub formă de bare și plăci plane.

Ultimul capitol al cărții se ocupă pe scurt de metoda diferențelor finite în calculul static, dinamic și de stabilitate.

Multe exemple de calcul ilustrează aplicarea practică a metodelor numerice de calcul tratate în carte. Cele zece programe de calcul static elastic listate se referă la grinzi cu zăbrele, cadre, rețele de grinzi și plăci plane ; se exemplifică introducerea datelor și se prezintă rezultatele obținute.

Cuprinzînd o prezentare foarte clară a metodelor numerice clasice și în primul rînd a metodei elementelor finite — cu programe de calcul în FORTRAN, cartea de față poate contribui substanțial la extinderea utilizării acestora pentru rezolvarea problemelor de mecanica corpurilor deformabile.

R. Friedrich

S. SCHÖNFELD, M. VOGEL, *CADT. Einführung und Anwendung* (PAC. Introducere și aplicare), VEB Verlag Technik, Berlin, 1987, 144 pagini, 60 figuri, 42 tabele, 207 ref. bibl.

Datorită dezvoltării microelectronicii și a descentralizării legate de aceasta, în ultimii zece ani utilizarea calculatoarelor s-a extins de la efectuarea calculelor la întocmirea documentației grafice a proiectelor, realizîndu-se proiectarea asistată de calculator (PAC).

După o prefață în care se arată necesitatea colaborării inginerilor PAC (ce elaborează programele și implementează PAC) cu utilizatorii PAC, capitolul 1 cuprinde o introducere în domeniu. Se pune în evidență influența PAC asupra structurii organizatorice și asupra personalului unei instituții și se discută bazele acestui sistem de proiectare: științele inginerești, informatica — matematica — tehnica de calcul și psihologia — sociologia — organizarea științifică a muncii. Capitolul al 2-lea se referă la caracteristicile graficii pe calculator în condițiile PAC, capitolul al 3-lea la premizele hardware iar capitolul al 4-lea la premizele software în vederea aplicării PAC. Se prezintă sistemele bi- și tridimensionale (2D și 3D) de reprezentare, dialogul om-mașină, organizarea datelor și prelucrarea integrată a informațiilor.

Cu pregătirea introducerii PAC în practică și organizarea aplicării acesteia se ocupă capitolele 5 și 6. Se prezintă 17 exemple de utilizare în construcția de mașini, utilaje și automobile. Elaborarea programelor pentru PAC face obiectul capitolului al 7-lea, iar capitolul al 8-lea se ocupă de perspectivele de dezvoltare a proiectării asistate de calculator, de extinderea aplicării calculatoarelor la manufacturare și de probleme privind sistemele expert.

Se poate aprecia că prezenta carte reprezintă un foarte bun ghid practic pentru implementarea proiectării asistate de calculator în multe domenii de activitate, o condiție esențială pentru mărirea productivității muncii.

R. Friedrich

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică :

- Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental : de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.
- Note (lucrări mai scurte cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni).
- Referate ştiinţifice şi tehnice, în care se expun stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.
- Recenzii asupra cărţii româneşti şi străine.

Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

- Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosfera rarefiată, în atmosfera densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).
- Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).
- Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).
- Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calcul al maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).
- Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri stabilite, analogii electrice şi hidraulice).
- Statica şi dinamica construcţiilor, metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).
- Tehnica măsurătorilor (aparate electrice, pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi izotopilor radioactivi în tehnică).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi din străinătate.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, 79717 Bucureşti 22, Calea Victoriei nr. 125, sectorul 1.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 49, nr. 2 martie — aprilie 1990

SUMAR

STUDII

N. PANDREA, Asupra ciocnirilor solidelor 117
ŞT. STAICU, Unele aspecte privind echilibrul rigidului supus la legături 133
F. DINCĂ, ELENA ZAHARIA, I. ROŞU, Asupra vibraţiilor longitudinale ale barelor cu secţiune variabilă 141
I. GROŞANU, GH. VĂDUVA, D. CICA, Metode pentru determinarea ecuaţiei cinematice a roboţilor 157
M. V. SOARE, D. IORDACHE, CORINA-MARIA ALDEA, Studiul stării de eforturi de membrană în turnurile în formă de tor hiperbolic 173
V. SZOLGA, Procedeu iterativ pentru determinarea răspunsului dinamic staţionar la fundaţii de maşini 185
A. PAVEL, Asupra unor indicatori de capacitate portantă ai recipientelor-butelii presurizate static, pneumatic sau hidraulic, la interior 193
M. POPESCU, TH. GHINDA, A. HALANAY, Calculul rezistenţelor hidraulice optime la sisteme speciale de protecţie la şoc hidraulic a staţiilor de pompare 207

NOTE

GH. BOGATU, Încărcarea de coincidenţă pentru elipsă 219

RECENZII 223

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE
MECANICĂ APLICATĂ

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Articolele, originale şi de înalt nivel ştiinţific, vor fi redactate într-un stil concis, evitîndu-se introducerile foarte lungi. Articolele vor fi dactilografiate la două rînduri, pe hîrtie albă de bună calitate, în două exemplare. Prima pagină trebuie să conţină titlul lucrării, numele autorului (autorilor) şi locul de muncă precum şi un rezumat de cel mult 150 cuvinte. Toate datele ştiinţifice şi tehnice prezentate trebuie formulate în unităţi SI. Formulele trebuie dactilografiate sau scrise cu cerneală, clar şi indicîndu-se caracterul literar (aldine, italice etc.). Indicii inferiori şi superiori trebuie indicaţi clar, pentru evitarea confuziilor. Ca semn zecimal se va utiliza virgula. Tabelele vor fi dactilografiate pe foi separate, cu indicarea titlurilor şi cu numerotarea în cifre arabe. Desenele şi diagramele trebuie executate în tuş, pe hîrtie de calc, la dimensiuni aproximativ duble faţă de acelea finale şi cu litere scrise cu îngrijire şi suficient de mari pentru a fi vizibile după reproducere. Referinţele bibliografice vor fi menţionate, pe cît posibil, în ordine alfabetică, la sfîrşitul articolului. În text vor fi indicate prin numărul din lista referinţelor, în paranteze drepte.

Referinţele din reviste vor conţine iniţiala şi numele autorului (autorilor), titlul articolului (subliniat cu o linie), numele revistei (prescurtat conform uzanţelor internaţionale), numărul volumului (subliniat dublu), numărul fasciculei şi anul de apariţie în paranteză, de exemplu :

1. S. AIZICOVICI, C. FETECĂU, Existence of Couette flows in second grade fluids, Rev. Roum. Sci. Techn — Méc. Appl., 31, 5 (1986).

Referirea la o carte se face indicînd iniţiala şi numele autorului (autorilor), titlul cărţi (subliniat cu o linie), editura, oraşul, anul apariţiei şi numerele paginilor, dacă referirea se face la o parte a cărţii, de exemplu :

3. W. FLÜGGE, Tensor Analysis and Continuum Mechanics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972, p. 93—99.

Manuscrisele vor fi trimise la adresa : 79717 Bucureşti 22, Calea Victoriei 125.

ASUPRA CIOCNIRILOR SOLIDELOR

de N. PANDREA

Institutul de subingineri, Pitești

În lucrare se stabilesc cu ajutorul teoriei șuruburilor proprietăți geometrice și relații analitice noi la ciocnirea solidelor. Se deduce pentru un solid expresia șurubului viteză după ciocnire, se arată că axele instantanee ale mișcării elicoidale de după ciocnire descriu cilindroidul lui Ball și se definește masa globală de ciocnire a unui solid, Relațiile obținute la ciocnirea solidului sînt aplicate la ciocnirea a două solide pentru exprimarea percuției, energiei cinetice a vitezelor pierdute și pierderii de energie cinetică cu ajutorul maselor globale de ciocnire.

1. INTRODUCERE

Aplicarea, în mecanica clasică și în teoria mecanismelor a metodelor de calcul hipercomplex respectiv a calculului cu numere complexe, șuruburi, cuaternioni etc, a permis pe de o parte prezentarea sub formă simplă a unor rezultate obținute pe baza calculului matematic clasic iar pe de altă parte a condus la stabilirea de noi proprietăți și de noi modele de calcul pentru sistemele mecanice.

Teoria matematică a șuruburilor, a cărei început este semnalat în prima parte a secolului al nouăsprezecelea [7] în lucrările lui Poinsot, Chasles, Möbius, Plucker, a fost dezvoltată și fundamentată de către Ball, Clifford, Kotelnikov, Study, Mises în perioada 1865—1925.

Primele aplicații ale acestei teorii [7] în mecanică sînt reprezentate de lucrările de statica sistemelor ale lui Mises și Kislitin precum și de lucrările de mecanica fluidelor ale lui Ciaplighin.

Prin lucrările lui F. Dimentberg apărute în perioada 1946—1950 și sintetizate în monografia [6], teoria șuruburilor este aplicată în analiza pozițională a mecanismelor.

R. Voinea și M. Atanasiu [29], [30] în perioada 1958—1963 studiază proprietățile proiective ale mulțimilor liniare de șuruburi, stabilesc noi proprietăți ale acestora și aplică cu succes rezultatele obținute la analiza structurală și cinematică a mecanismelor. Ulterior, M. Atanasiu în teza de doctorat susținută în anul 1964 stabilește metode generale de calcul mecanic al solidului și sistemelor mecanice în domeniul deplasărilor cinematice.

În perioada 1960—1970 se dezvoltă de către Freudenstein, Yang, Yuan și Woo [34] [35] calculul cinematic și pozițional prin utilizarea coordonatelor șurub, coordonatelor liniare și matricelor duale iar Roth

ST. CERC. MEC. APL., TOM 49, NR. 2, 1990, P. 117—132

BUDAPESTI MŰSZAKI EGY. KÖNYVTÁR 1848

[23] introduce teoria şuruburilor în sinteza geometrică a mecanismelor spaţiale.

Tot în această perioadă Braier şi Enescu [4] utilizează teoria cuaternionilor pentru analiza deplasărilor finite ale rigidului, Freudenstein şi Yang [35] introduc teoria cuaternionilor duali în analiza poziţională a mecanismelor iar Hunt [9] aplică teoria clasică a şuruburilor în studiul structural al sistemelor de corpuri referinduse în nenumărate cazuri la rezultatele obţinute de Voinea şi Atanasiu în lucrările [29], [30].

În mai multe lucrări precum şi în teza de doctorat susţinută în 1974, Popescu utilizează teoria cuaternionilor duali în studiul deplasărilor sistemelor de corpuri rigide iar împreună cu N. Ursu [22] stabilesc o metodă generală de analiză poziţională a mecanismelor spaţiale cu ajutorul cuaternionilor duali.

În [12] se arată că pe mulţimea şuruburilor, prin utilizarea operaţiei externe cu numerele duale se stabileşte o structură de modul iar prin utilizarea operaţiei externe cu numere reale se stabileşte o structură de corp. În primul caz prin utilizarea pseudonormei duale se deduc pentru şuruburi operaţii analoage cu cele obţinute pentru vectorii din spaţiul tridimensional. Aceste proprietăţi sînt utilizate apoi în analiza poziţională a mecanismelor cu ajutorul şuruburilor exprimate în baze ortogonale şi oblice, în analiza cinematică, în sinteza mecanismelor spaţiale, în studiul suprafeţelor reciproc înfăşurate precum şi la extinderea legii fundamentale a angrenării.

Ulterior R. Voinea şi N. Pandrea stabilesc în lucrarea [31] teoria matematică generală a cuplelor cinematice iar N. Pandrea şi D. Voiculescu în lucrarea [14] aplică teoria şuruburilor pentru studiul deplasărilor dreptei, cercului şi elicei.

Rezultatele obţinute în lucrarea [31] sînt deduse şi de K. Waldrom într-o lucrare publicată în revista Mechanism and Machine Theory în anul 1976.

D. Dudiţă şi D. Diaconescu, într-o serie de lucrări publicate după anul 1980, utilizînd teoria geometrică a şuruburilor sub forma în care aceasta a fost redată de R. Voinea şi M. Atanasiu [29], [30], abordează în mod detaliat structura cuplelor cinematice şi structura mecanismelor. Rezultatele obţinute în aceste lucrări stau la baza monografiei „Optimizarea structurală a mecanismelor" publicată în Editura tehnică în anul 1987.

După anul 1970 încep să apară din ce în ce mai multe lucrări în care se aplică teoria şuruburilor pentru calculul forţelor în mecanisme cu elemente rigide. În acest sens se pot cita lucrările [1], [2] şi [11].

În anul 1978 N. Pandrea în lucrarea [16] stabileşte pe baza teoriei şuruburilor metoda deplasărilor relative în calculul sistemelor elastice regăsind rezultatele deduse prin calcul clasic şi prezentate de J.Courbon în [5].

Această metodă este utilizată ulterior în determinarea centrului elastic [18], calculul mecanismelor de complianţă pentru roboţi industriali [17], calculul forţelor în mecanisme cu constrîngeri generale şi cu elemente elastice [21], studiul vibraţiilor rigidului cu legături elastice [19].

Metoda utilizată în aceste lucrări a constituit punctul de plecare pentru o serie de lucrări ale lui M. Tofan și I. Goia care în formulare proprie prin utilizarea unui calcul matematic extrem de compact regăsesc unele rezultate obținutede N. Pandrea sau deduc proprietăți noi ale sistemelor mecanice formate din bare elastice.

Într-o comunicare științifică făcută la sesiunea de Mecanică aplicată a Academiei R.S.R., în anul 1975 precum și în lucrarea [15] publicată în 1977, N. Pandrea aplică pentru prima dată teoria șuruburilor în studiul ciocnirilor, stabilind unele proprietăți geometrice ale n șcării corpurilor după ciocnire și stabilind expresia generală a pierderii de e nergie cinetică pentru două corpuri libere care se ciocnesc.

Ulterior St. Staicu preluind ideea utilizării șuruburilor în exprimare duală în studiul ciocnirilor, într-o serie de lucrări analizează unele aspecte ale ciocnirilor luînd în discuție pe rînd cazurile particulare ale mișcărilor corpurilor care se ciocnesc.

Rezultatele obținute în aceste lucrări sînt sintetizate apoi în cadrul unui capitol intitulat „Aplicarea teoriei vectorilor duali la studiul ciocnirii solidului" din cartea „Introducere în mecanica teoretică" publicată în anul 1983 în care însă printre cele 55 titluri bibliografice nu se află și lucrarea de referință [15].

În lucrarea „Aplicații ale calculului matriceal în mecanica solidelor", apărută în anul 1986 în Editura Academiei RSR St. Staicu studiază de asemenea ciocnirile cu ajutorul teoriei șuruburilor, deduce sub formă matriceală expresia pierderii de energie la „ciocnire a două corpuri și confirmă faptul că o relație „asemănătoare" a obținut și N. Pandrea în lucrarea [15].

În prezenta lucrare, pornind de la noțiunea de șurub în sensul considerat de F. Dimentberg [6], [7] se vor trata aspectele generale ale ciocnirilor solidelor și se va stabili analogia dintre ciocnire a două solide și ciocnirea centrică a două sfere.

2. ȘURUBURI. COORDONATE PLÜCKERIENE. PRODUS RECIPROC

Considerăm noțiunea de șurub în sensul general definit de Dimentberg în lucrările [6], [7] căruia îi atribuim simbolul $\hat{\bar{S}}$.

Unui șurub $\hat{\bar{S}}$ îi corespunde un torsor (motor) [7], [12] $(\bar{s}, \bar{s}^0)$ definit prin vectorul principal $\bar{s}$ și prin momentul $\bar{s}^0$, cei doi vectori fiind situați în punctul O, originea sistemului de referință $Oxyz$.

Din punct de vedere geometric, șurubul $\hat{\bar{S}}$ se caracterizează prin axa șurubului Δ, parametrul șurubului p și prin intensitatea s egală cu valoarea algebrică a vectorului principal $\hat{\bar{s}}$.

Parametrul șurubului p și ecuația vectorială a axei Δ se exprimă prin relațiile,

$$p = \frac{\bar{s}\,\bar{s}^0}{s^2}; \quad \bar{r} = \frac{\bar{s} \times \bar{s}^0}{s^2} + \lambda \bar{s} \tag{1}$$

unde λ este un parametru real.

Dacă pentru același șurub $\hat{\bar{S}}$ se consideră torsorul $(\bar{s}_1, \bar{s}_1^0)$ reprezentat în punctul O' originea sistemului de referință $O'x'y'z'$ atunci pentru a avea aceleași elemente geometrice rezultă condițiile :

$$\bar{s}_1 = \bar{s} \tag{2}$$

$$\bar{s}_1^0 = \bar{s}_0 + \overline{O'O} \times \bar{s} \tag{3}$$

Între mulțimea șuruburilor și mulțimea torsorilor reprezentați în punctul O există o corespondență biunivocă adică fiecărui șurub $\hat{\bar{S}}$ i se poate asocia un torsor și fiecărui torsor $(\bar{s}, \bar{s}^0)$ îi corespunde un șurub $\hat{\bar{S}}$ astfel încît putem scrie

$$\hat{\bar{S}} = (\bar{s}, \bar{s}^0) \tag{4}$$

Notînd cu (S_1, S_2, S_3), (S_4, S_5, S_6) proiecțiile vectorilor $\bar{s}$, $\bar{s}^0$ pe axele sistemului de referință $Oxyz$ atunci [7], $(S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6)$ reprezintă coordonatele plückeriene ale șurubului $\hat{\bar{S}}$.

Definind pe mulțimea șuruburilor operația de adunare,

$$\hat{\bar{S}}_1 + \hat{\bar{S}}_2 = (\bar{s}_1, \bar{s}_1^0) + (\bar{s}_2, \bar{s}_2^0) = (\bar{s}_1 + \bar{s}_2, \bar{s}_1^0 + \bar{s}_2^0) \tag{5}$$

și operația exterioară de înmulțire cu scalari,

$$\lambda\hat{\bar{S}} = \lambda(\bar{s}, \bar{s}^0) = (\lambda\bar{s}, \lambda\bar{s}^0) \tag{6}$$

unde $\lambda \in R$, R fiind corpul numerelor reale, se obține o structură de R — spațiu vectorial.

Baza canonică a acestui spațiu vectorial este dată de șuruburile,

$$\begin{gathered}\hat{\bar{E}}_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0); \ \hat{\bar{E}}_2 = (0, 1, 0, 0, 0, 0); \ \hat{\bar{E}}_3 = (0, 0, 1, 0, 0, 0) \\ \hat{\bar{E}}_4 = (0, 0, 0, 1, 0, 0); \ \hat{\bar{E}}_5 = (0, 0, 0, 0, 1, 0); \ \hat{\bar{E}}_6 = (0, 0, 0, 0, 0, 1)\end{gathered} \tag{7}$$

iar relația (4) se scrie

$$\hat{\bar{S}} = \sum_{i=1}^{6} S_i \hat{\bar{E}}_i \tag{8}$$

Axele șuruburilor $\hat{\bar{E}}_1, \hat{\bar{E}}_2, \hat{\bar{E}}_3$ coincid cu axele Ox, Oy, Oz iar axele șuruburilor $\hat{\bar{E}}_4, \hat{\bar{E}}_5, \hat{\bar{E}}_6$ sînt dreptele de la infinit ale planelor Oyz, Oxz, Oxy.

În general, axa șurubului definit prin torsorul $(O, \bar{s}^0)$ este dreapta de la infinit a planului perpendicular pe $\bar{s}^0$.

Produsul reciproc a două șuruburi,

$$\hat{\bar{S}}_1 = (S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{15}, S_{16}), \ \hat{\bar{S}}_2 = (S_{21}, S_{22}, S_{23}, S_{24}, S_{25}, S_{26})$$

(se notează prin simbolul $*$) se definește cu relația,

$$\hat{\bar{S}}_1 * \hat{\bar{S}}_2 = \hat{\bar{S}}_2 * \hat{\bar{S}}_1 = \sum_{i=1}^{3} (S_{1i}, S_{2,i+3} + S_{1,i+3}, S_{2i}) \tag{9}$$

și așa cum se arată în lucrările [6], [7], [12] este invariant în raport cu sistemul de referință avînd valoarea :

$$\hat{\bar{S}}_1 * \hat{\bar{S}}_2 = s_1 s_2 [(p_1 + p_2) \cos \alpha - d \sin \alpha] \tag{10}$$

unde s_1, s_2 sînt valorile algebrice ale vectorilor principali s_1, s_2 p_1, p_2 sînt parametrii, α este unghiul dintre axele șuruburilor $\hat{\bar{S}}_1$, $\hat{\bar{S}}_2$ iar d este distanța dintre aceste axe.

Dacă produsul reciproc este nul atunci șuruburile $\hat{\bar{S}}_1$, $\hat{\bar{S}}_2$ se numesc reciproce.

3. VECTORI DUALI

Mulțimea,

$$A = \{(x, y) \mid x \in R, y \in R\} \tag{11}$$

înzestrată cu legile de compoziție

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ (x_1, y_1)\ (x_2, y_2) &= (x_1 x_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned} \tag{12}$$

formează un inel cu element unitate și cu divizori ai lui zero.

Prin identificarea elementelor $(x, 0) \in A$ cu elementele $x \in R$ respectiv considerînd egalitatea $(x, 0) = x$ rezultă că elementele $\hat{z}$, ale mulțimii A se pot scrie sub forma.

$$z = x + y\varepsilon, \quad x \in R, y \in R \tag{13}$$

unde ε este operatorul lui Clifford :

$$\varepsilon = (0, 1); \quad \varepsilon^2 = (0, 0) = 0 \tag{14}$$

Elementele de forma (13) se numesc numere duale iar mulțimea A se numește mulțimea numerelor duale.

Cu ajutorul operatorului Clifford șurubul $\hat{\bar{S}} = (\bar{s}, \bar{s}^0)$ se scrie sub forma

$$\hat{\bar{S}} = \bar{s} + \varepsilon \bar{s}^0 \tag{15}$$

iar mulțimea șuruburilor înzestrată cu legea de compoziție internă de sumare și cu legea de compoziție externă de înmulțire cu scalari din inelul A, determină o structură de modul. Elementele de forma $\bar{s} + \varepsilon\bar{s}^0$ se numesc vectori duali. Aceștia ținînd seama de proiecțiile vectorilor $\bar{s}$, $\bar{s}^0$ pe axele triedrului $Oxyz$, au coordonatele duale $(S_1 + \varepsilon S_4, S_2 + \varepsilon S_5, S_3 + \varepsilon S_6)$ de unde rezultă că modulul vectorilor duali are dimensiunea egală cu trei.

În vederea înțelegerii acestor aspecte să considerăm mulțimea punctelor dintr-un plan în care se alege sistemul de axe Oxy. Asociind unui punct M din plan coordonatele (x, y) rezultă că mulțimea punctelor din plan se scrie

$$M = \{(x, y) \mid x \in R, y \in R\} \tag{16}$$

Pe această mulțime definim mai întîi legea de adunare,

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \tag{17}$$

În continuare definind legea internă de înmulțire

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \tag{18}$$

se obține structura de corp a numerelor complexe, definind legea internă de înmulțire

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2, x_1y_2 + x_2y_1) \tag{19}$$

se obține structura de inel a numerelor duale, și definind legea externă de înmulțire

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y), \quad \lambda \in R \tag{20}$$

se obține o structură de R spațiu vectorial.

Am obținut astfel trei structuri diferite pe aceeași mulțime M definită prin relația (16) care constituie mulțimea punctelor unui plan.

În mod analog pe mulțimea șuruburilor (prin șurub înțelegînd dreapta suport și cei doi parametri scalari) se poate defini fie structura de R spațiu vectorial în care șurubul se exprimă prin cele șase coordonate plückeriene fie structura de modul în care șurubul se exprimă cu ajutorul vectorilor duali respectiv a coordonatelor duale.

În acest ultim caz prin considerarea [6], [7] unui produs scalar, a unui produs direct și a unei pseudonorme se ajunge la structura de algebră pseudonormată a vectorilor duali.

Reținem deci ideea că vectorii duali se exprimă sub forma $\bar{s} + \varepsilon\bar{s}^0$, unde $\varepsilon^2 = 0$ și au ca imagine geometrică șurubul caracterizat de dreapta Δ parametrul p și intensitatea s definite prin relațiile (1).

Dacă se notează cu $\bar{r}$ vectorul de poziție al unui punct al dreptei Δ, atunci momentul $\bar{s}^0$ verifică relația

$$\bar{s}^0 = p\bar{s} + \bar{r} \times \bar{s} \tag{21}$$

Se poate conveni a scrie vectorul dual sub forma $(\bar{s}, \bar{s}^0)$ cu condiția de a respecta regulile calculului cu numere duale, caz în care produsul scalar al vectorilor duali $\bar{s}_1 + \varepsilon\bar{s}_1^0$, $\bar{s}_2 + \varepsilon\bar{s}_2^0$ se va scrie $(\bar{s}_1\ \bar{s}_2, \hat{\bar{s}}_1, \bar{s}_2^0 + \bar{s}_2\bar{s}_1^0)$ în loc de $\bar{s}_1\bar{s}_2 + \varepsilon(\bar{s}_1\bar{s}_2^0 + \bar{s}_2\bar{s}_1^0)$.

Dacă se acceptă această convenție trebuie avut în vedere că vectorul moment trebuie să respecte relația (21).

Pentru torsorul cinematic al vitezelor rigidului reprezentat în punctul O corespunde vectorul dual $\bar{\omega} + \varepsilon\bar{v}_0$ sau $(\bar{\omega}, \bar{v}_0)$ deoarece avem relația

$$\bar{v}_0 = p\bar{\omega} + \bar{r} \times \bar{\omega} \tag{22}$$

unde $p = \dfrac{\bar{\omega}\bar{v}_0}{\omega^2}$ iar $\bar{r}$ este vectorul de poziție în raport cu O al unui punct situat pe axa instantanee a mișcării elicoidale.

Nu se poate deci accepta convenția că expresia $(\bar{v}_0, \bar{\omega})$ reprezintă un vector dual așa cum consideră unii autori decît dacă se consideră o definiție proprie în acest sens.

De fapt dacă demonstrațiile nu reclamă calculul propriu zis cu vectori duali se recomandă a defini expresia $(\bar{v}_0, \bar{\omega})$ drept bivector și nu drept vector dual.

4. ȘURUBUL IMPULS ȘI ENERGIA CINETICĂ A RIGIDULUI

Pentru studiul ciocnirilor vom folosi structura de R-spațiu vectorial pe mulțimea șuruburilor respectiv vom utiliza șuruburile scrise cu ajutorul coordonatelor plückeriene.

În acest sens să considerăm un rigid în mișcare de masă m și cu centrul de greutate situat în punctul C (fig. 1).

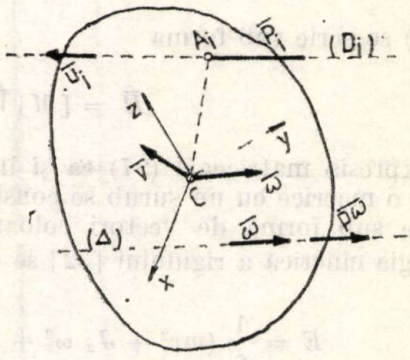


Fig. 1. — Ciocnirea solidului.

Alegem ca referință sistemul triortogonal $Cxyz$ al axelor principale centrale de inerție față de care J_x, J_y, J_z sînt momentele principale de inerție și fie $\bar{\omega}$ viteza unghiulară a rigidului iar $\bar{v}$ viteza centrului de greutate.

Vectorii $\bar{\omega}$, $\bar{v}$ definesc șurubul viteză $\hat{\bar{V}}$ cu axa (Δ) (fig. 1) și parametrul $p = \frac{\bar{\omega}\bar{v}}{\omega^2}$ având față de sistemul $Cxyz$ ccordonatele plückeriene :

$$\hat{\bar{V}} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z, v_x, v_y, v_z) \tag{23}$$

Deoarece momentul cinetic al solidului față de un punct oarecare B se scrie $\bar{K}_B = \overline{BC} \times m\bar{v} + \bar{K}_C$, unde $\bar{K}_C$ este momentul cinetic față de centrul de greutate, rezultă că vectorii $m\bar{v}$, $\bar{K}_C$ reprezintă torsorul șurubului impuls $\hat{\bar{H}}$ și cum momentul cinetic $\bar{K}_C$ are expresia,

$$\bar{K}_C = J_x \omega_x \bar{i} + J_y \omega_y \bar{j} + J_z \omega_z \bar{k} \tag{24}$$

șurubul $\hat{\bar{H}}$ în coordonate plückeriene se scrie

$$\hat{\bar{H}} = (mv_x, mv_y, mv_z, J_x \omega_x, J_y \omega_y ; J_z \omega_z) \tag{25}$$

Utilizînd matricea de inerție

$$[M] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m \\ J_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_z & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{26}$$

relația (25) se scrie sub forma

$$\hat{\bar{H}} = [M]\,\hat{\bar{V}} \tag{27}$$

În expresia matriceală (27) ca și în calculele algebrice în care se înmulțește o matrice cu un șurub se consideră organizarea coordonatelor plückeriene sub formă de vectori coloană.

Energia cinetică a rigidului [32] se exprimă prin relația

$$E = \frac{1}{2}(mv^2 + J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2) \tag{28}$$

sau

$$E = \frac{\hat{\bar{V}} * [M]\,\hat{\bar{V}}}{2} \tag{29}$$

5. TEOREMELE GENERALE LA CIOCNIREA RIGIDULUI

Considerăm că asupra rigidului, acționează simultan (fig. 1) percuțiile $\bar{P}_i$ în punctele A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Versorul $\bar{u}_i$ al axei suport a percuției $\bar{P}_i$ împreună cu axa (D_i) definesc șurubul unitar de torsor $(\bar{u}_i, \overline{CA}_i \times u_i)$ având coordonatele plückeriene,

$$U_i = (a_i, b_i, c_i, d_i, e_i f_i) \tag{30}$$

unde

$$a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1, \; a_i d_i + b_i e_i + c_i f_i = 0 \tag{31}$$

și deci șurubul percuție $\hat{\bar{P}}_i$ se scrie :

$$\hat{\bar{P}}_i = P_i \hat{\bar{U}}_i \tag{32}$$

Ținînd seama de acestea, teoremele impulsului și momentului cinetic scrise vectorial sub forma,

$$\bar{H}' - \bar{H} = \sum_{i=1}^{n} P_i \bar{u}_i ; \quad \bar{K}'_c - \bar{K}_c = \Sigma P_i (\overline{CA}_i \times \bar{u}_i) \tag{33}$$

cu ajutorul șuruburilor se scriu

$$\hat{\bar{H}}' - \hat{\bar{H}} = \sum_{i=1}^{n} P_i \hat{\bar{U}}_i \tag{34}$$

sau

$$[M](\hat{\bar{V}}' - \hat{\bar{V}}) = \sum_{i=1}^{n} P_i \hat{\bar{U}}_i \tag{35}$$

unde prin $\hat{\bar{V}}'$ s-a notat șurubul viteză după ciocnire.

Relația (35) reprezintă teorema impulsului la ciocnirea rigidului.

Energia cinetică a vitezelor pierdute E_p și variația energiei cinetice ΔE se scriu :

$$E_p = \frac{1}{2}(\hat{\bar{V}}' - \hat{\bar{V}}) * [M](\hat{\bar{V}}' - \hat{\bar{V}}) \tag{36}$$

$$\Delta E = \frac{1}{2}\hat{\bar{V}} * [M]\hat{\bar{V}} - \frac{1}{2}\hat{\bar{V}}'[M]\hat{\bar{V}}' \tag{37}$$

și ținînd seamă de egalitatea

$$\hat{\bar{V}}' * [M]\hat{\bar{V}} = \bar{V} * [M]\hat{\bar{V}}' \tag{38}$$

rezultă

$$E_p = \Delta E + \sum_{i=1}^{n} P_i(\hat{V}' * \hat{U}_i) \tag{39}$$

În cazul în care șurubul viteză $\hat{V}'$ după ciocnire este reciproc față de dreptele suport ale percuțiilor atunci suma din relația (39) este nulă și se obține teorema lui Carnot potrivit căreia variația de energie cinetică este egală cu energia cinetică a vitezelor pierdute.

Ținînd seama de faptul că produsul reciproc $\hat{V}' * \hat{U}_i$ reprezintă proiecția vitezei punctului A_i pe dreapta (D_i) rezultă că teorema lui Carnot se aplică în cazul în care vitezele punctelor A_i după ciocnire sînt perpendiculare pe percuțiile $\bar{P}_i$.

Notînd proiecțiile vitezelor $\bar{v}_i$ ale punctelor A_i pe dreptele (D_i) prin $\bar{v}_{in}$, relația (39) se scrie :

$$E_p = \Delta E + \sum_{i=1}^{n} P_i v'_{in} \tag{40}$$

Cuplînd în alt mod termenii relației (36) rezultă

$$E_p = -\Delta E - \sum_{i=1}^{n} P_i \hat{V} * \hat{U}_i \tag{41}$$

respectiv

$$E_p = -\Delta E - \sum_{i=1}^{n} P_i v_{in} \tag{42}$$

Relația (41) arată că dacă șurubul viteză înainte de ciocnire este reciproc față de șuruburile percuție, atunci variația de energie cinetică este egală și de semn opus cu energia cinetică a vitezelor pierdute, respectiv energia cinetică a rigidului crește prin ciocnire.

6. CIOCNIREA SOLIDULUI LIBER

Considerăm rigidul liber în mișcare asupra căruia acționează percuția $\bar{P}$ (fig. 2) de versor $\bar{u}$ și axă (D), axa $(D$ fiind situată la distanța $\xi = |\overline{CB}|$ de centrul de greutate C.

Șurubul unitar $\hat{U}$ are coordonatele plückeriene (a, b, c, d, e, f) unde a, b, c sînt proiecțiile pe axe ale versorului $\bar{u}$ iar d, e, f reprezintă proiecțiile pe axe ale momentului versorului $\bar{u}$ respectiv d, e, f reprezintă momentele în raport cu axa (D) a versorilor $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

Aplicînd teorema impulsului (35) rezultă,

$$[M](\hat{V}' - \hat{V}) = P\hat{U} \tag{43}$$

sau

$$\hat{V}' = V + P[M]^{-1}\hat{U} \tag{44}$$

unde,

$$[M]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & J_x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_z^{-1} \\ m^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{45}$$

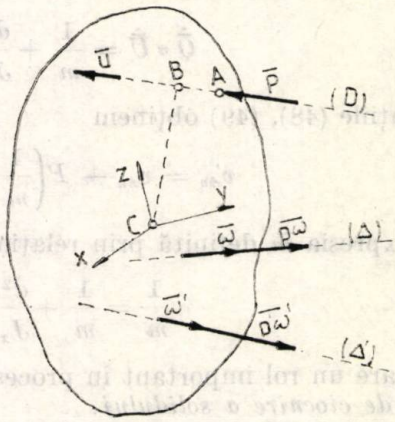


Fig. 2. — Ciocnirea solidului liber.

Notînd

$$\hat{\bar{Q}} = [M]^{-1}\,\hat{\bar{U}} \tag{46}$$

rezultă

$$\hat{\bar{Q}} = \left(\frac{d}{J_x}, \frac{e}{J_y}, \frac{f}{J_z}, \frac{a}{m}, \frac{b}{m}, \frac{c}{m}\right) \tag{47}$$

și relația (44) devine

$$\hat{\bar{V}}' = \hat{\bar{V}} + P\hat{\bar{Q}} \tag{48}$$

Rezultă că șurubul viteză $\hat{\bar{V}}'$ după ciocnire are două componente și anume, șurubul viteză $\hat{\bar{V}}$ înainte de ciocnire și șurubul $P\hat{\bar{Q}}$ care reprezintă variația de viteză datorită ciocnirii.

Dacă poziția dreptei (D) este invariabilă, atunci șurubul viteză $\hat{\bar{V}}'$ după ciocnire depinde numai de intensitatea P a percuției.

După cum se arată în lucrarea [9] axa șurubului $\hat{\bar{V}}'$ intersectează ortogonal perpendiculara comună a dreptelor (D), (Δ) (fig. 2) și descrie atunci cînd P variază, suprafața riglată care se numește cilindroidul lui Ball.

Diferite cazuri ale mișcării după ciocnire au fost studiate în lucrarea [15].

Știind că produsele reciproce $\hat{\bar{V}} * \hat{\bar{U}}, \hat{\bar{V}}' * \hat{\bar{U}}$ reprezintă [7], [12] proiecțiile vitezelor $\bar{v}_A, \bar{v}'_A$ ale punctului A înainte și după ciocnire pe direcția axei (D), (fig. 2) rezultă relațiile.

$$\begin{aligned} \hat{\bar{V}} * \hat{\bar{U}} &= \bar{v}_A \bar{u} = v_{An} \\ \hat{\bar{V}} * \hat{\bar{U}} &= \bar{v}'_A \bar{u} = v'_{An} \end{aligned} \tag{49}$$

și ținînd seama de expresia

$$\hat{\bar{Q}} * \hat{\bar{U}} = \frac{1}{m} + \frac{d^2}{J_x} + \frac{e^2}{J_y} + \frac{f^2}{J_z} \tag{50}$$

din relațiile (48), (49) obținem

$$v'_{An} = v_{An} + P\left(\frac{1}{m} + \frac{d^2}{J_x} + \frac{e^2}{J_y} + \frac{f^2}{J_z}\right) \tag{51}$$

Expresia $\tilde{m}$ definită prin relația

$$\frac{1}{\tilde{m}} = \frac{1}{m} + \frac{d^2}{J_x} + \frac{e^2}{J_y} + \frac{f^2}{J_z} \tag{52}$$

și care are un rol important în procesul de ciocnire o vom denumi *masa globală de ciocnire a solidului*.

Cu ajutorul parametrului $\tilde{m}$ expresia (51) devine,

$$v'_{An} = v_{An} + \frac{P}{\tilde{m}} \tag{53}$$

și este analoagă cu expresia,

$$v' = v + \frac{P}{m} \tag{54}$$

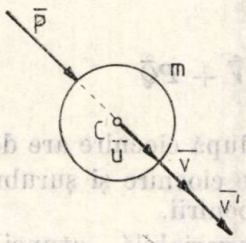


Fig. 3. — Ciocnirea sferei.

care se obține la ciocnirea centrică a unei sfere (fig. 3).

Energia cinetică a vitezelor pierdute (36) ținînd seama de relațiile (46), (47), (48), (52) se scrie,

$$E_p = \frac{P^2}{2\tilde{m}} \tag{55}$$

și este analoagă cu energia cinetică a vitezelor pierdute în cazul ciocnirii centrice a sferei caz în care avem :

$$E_p = \frac{P^2}{2m} \tag{56}$$

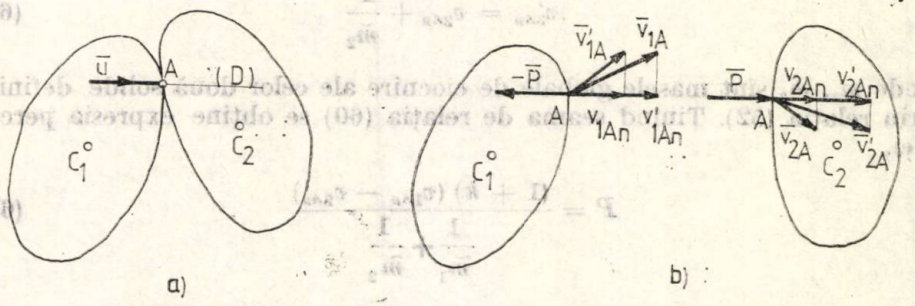


Fig. 4. — Ciocnirea a două solide.

Variația de energie cinetică ΔE, ținînd seama de relația (42) se scrie

$$\Delta E = -E_p - P\hat{V} * \hat{U} \tag{57}$$

sau

$$\Delta E = -\frac{P^2}{2\tilde{m}} - Pv_{An} \tag{58}$$

și este analoagă cu variația energiei cinetice la ciocnirea centrică a sferei

$$\Delta E = -\frac{P^2}{2m} - Pv \tag{59}$$

7. CIOCNIREA A DOUĂ CORPURI SOLIDE

Considerăm două solide care se ciocnesc fără frecare în punctul A (fig. 4, a).

În acest caz axa suport (D) a percuțiilor $\bar{P}$, $-\bar{P}$, este normala comună din punctul A (fig. 4, b).

Coeficientul de restituire k definit ca raportul dintre percuția din faza de comprimare și percuția din faza de destindere ținînd seama de notațiile din figura 4, b, se exprimă în final [15] prin relația :

$$k = \frac{v'_{1An} - v'_{2An}}{v_{2An} - v_{1An}} \tag{60}$$

unde $\bar{v}_{1A}$, $\bar{v}_{2A}$, $\bar{v}'_{1A}$, $\bar{v}'_{2A}$ sînt vitezele punctului A aparținînd celor două solide înainte și după ciocnire iar v_{1An}, v_{2An}, v'_{1An}, v'_{2An} sînt proiecțiile acestor viteze pe normala comună (fig. 4, b).

Aplicînd relaţia (53) pentru fiecare solid rezultă,

$$v'_{1An} = v_{1An} - \frac{P}{\tilde{m}_1} \tag{61}$$

$$v'_{2An} = v_{2An} + \frac{P}{\tilde{m}_2} \tag{62}$$

unde $\tilde{m}_1$, $\tilde{m}_2$ sînt masele globale de ciocnire ale celor două solide definite prin relaţia (52). Ţinînd seama de relaţia (60) se obţine expresia percuţiei,

$$P = \frac{(1+k)(v_{1An} - v_{2An})}{\frac{1}{\tilde{m}_1} + \frac{1}{\tilde{m}_2}} \tag{63}$$

analoagă cu percuţia de la ciocnirea centrică a două sfere (fig. 5)

$$P = \frac{(1+k)(v_1 - v_2)}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} \tag{64}$$

Energia cinetică a vitezelor pierdute se calculează cu ajutorul relaţiilor (55), (64) şi rezultă

$$E_p = E_{p_1} + E_{p_2} = \frac{P^2}{2}\left(\frac{1}{\tilde{m}_1} + \frac{1}{\tilde{m}_2}\right) \tag{65}$$

sau

$$E_p = \frac{(1+k)^2 (v_{1An} - v_{2An})^2}{2\left(\frac{1}{\tilde{m}_1} + \frac{1}{\tilde{m}_2}\right)} \tag{66}$$

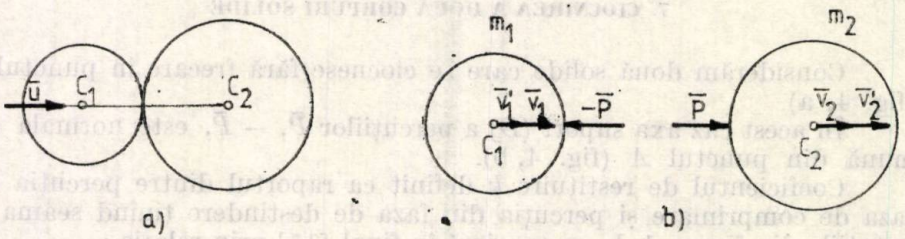


Fig. 5. — Ciocnirea centrică a două sfere.

În mod analog pierderea de energie cinetică (variaţia energiei cinetice) se calculează cu ajutorul relaţiei (58),

$$\Delta E = \Delta E_1 + \Delta E_2 = -\frac{P^2}{2\tilde{m}_1} + P v_{1An} - \frac{P^2}{2\tilde{m}_2} - P v_{2An} \tag{67}$$

și ținînd seama de expresia (63) rezultă :

$$\Delta E = \frac{(1-k^2)\,(v_{1A_B} - v_{2A_B})^2}{2\left(\frac{1}{\widetilde{m}_1} + \frac{1}{\widetilde{m}_2}\right)} \tag{68}$$

Relația (68) dedusă de autor printr-o altă demonstrație în lucrare [15], în anul 1977 a fost regăsită sub altă formă de C. Iacob în lucrarea [10] în anul 1984 și de St. Staicu în notație matriceală în lucrarea [25] în anul 1986.

Apreciem că formele de exprimare pentru energia cinetică a vitezelor pierdute (66) și pentru pierderea de energie cinetică (68) din prezenta lucrare cu ajutorul maselor globale de ciocnire, sînt cele mai sugestive fiind identice cu expresiile ce se obțin la ciocnirea centrică a două sfere (fig. 5), respectiv,

$$E_p = \frac{(1+k)^2\,(v_1 - v_2)^2}{2\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}; \quad \Delta E = \frac{(1-k^2)\,(v_1 - v_2)^2}{2\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)} \tag{69}$$

Primit în redacție la 26 ianuarie 1989

BIBLIOGRAFIE

1. C. BAGCI, *Static force and torque analysis using 3 × 3 screw matrix and transmission criteria for space mechanisms*, ASME, J. Engng. Ind., **93**, 1 (1971).
2. C. BAGCI, *Dynamic force and torque analysis of mechanisms using dual vectors and 3 × 3 screw matrix*, ASME, J. Engng. Ind., **94**, 1 (1972).
3. J. E. BAKER, *Screw system algebra applied to spacial linkage configurations*, Mechanism and Machine Theory, **15**, 4 (1980).
4. A. BRAIER, I. ENESCU, *Un opérateur quaternionique utilisé à l'étude des mouvements finis d'un système invariable*, Buletinul Institutului Politehnic Iași, **6**, 1–2 (1960).
5. J. COURBON, *Calcul des structures*, Dunod, Paris, 1978.
6. F. DIMENBERG, *Opredelenie polojenii pronstranstvennih mehanizmov*, Izd. Akademiya Nauk, Moskwa, 1950.
7. F. DIMENTBERG, *Teorija vintov i ee prilozheniya*, Nauka, Moskwa, 1978.
8. F. DUDIȚA, D. DIACONESCU, *Optimizarea structurală a mecanismelor*, Edit. tehnică, București, 1987.
9. K. HUNT, *Screw system in spatial kinematiks*, Monash Univ. Clayton, Victoria, 1970.
10. C. IACOB, *Asupra generalizării teoremei lui Lazare Carnot în cazul ciocnirii a două rigide libere*, St. Cerc. Mec. Apl., **43**, 5–6, (1984).
11. M. KELER, *Kinematics and statie including friction in single-loop, mechanisms by screw calculus and dual vectors*, ASME, J. Engng. Ind., **95**, 2 (1973).
12. N. PANDREA, *Contribuții la studiul mecanismelor spațiale cu ajutorul teoriei șuruburilor*, Teză de doctorat, Institutul Politehnic București, 1973.
13. N. PANDREA, D. VOICULESCU, *Analyse des déplacements finis et des vitesses du rigide par la théorie des vis*. Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., **20**, 3 (1975).
14. N. PANDREA, D. VOICULESCU, *Analysis of helical desplecements of the right line and of the plane by means of the screw theory and of dual matrices*, Rev. Roum. Sci. Techn — — Méc. Appl., **21**, 1 (1976).
15. N. PANDREA, *Studiul general al ciocnirilor cu ajutorul teoriei vectorilor duali*, St. cerc. Mec. Apl., **36**, 6 (1977).
16. N. PANDREA, *Metoda deplasărilor relative în calculul sistemelor elastice*, Buletinul Institutului de Învățămînt Superior, Pitești, (1978).

17. N. PANDREA, E. PERIANU, *Metoda deplasărilor relative în calculul elastic al mecanismului de complianță RCC*, Al 5-lea simpozion de roboți industriali II, București, 1985.
18. N. PANDREA, MARINA PANDREA, *Determinarea centrului elastic prin metoda deplasărilor relative*, St. Cerc. Mec. Apl., **46**, 5 (1987).
19. N. PANDREA, *Vibrațiile rigidului cu legături elastice*, St. Cerc. Mec. Apl., **46**, 6 (1987).
20. N. PANDREA, *Le calcul des forces dans des mécanismes à éléments rigides*, Rev. Roum. Sci. Tehn. — Méc. Appl., **32**, 6 (1987).
21. N. PANDREA, *Le calcul des forces dans des mécanismes à barres linéairement élastiques*, Rev. Roum. Sci. Tehn. — Méc. Appl., **33**, 1 (1988).
22. P. POPESCU, N. URSU, *Asupra utilizării unui operator dual-cuaternionic la studiul pozițional al mecanismelor spațiale cu cuple sferice*, Buletinul Institutului Politehnic Cluj, **12**, (1970).
23. B. ROTH, *On the screw axes and other special lines associated with spatial displacements of a rigid body*, ASME J. Engng. Ind., **89**, 2 (1967).
24. ȘT. STAICU, *Introducere în mecanica teoretică*, Edit. științifică și enciclopedică, București, 1983.
25. ȘT. STAICU, *Aplicații ale calculului matriceal în mecanica solidelor*, Edit. Academiei, București, 1986.
26. M. TOFAN, J. GOIA, *Asamblarea elementelor discrete incidente poziționa*l, Al 4-lea simpozion național de tensometrie, Brașov, 1985.
27. M. TOFAN, N. PANDREA, I. GOIA, *Le présentation integrale de la matrice de flexibilité des barres élastiques spatiales. Le centre elastiques*, A 6-a conferință de vibrații mecanice, **2**, Timișoara, 1988.
28. R. VOINAROSKI, *Mecanică teoretică*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1968.
29. R. VOINEA, M. ATANASIU, *Contributions à la théorie géométrique des vis*, Buletinul Institutului Politehnic București, **21**, 3 (1959).
30. R. VOINEA, M. ATANASIU, *Théorie géométrique des vis et quelques applications à la théorie des mécanismes*, Rev. Roum. Sci. Techn. - Méc. Appl., **7**, 4 (1962).
31. R. VOINEA, N. PANDREA, *Contribuții la o teorie matematică generală a cuplelor cinematice*, IFToMM, Int. Symp. on Linkages and Computer Design Methods, Bucharest, Romania, B, 1973.
32. R. VOINEA, D. VOICULESCU, V. CEAUȘU, *Mecanica*, Edit. didactică și pedagogică București, 1975.
33. K. WALDROM, *The use of spatial kinematics*. IFToMM Int. Symp. on Linkages and Computer Design Method, Bucharest, Romania, E. 1973.
34. L. WOO, F. FREUDENSTEIN, *Applylication of line geometry to theoretical kinematics and the kinematic analysis of mechanical systems*, J. Mechanisms, **5**, 4 (1970).
35. A. YANG, F. FREUDENSTEIN, *Application of dual-number quaternion algebra to the analysis of spatial mechanisms*, ASME, J. Engng. Ind., **86**, 2 (1964).
36. M. YUAN, F. FREUDENSTEIN, *Kinematic analysis of spatial mechanisms by means of screw coordinatis*, ASME J. Engng. Ind., **93**, 1 (1973).

UNELE ASPECTE PRIVIND ECHILIBRUL RIGIDULUI SUPUS LA LEGĂTURI

de ȘT. STAICU
Institutul Politehnic București

În lucrare se face studiul echilibrului unui rigid rezemat pe mai multe suprafețe și curbe. Scriind ecuațiile de echilibru sub forma matriceală, se determină forțele de legătură și parametrii de poziție. Pornind de la cazul general, se deduc cîteva probleme particulare cunoscute în statica solidului rigid.

1. INTRODUCERE

Se consideră un rigid rezemat în punctele B_i pe curbele (Γ_i) și în punctele B_j pe suprafețele fixe (Σ_j), supus acțiunii forțelor exterioare $\vec{f}_k$. Vom stabili niște relații generale care să permită calculul forțelor de legătură și a celor șase coordonate generalizate care determină poziția de echilibru.

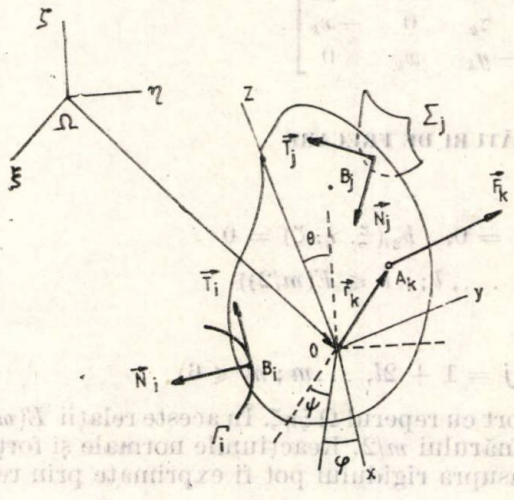


Fig. 1

Pentru aceasta se raportează rigidul la un reper inerțial $\Omega\ \xi\ \eta\ \zeta$ și se fixează pe același rigid un referențial convenabil $Oxyz$. În acest sistem de referință se precizează dimensiunile rigidului și pozițiile punctelor de aplicație ale forțelor (fig. 1)

Să observăm că parametrii pozitionali ai referențialului $Oxyz$ vor fi coordonatele ξ_0, η_0, ζ_0 ale originii O și unghiurile lui Euler ψ, θ, φ formate de axele Ox, Oy, Oz cu axele $\Omega\xi, \Omega\eta, \Omega\zeta$. Acești parametri formează matricele coloane

$$\vec{\rho}_0 = \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \\ \zeta_0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\lambda} = \begin{bmatrix} \psi \\ \theta \\ \varphi \end{bmatrix}, \tag{1}$$

care pot constitui blocurile matricelor

$$\vec{R}_0^{\circ} = \begin{bmatrix} \vec{\rho}_0 \\ \hline \vec{0} \end{bmatrix}, \quad \vec{\Lambda} = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \hline \vec{\lambda} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Utilizînd matricele rotațiilor succesive în jurul originii $O[1]$, a_ψ, a_θ, a_φ, se introduce matricea ortogonală de trecere în referențialul $Oxyz$

$$A = \left[\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & a \end{array}\right], \tag{3}$$

unde

$$a = a_\varphi\, a_\theta\, a_\psi = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

Un punct A_k al rigidului este reperat prin coordonatele x_k, y_k, z_k care pot determina vectorul

$$\bar{r}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix} \tag{5}$$

și tensorul antisimetric

$$\tilde{r}_k = \begin{bmatrix} 0 & -z_k & y_k \\ z_k & 0 & -x_k \\ -y_k & x_k & 0 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

2. LEGĂTURI DE FRECARE

Fie

$$h_{1i}(\xi, \eta, \zeta) = 0, \quad h_{2i}(\xi, \eta, \zeta) = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, l; \quad l \leqslant E(m/2)) \tag{7}$$

ecuațiile curbelor (Γ_i) și

$$h_j(\xi, \eta, \zeta) = 0 \ (j = 1 + 2l, \ldots m; m \leqslant 6) \tag{8}$$

ecuațiile suprafețelor (Σ_j) în raport cu reperul $\Omega\xi\eta\zeta$. În aceste relații $E(m/2)$ reprezintă partea întreagă a numărului $m/2$. Reacțiunile normale și forțele de frecare aplicate de legături asupra rigidului pot fi exprimate prin relațiile

$$\begin{aligned} \vec{N}_i &= \nu_{1i}\, \vec{G}_{1i} + \nu_{2i}\, \vec{G}_{2i} \\ \vec{T}_i &= \nu_i\, \tilde{G}_{1i}\, \vec{G}_{2i} \\ \vec{N}_j &= \nu_j\, \vec{G}_j, \end{aligned} \tag{9}$$

în care matricele

$$\vec{G}_{1i} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{\nabla h_{1i}} \\ \vec{0} \end{bmatrix}, \quad \vec{G}_{2i} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{\nabla h_{2i}} \\ \vec{0} \end{bmatrix}, \quad \vec{G}_j = \begin{bmatrix} \overrightarrow{\nabla h_j} \\ \vec{0} \end{bmatrix}, \quad \tilde{G}_{1i} = \left[\begin{array}{c|c} \widetilde{\nabla} h_{1i} & 0 \\ \hline 0 & \widetilde{\nabla} h_{1i} \end{array}\right] \tag{10}$$

conțin vectorii gradienți $\overrightarrow{\nabla h_{1i}}$, $\overrightarrow{\nabla h_{2i}}$, $\overrightarrow{\nabla h_j}$ și tensorii antisimetrici $\widetilde{\nabla} h_{1i}$.

Utilizînd operatorul

$$R_k = \left[\begin{array}{c|c} \hat{e} & 0 \\ \hline \tilde{r}_k & 0 \end{array}\right], \tag{11}$$

care conține matricea diagonală unitate $\hat{e}$, condiția unică de echilibru este

$$\sum_{i=1}^{l} R_i A(\vec{N}_i + \vec{T}_i) + \sum_{j=l+2l}^{n} R_j A(\vec{N}_j + \vec{T}_j) + \sum f_k R_k \vec{U}_k = \vec{0} \tag{12}$$

unde

$$\vec{U}_k = \begin{bmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \\ \gamma_k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} \vec{u}_k \\ \hline \vec{0} \end{array}\right] \tag{13}$$

reprezintă versorul direcției forței exterioare $\vec{f}_k$.

Condițiile de legătură ale punctelor B_i și B_j se scriu

$$\vec{V}_0^T R_i A \vec{G}_{1i} = 0, \quad \vec{V}_0^T R_i A \vec{G}_{2i} = 0 \tag{14}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, l)$$

$$\vec{V}_0^T R_j A \vec{G}_j = 0 \quad (j = 1 + 2l, \ldots, m),$$

unde

$$\vec{V}_0 = \left[\begin{array}{c} \vec{v}_0 \\ \hline \vec{\omega} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \\ v_{0z} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}, \tag{15}$$

este viteza virtuală a rigidului în punctul său O, realizată în deplasarea sa virtuală compatibilă cu legăturile.

Deoarece s-a presupus că punctele de contact B_i și B_j ale rigidului au tendința de a aluneca cu frecare pe curbele sau pe suprafețele considerate, putem adăuga condițiile pentru coeficienții de frecare. :

$$\nu_i^2 \vec{G}_{2i}^T \tilde{G}_{1i} \tilde{G}_{1i}^T \vec{G}_{2i} \leqslant \mu_i^2 (\nu_{1i} \vec{G}_{1i}^T + \nu_{2i} \vec{G}_{2i}) (\nu_{1i} \vec{G}_{1i} + \nu_{2i} \vec{G}_{2i}) \quad (i = 1, 2, \ldots, l) \tag{16}$$

$$\vec{T}_j^T \vec{T}_j \leqslant \mu_j^2 \nu_j^2 \vec{G}_j^T \vec{G}_j, \quad \vec{T}_j^T \vec{G}_j = 0 \; (j = 1 + 2\, l \ldots m).$$

Observații. a) Cazul în care solidul este rezemat numai pe suprafețe se obține punînd în relațiile precedente $l = 0$, $\nu_{1i} = 0$, $\nu_{2i} = 0$.

b) Dacă rigidul se reazemă numai pe curbe, atunci în rezultatele generale vom pune $\nu_j = 0$.

3. ECHILIBRUL RIGIDULUI SUPUS LA LEGĂTURI PERFECTE

Dacă toate legăturile solidului sînt ideale, ecuațiile de echilibru se simplifică introducînd în relațiile generale $\nu_i = 0$ și $\vec{T}_i = \vec{0}$.

Să înmulțim la stînga relația matriceală (12) cu $\vec{V}_0^T$ și să ținem seama de condițiile de compatibilitate (14) scrise pentru mișcarea virtuală a rigidului; rezultă relația

$$\vec{V}_0^T \Sigma f_k R_k \vec{U}_k = 0, \tag{17}$$

care exprimă principiul vitezelor virtuale aplicat în studiul echilibrului unui rigid supus la legături [1].

Această relație, împreună cu $5-m$ relații scalare, obținute din (12) prin eliminarea coeficienților ν_{1i}, ν_{2i} și ν_j, vor putea determina poziția de echilibru a rigidului, furnizînd cele $6-m$ coordonate generalizate. Mai departe, din m relații ale sistemului (12) se obțin coeficienții ν_{1i}, ν_{2i} și ν_j necesari la calculul reacțiunilor normale.

Dacă se pune $l = 0$, $\nu_{1i} = 0$, $\nu_{2i} = 0$ se obține cazul echilibrului solidului rezemat fără frecare pe m suprafețe.

a) Să presupunem acum că trei din cele m suprafețe sînt plane paralele de ecuații

$$h_1 = \zeta - \zeta_1 = 0, \quad h_2 = \zeta - \zeta_2 = 0, \quad h_3 = \zeta - \zeta_3 = 0 \tag{18}$$

În acest caz solidul poate efectua o mișcare virtuală plan-paralelă. Celelalte $m - 3$ puncte ale solidului se vor rezema pe $m - 3$ suprafețe cilindrice de ecuații

$$h_j(\zeta, \eta) = 0 \quad (j = 4, \ldots, m). \tag{19}$$

Ținînd seama că

$$\overline{\nabla} h_j = [0 \quad 0 \quad 1]^T \quad (j = 1, 2, 3), \tag{20}$$

$$\frac{\partial h_j}{\partial \zeta_j} = 0 \quad (j = 4, \ldots, m)$$

condițiile de compatibilitate (14) conduc la sistemul

$$\vec{v}_0^T a \overline{\nabla} h_j + \vec{\omega}^T \tilde{r}_j a \overline{\nabla} h_j = 0 \quad (j = 1, 2, 3), \tag{21}$$

din care rezultă soluțiile

$$\psi = 0, \quad \theta = 0, \quad \zeta_0 = 0, \quad \omega_x = 0, \quad \omega_y = 0$$

$$a = a_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{22}$$

În aceste condiții, relația matriceală (12) este echivalentă cu sistemul

$$\sum_{j=1}^{m} \nu_j a_\varphi \overline{\nabla} h_j + \Sigma f_k \vec{u}_k = \vec{0} \tag{23}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \nu_j \tilde{r}_j a_\varphi \overrightarrow{\nabla} h_j + \Sigma f_k \tilde{r}_k \vec{u}_k = 0. \tag{23}$$

La aceste ecuații se adaugă condițiile de legătură

$$\vec{v}_0^T a_\varphi \overrightarrow{\nabla} h_j + \vec{\omega}^T \tilde{r}_j a_\varphi \overrightarrow{\nabla} h_j = 0 \quad (j = 4, \ldots, m) \tag{24}$$

și relația

$$\vec{v}_0^T \Sigma f_k \vec{u}_k + \vec{\omega}^T \Sigma f_k \tilde{r}_k \vec{u}_k = 0 \tag{25}$$

care reprezintă principiul vitezelor virtuale.

Notînd

$$\alpha_j = \frac{\partial h_j}{\partial \xi_j} \cos\varphi + \frac{\partial h_j}{\partial \eta_j} \sin\varphi$$

$$\beta_j = -\frac{\partial h_j}{\partial \xi_j} \sin\varphi + \frac{\partial h_j}{\partial \eta_j} \cos\varphi \quad (j = 4, \ldots, m) \tag{26}$$

relațiile (23) se pot scrie astfel :

$$\sum_{j=4}^{m} \alpha_j \lambda_j + \Sigma \alpha_k f_k = 0$$

$$\sum_{j=4}^{m} \beta_j \lambda_j + \Sigma \beta_k f_k = 0$$

$$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \Sigma \gamma_k f_k = 0 \tag{27}$$

$$\sum_{j=1}^{3} \nu_j y_j - \sum_{j=4}^{m} \nu_j z_j \beta_j + \Sigma (y_k \gamma_k - z_k \beta_k) f_k = 0$$

$$-\sum_{j=1}^{3} \nu_j x_j + \sum_{j=4}^{m} \nu_j z_j \alpha_j + \Sigma (z_k \alpha_k - x_k \gamma_k) f_k = 0.$$

$$\sum_{j=4}^{m} \nu_j (x_j \beta_j - y_j \alpha_j) + \Sigma (x_k \beta_k - y_k \alpha_k) f_k = 0.$$

Așadar, cinci dintre aceste ecuații, împreună cu (2 5) și cu condițiil de legătură

$$(v_{0x} - y_j \omega_z)\alpha_j + (v_{0y} + x_j \omega_z)\beta_j = 0 \quad (j = 4, \ldots, m) \tag{28}$$

constituie ecuațiile de echilibru din care rezultă coeficienții $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$, unghiul φ și coordonatei ξ_0, η_0 din matricea coloană

$$\vec{\rho}_0 = \vec{\rho}_j - a^T \vec{r}_j, \; j \in [4, \ldots, m]. \tag{29}$$

b) Vom considera acum cazul în care trei dintre cele m suprafețe sînt sfere concentrice de ecuații

$$h_j(\xi, \eta, \zeta) = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \Omega B_j = 0 \; (j = 1, 2, 3). \tag{30}$$

În aceste condiții rigidul poate efectua o mișcare virtuală sferică, în cursul căreia un punct al solidului rămîne în aceeași poziție. Acest punct coincide cu centrul Ω al celor trei sfere și se numește punctul fix al rigidului. Celelalte puncte $B_4 \ldots, B_m$ pot descrie mișcări virtuale pe curbe situate pe $m-3$ suprafețe conice de ecuații

$$h_j(\xi, \eta, \zeta) = 0 \ (j = 4, \ldots, m). \tag{31}$$

În acest ca z vom avea

$$\vec{\nabla} h_j = 2(\vec{r}_j + a\vec{\rho}_0) \ (j = 1, 2, 3),$$

$$\vec{\omega}^T(\tilde{\vec{r}}_j\, a + a\tilde{\vec{\rho}}_0)\vec{\nabla} h_j = 0 \ (j = 4, \ldots, m). \tag{32}$$

Relația (17) s e poate pune sub forma

$$\vec{\omega}^T \Sigma f_k(\tilde{\vec{r}}_k + a\tilde{\vec{\rho}}_0\, a^T)\, \vec{u}_k = 0. \tag{33}$$

Dacă se suprimă și suprafețele conice (31), se obține cazul rigidului simplu articulat în Ω cu următoarele condiții de echilibru

$$2\sum_{j=1}^{3} \nu_j(\vec{r}_j + a\vec{\rho}_0) + \Sigma f_k\, \vec{u}_k = \vec{0}, \tag{34}$$

$$2\sum_{j=1}^{3} \nu_j\, \tilde{\vec{r}}_j\, a\vec{\rho}_0 + \Sigma f_k\, \tilde{\vec{r}}_k\, \vec{u}_k = \vec{0}.$$

Presupunînd că originea O a referențialului $Oxyz$ coincide cu punctul fix, Ω, relațiile matriceale (34) devin

$$2\sum_{j=1}^{3} \nu_j \vec{r}_j + \Sigma f_k\, \vec{u}_k = \vec{0} \tag{35}$$

$$\Sigma f_k\, \tilde{\vec{r}}_k\, \vec{u}_k = \vec{0},$$

adică ecuațiile de echilibru ale unui rigid articulat în O.

c) Un caz particular interesant este cel al rezemării rigidului pe trei suprafețe sferice concentrice, de ecuații

$$h_j(\xi, \eta, \zeta) = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \Omega B_j^2 = 0 \quad (j = 3, 4, 5) \tag{36}$$

și pe o dreaptă care trece chiar prin centrul sferelor. Fie $\Omega\zeta$ această dreaptă ; prin urmare

$$h_1 = \xi = 0, \quad h_2 = \eta = 0, \tag{37}$$

iar rigidul poate efectua o mișcare virtuală de rotație. În această situație vom avea

$$\vec{\nabla} h_j = 2(\vec{r}_j + a\vec{\rho}_0) \ (j = 3, 4, 5) \tag{38}$$

$$\vec{\nabla} h_1 = \vec{\nabla} h_2 = [1 \quad 0 \quad 0]^T.$$

Din condițiile de compatibilitate (14) rezultă sistemul

$$\vec{v}_0 + \tilde{\omega} a(\vec{\rho} - \vec{\rho}_0) = \vec{0} \tag{39}$$

$$\vec{v}_0 = \tilde{\omega} a \vec{\rho}_0,$$

care admite soluțiile

$$\psi = 0, \quad \theta = 0, \quad \zeta_0 = 0, \quad a = a_\varphi, \quad v_0 = \omega_z \sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2}. \tag{40}$$

Atunci relația matriceală de echilibru (14) va fi echivalentă cu ecuațiile

$$a_\varphi(\nu_1 \overrightarrow{\nabla} h_1 + \nu_2 \overrightarrow{\nabla} h_2) + 2 \sum_{j=3}^{5} \nu_j(\vec{r}_j + a_\varphi \vec{\rho}_0) + \Sigma f_k \vec{u}_k = \vec{0} \tag{41}$$

$$\tilde{r}_1 a_\varphi(\nu_1 \overrightarrow{\nabla} h_1 + \nu_2 \overrightarrow{\nabla} h_2) + 2 \sum_{j=3}^{5} \nu_j \tilde{r}_j a_\varphi \vec{\rho}_0) + \Sigma f_k \tilde{r}_k \vec{u}_k = \vec{0}.$$

Principiul lucrului mecanic virtual, aplicat în cazul de față, se exprimă prin condiția

$$\vec{\omega}^T \Sigma f_k (\tilde{r}_k + a_\varphi \tilde{\rho}_0 a^T) \vec{u}_k = 0. \tag{42}$$

Această relație, împreună cu încă cinci ecuații furnizate de (41), determină coeficienții $\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_5$ și unghiul φ în poziția de echilibru.

Primit în redacție la 14 aprilie 1989

BIBLIOGRAFIE

1. ȘT. STAICU, *Aplicații ale calculului matriceal în mecanica solidelor*, Edit. Academiei, București, 1986.
2. C. IACOB, *Mecanica teoretică*, Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1971.
3. R. VOINEA, D. VOICULESCU, V. CEAUȘU, *Mecanica*, Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1983.
4. D. MANGERON, N. IRIMICIUC, *Mecanica rigidelor cu aplicații în inginerie*, Edit. Tehnică, București, 1978.
5. GH. SILAȘ, I. GROȘANU, *Mecanica*, Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1981.

care admite soluțiile

$$\psi = 0,\ \psi = 0,\ \zeta_0 = 0,\ a = a_0,\ \varepsilon_0 = \omega_0 \sqrt{\zeta_0^2 + \eta_0^2} \tag{40}$$

Atunci relația matriceală de echilibru (14) va fi echivalentă cu ecuațiile

$$\varepsilon_0 (\nu_1 \overline{\nabla} h_1 + \nu_2 \overline{\nabla} h_2) + 2 \sum_{j=1}^{s} \nu_j (\bar{r}_j + a_0 \bar{\rho}_0) + \Sigma f_j \bar{u}_j = \bar{0} \tag{41}$$

$$\bar{r}_0 (\varepsilon_0 \nu_1 \overline{\nabla} h_1 + \nu_2 \overline{\nabla} h_2) + 2 \sum_{j=1}^{s} \nu_j \bar{r}_j (a_0 \bar{\rho}_0) + \Sigma f_j \bar{r}_j \bar{u}_j = \bar{0}.$$

Principiul lucrului mecanic virtual, aplicat în cazul de față, se exprimă prin condiția

$$\bar{\omega}^T \Sigma f_j (\bar{r}_j + a_0 \bar{\rho}_0 a^T) \bar{u}_j = 0. \tag{42}$$

Această relație, împreună cu încă cinci ecuații furnizate de (41), determină coeficienții $\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_s$ și unghiul ψ în poziția de echilibru.

Primit în redacție la 14 aprilie 1979.

BIBLIOGRAFIE

1. ST. STAMATE, *Aplicații ale calculului matricial în mecanica solidelor*, Edit. Academiei, București, 1986.
2. C. IACOB, *Mecanica teoretică*, Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1971.
3. R. VOINEA, D. VOICULESCU, V. CEAUSU, *Mecanica*, Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1983.
4. D. MANGERON, N. IRIMICIUC, *Mecanica rotilor cu aplicații la ingineria*, Edit. Tehnică, București, 1978.
5. GH. SILAS, I. GROSANU, *Mecanica*, Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1981.

ASUPRA VIBRAȚIILOR LONGITUDINALE ALE BARELOR CU SECȚIUNE VARIABILĂ

de F. DINCĂ, ELENA ZAHARIA și I. ROȘU

I.F.T.M., București

În lucrare se construiește soluția aproximativă a problemei la limită corespunzătoare vibrațiilor longitudinale în regim de rezonanță ale barelor cu secțiune variabilă, cu un capăt liber. Rezultatele sînt aplicate la analiza rezonatorilor acustici prin : *a)* folosirea directă a soluției la evaluarea performanțelor unor clase de rezonatori, definite prin parametrii care caracterizează curbele directoare ; b) verificarea ipotezelor folosite în calculul de proiectare al unor rezonatori cu caracteristici impuse [1] ; *c)* determinarea unor condiții suficiente de rezistență la oboseală.

§ 1. ECUAȚII DE MIȘCARE

Se consideră bara Voigt cu secțiunea variabilă din figura 1, în vibrații longitudinale.

Ecuația de mișcare corespunzătoare unor ipoteze simplificatoare [1], [2] se obține, folosind metodele standard, sub forma

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[A(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]+\varkappa\frac{\partial}{\partial x}\left[A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x}\right]-\frac{A(x)}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0, \qquad (1.1)$$

unde :

— $A(x)$ este aria secțiunii transversale a barei în punctul de abscisă x ;
— $u(x, t)$ este deplasarea în direcție longitudinală a unui punct arbitrar din secțiunea de abscisă x ;

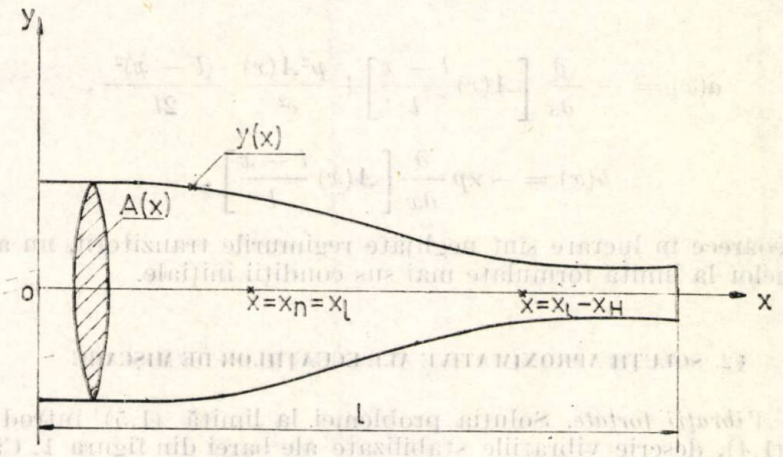


Fig. 1

— c este viteza de propagare a sunetului în bară;
— $\varkappa$ este coeficientul de frecare interioară al materialului.

Considerăm bara acţionată la capătul $x = 0$ de forţa:

$$F = f_1 \cos pt, \tag{1.2}$$

în timp ce capătul $x = l$ al barei este liber. Aceasta implică următoarele condiţii la limită

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = f_0 \cos pt, \quad f_0 = \frac{f_1}{A(0)E}, \tag{1.3}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=l} = 0,$$

unde E este constanta elastică a modelului Voight adoptat, f_1 este amplitudinea iar p pulsaţia forţei excitatoare.

Efectuăm schimbarea de funcţie

$$u(x, t) = \psi(x, t) - f_0 \frac{(l-x)^2}{2l} \cos pt. \tag{1.4}$$

Problema la limită (1), (3) se transformă în următoarea problemă cu condiţii la limită omogene pentru $\psi(x, t)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[A(x)\frac{\partial \psi}{\partial x}\right] + \varkappa \frac{\partial}{\partial x}\left[A(x)\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x}\right] - \frac{A(x)}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = f_0[a(x)\cos pt + b(x)\sin pt],$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{x=l} = 0, \tag{1.5}$$

unde

$$a(x) = -\frac{\partial}{\partial x}\left[A(x)\frac{l-x}{l}\right] + \frac{p^2 A(x)}{c^2}\frac{(l-x)^2}{2l},$$

$$b(x) = -\varkappa p \frac{\partial}{\partial x}\left[A(x)\frac{l-x}{l}\right]. \tag{1.6}$$

Deoarece în lucrare sînt neglijate regimurile tranzitorii, nu atașăm problemelor la limită formulate mai sus condiţii iniţiale.

§2. SOLUŢII APROXIMATIVE ALE ECUAŢIILOR DE MIŞCARE

a) *Vibraţii forţate.* Soluţia problemei la limită (1.5) introdusă în relaţia (1.4), descrie vibraţiile stabilizate ale barei din figura 1. Căutăm această soluţie sub forma

$$\psi(x, t) = \sum_1^s \mathcal{X}_n(x) T_n(t) \tag{2.1}$$

unde $\mathcal{X}_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots s$, formează un sistem complet de funcții care satisfac condițiile la limită

$$\mathcal{X}'_n(0) = \mathcal{X}'_n(l) = 0, \tag{2.2}$$

pentru orice n, iar $T_n(t)$ sînt funcții de timp care se determină prin metoda Bubnov-Galerkin.

Presupunînd funcțiile $\mathcal{X}_n(x)$ cunoscute și aplicînd metoda menționată, rezultă următorul sistem dinamic pentru determinarea funcțiilor $T_n(t)$:

$$M_{mn}\ddot{T}_n + D_{mn}\dot{T} + K_{mn}T_n = f_0(a_m \cos pt + b_m \sin pt), \tag{2.3}$$

(cu sumare după n, pentru $m = 1, 2, \ldots s$), unde

$$M_{mn} = -\frac{1}{c^2}\int_0^l A(x)\mathcal{X}_m(x)\mathcal{X}_n(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$D_{mn} = \varkappa\int_0^l \frac{\partial}{\partial x}\,[A(x)\mathcal{X}'_n(x)]\mathcal{X}_m(x)\mathrm{d}x,$$

$$K_{mn} = -\frac{1}{\varkappa}D_{mn}, \tag{2.4}$$

$$a_m = \int_0^l a(x)\mathcal{X}_m(x)\mathrm{d}x,$$

$$b_m = \int_0^l b(x)\mathcal{X}_m(x)\mathrm{d}x,$$

Deoarece am presupus că fenomenele tranzitorii sînt neglijabile, luăm soluția stabilizată a sistemului (2.3) și obținem soluția stabilizată a problemei sub forma căutată.

Se poate arăta că în cazul în care p se găsește într-o vecinătate suficient de mică a uneia din frecvențele proprii p_k, pentru orice $k = 1, 2, \ldots s$, ale unei bare drepte elastice cu capete libere, iar $\mathcal{X}_k(x)$ ($k = 1, 2, \ldots, s$) este funcția proprie corespunzătoare, soluția stabilizată pentru vibrațiile forțate în regim de rezonanță pe frecvența p_k ale barei drepte Voigt dezvoltată sub forma (2.1) se reduce, cu o precizie foarte bună, la termenul corespunzător acestei frecvențe proprii. Presupunînd acest lucru adevărat și pentru bara din figura 1 și luînd $k = 1$ avem

$$\psi(x, t) \approx \mathcal{X}_1(x)T_1(t), \tag{2.5}$$

unde $\mathscr{X}_1(x)$ este funcția proprie fundamentală a problemei vibrațiilor proprii ale barei elastice din figura 1.

O evaluare a lui $u(x, t)$ rezultă din (2.3), (2.4), (2.5) și (1.4) după determinarea soluției stabilizate a ecuației

$$\ddot{T}_1 + 2\zeta_1 p_1 \dot{T}_1 + p_1^2 T_1 = f_0(a_1 \cos p_1 t + b_1 \sin p_1 t) \tag{2.6}$$

unde

$$p_1 = \sqrt{\frac{k_{11}}{M_{11}}}, \quad \zeta = \frac{D_{11}}{2\sqrt{M_{11} K_{11}}}. \tag{2.7}$$

Soluția stabilizată ecuației (2.6) este:

$$T_1 = \frac{f_0}{2\zeta_1 p_1^2 M_{11}} (a_1 \sin p_1 t - b_1 \cos p_1 t), \tag{2.8}$$

care, ținînd seama de (2.5) și (1.4), conduce la

$$u(x, t) \approx \frac{f_0 a_1}{2\zeta_1 p_1^2 M_{11}} \left\{ \mathscr{X}_1(x) \sin p_1 t - \left[\frac{b_1}{a_1} \mathscr{X}_1(x) + \frac{(l - x)^2}{2l} \frac{2\zeta_1 p_1^2 M_{11}}{a_1} \cos p_1 t \right] \right\} \tag{2.9}$$

Din faptul că $b_1 < 1$ și $\zeta_1 < 1$ rezultă pentru u următoarea evaluare

$$u(x, t) \approx \frac{f_0 a_1}{2\zeta_1 p_1^2 M_{11}} \mathscr{X}_1(x) \sin p_1 t. \tag{2.10}$$

Dacă se cunoaște

$$u(o, t) = u_0 \sin p_1 t, \tag{2.11}$$

relația (2.10) se mai scrie și sub forma

$$u(x, t) \approx u_0 \frac{\mathscr{X}_1(x)}{\mathscr{X}_1(0)} \sin p_1 t. \tag{2.12}$$

Din (2.12) rezultă următoarea evaluare a tensiunilor în timpul mișcării

$$\sigma_x \approx E \frac{\partial u}{\partial x} \approx E u_0 \frac{\mathscr{X}_1'(x)}{\mathscr{X}'(0)} \sin p_1 t. \tag{2.13}$$

b) *Vibrațiile libere ale barei elastice cu secțiune variabilă.* Din a) rezultă că determinarea funcțiilor $\mathscr{X}_n(x)$ rezolvă complet problema (1.5).

Să considerăm, în scopul găsirii acestor funcții, problema vibrațiilor libere ale unei bare Hooke identică geometric cu bara din figura 1, cu capete libere. Notînd cu $\xi(x, t)$ deplasaraea elastică în direcția axei Ox, avem pentru determinarea ei următoarea problemă la limită

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[A(x)\frac{\partial \xi}{\partial x}\right] - \frac{A(x)}{C^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{x=l} = 0. \tag{2.14}$$

Căutînd soluția sub forma

$$\xi(x, t) = \mathcal{X}(x)\cos p_1 t, \tag{2.15}$$

sîntem conduși la problema Sturm-Liuville

$$[A(x)\mathcal{X}'(x)]' + \mu^2 A(x)\mathcal{X}(x) = 0, \quad \mu = \frac{p}{c},$$

$$\mathcal{X}(0) = \mathcal{X}(l) = 0. \tag{2.16}$$

Se arată [3] că în anumite condiții de regularitate pentru $A(x)$ pe care le considerăm îndeplinite, problema (2.16) admite o infinitate de soluții $\mathcal{X}_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ (funcții proprii) care corespund unui șir de numere pozitive μ_n, $n = 1, 2, \ldots$ (valori proprii). Funcțiile proprii sînt de clasă $(C^1(0, l)$. Orice funcție din această clasă poate fi dezvoltată în serie Fourier convergentă după șirul $\mathcal{X}_n(x)$.

Pentru determinarea valorilor proprii μ_n și a funcțiilor proprii $\mathcal{X}_n(x)$, căutăm soluția problemei (2.16) cu ajutorul metodei lui Galerkin, folosim sistemul complet de funcții $\left(1, \cos\frac{\pi}{l}x, \ldots, \cos\frac{n\pi}{l}x, \ldots\right)$ care satisface condițiile la limită $(2.16)_2$. În conformitate cu metoda menționată luăm:

$$\mathcal{X}(x) = \sum_{n=0}^{s} a_n \cos\frac{n\pi}{l}x \tag{2.17}$$

unde a_n sînt constante nedeterminate, soluții ale sistemului omogen:

$$\sum_{n=0}^{s} a_n(S_{mn} - \mu^2 C_{mn}) = 0, \quad m = 0, 1, \ldots, s, \tag{2.18}$$

unde

$$S_{mn} = nm\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \int_0^l A(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{m\pi}{l}x\,dx,$$

$$C_{mn} = \int_0^l A(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\cos\frac{m\pi}{l}x\,dx. \tag{2.19}$$

Sistemul omogen (2.18) are soluție nebanală dacă și numai dacă

$$\det(S_{mn} - \mu^2 C_{mn}) = 0, \quad m, n = 0, 1, \ldots s. \tag{2.20}$$

Ecuația (2.20) admite $s + 1$ rădăcini pozitive

$$\mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_{s+1} \tag{2.21}$$

Introducînd $\mu_i (i = 1, 2, \ldots, s + 1)$ în sistemul (2.18) și rezolvîndu-l, obținem soluțiile

$$\frac{a_1^{(i)}}{a_0^{(i)}}, \ldots, \frac{a_0^{(i)}}{a_0^{(i)}}, \; i = 1, 2, \ldots, s + 1, \tag{2.22}$$

care introduse în (2.17) conduc la

$$\mathcal{X}_i(x) = 1 + \sum_{n=1}^{s} a_n^{(i)} \cos\frac{n\pi}{l}x, \; i = 1, 2, \ldots, s + 1 \tag{2.23}$$

În (2.23) s-a luat $a_0^{(i)} = 1$

Funcțiile $\mathcal{X}_i(x)$ satisfac condițiile cerute la punctul a). Dacă luăm $\mu = \mu_1$ obținem din (2.23) pe $\mathcal{X}_1(x)$ necesar în evaluările (2.10), (2.12) și (2.13) care devin :

$$u(x, t) \approx \frac{f_0 a_1}{2\zeta_1 p_1^2 M_{11}}\left(1 + \sum_{n=1}^{s} a_n^{(1)} \cos\frac{n\pi}{l}x\right)\sin p_1 t,$$

$$u(x, t) \approx u_0 \frac{\left(1 + \sum_{n=1}^{s} a_n^{(1)} \cos\frac{n\pi}{l}x\right)}{1 + \sum_{n=1}^{s} a_n^{(1)}}\sin p_1 t, \tag{2.24}$$

$$\sigma_x \approx -Eu_0\frac{\pi}{l}\frac{\sum_{n=1}^{s} n a_n^{(1)} \sin\frac{n\pi}{l}x}{1 + \sum_{n=1}^{s} a_n^{(1)}}.$$

§3. REZONATORI ACUSTICI LONGITUDINALI

În cadrul lucrării, înțelegem prin *rezonator acustic longitudinal* o bară cu secțiune variabilă acționată la unul din capete de către o forță armonică cu frecvența egală cu frecvența proprie fundamentală a vibrațiilor libere ale barei cu capete libere.

În practică forța perturbatoare este realizată de către un generator de ultrasunete. Pentru acest motiv bara în mișcare, într-un astfel de regim, capătă denumirea de rezonator acustic. Pentru utilizări specifice se introduc următorii [1] parametri care caracterizează funcționarea, rezonatorilor în aplicațiile practice :

1. *Factorul de amplificare* M, definit de relația :

$$M = \frac{u(l, t)}{u(0, t)} ; \tag{3.1}$$

2. *Factorul de calitate*, definit de relația :

$$\varphi = \frac{\dot{u}_m}{cS'_m}, \tag{3.2}$$

unde

$$\dot{u}_m = \max_{x \in (0,\, l)} |\dot{u}|, \tag{3.3}$$

$$S'_m = \max_{x \in (0,\, l)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \approx \frac{u_0}{|\mathcal{X}_1(0)|} \max_{x \in (0,l)} |\mathcal{X}'_1(x)| \tag{3.4}$$

3. *Secțiunea nodală* a rezonatorului, definită ca secțiunea din $x = x_n$, în care amplitudinea deplasării are un minim absolut.

4. *Frecvența proprie fundamentală* p_1, care este determinată de $(2.16)_2$ pentru $\mu = \mu_1$, μ_1 fiind cea mai mică, rădăcină a ecuației (2.20).

Din (3.1) și (3.2) rezultă :

$$M \approx \left| \frac{\mathcal{X}_1(l)}{\mathcal{X}_1(0)} \right| = \frac{\left| 1 + \sum_{n=1}^{s} (-1)^n a_n^{(1)} \right|}{\left| 1 + \sum_{n=1}^{s} a_n^{(1)} \right|},$$

$$\varphi \approx \frac{p_1 \max_{x \in (0,l)} |\mathcal{X}_1(x)|}{c \max_{x \in (0,\, l)} |\mathcal{X}'_1(x)|} = \frac{p_1 \max_{x \in (0,\, l)} |\mathcal{X}_1(x)|}{cS_m} \tag{3.5}$$

unde

$$S_m = \max_{x \in (0,l)} |\mathcal{X}_1'(x)$$

Ecuația care definește secțiunea în care amplitudinea lui $u(x, t)$ are cele mai mici valori, conform cu (2.10) și (2.24) este dată de soluția $\mathcal{X}_n$ a ecuației

$$\mathcal{X}_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{s} a_n^{(1)} \cos \frac{n\pi}{l} x = 0. \tag{3.6}$$

Din (3.5) și (3.6) se vede că elementele folosite în practică se obțin cu ajutorul funcției proprii fundamentale $\mathcal{X}_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{s} a_n^{(1)} \cos \frac{n\pi}{l} x$ și a valorii proprii μ_1. Pentru acest motiv este util de văzut pe cîteva exemple modul în care aproximațiile prin metoda Galerkin converg în raport cu caracteristicile M, $\mathcal{X}_n$ și p. Am verificat această convergență pentru cazurile rezonatorilor de rotație exponențial, tronconic și cu salt de secțiune. Rezultatele sînt date în continuare.

1. *Rezonatorul de rotație exponențial.* Pentru acesta curba directoare este dată de ecuația:

$$f(x) = \sqrt{\frac{A(0)}{\pi}}\, e^{-\frac{\alpha}{2}x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l \tag{3.7}$$

În calcul s-a luat $l = 0{,}065$ m ; $\alpha = 21{,}33$, iar rezultatele sînt date în tabela 1. $A(0)$ se ia arbitrar, dar limitat de condiția ca $\sqrt{\frac{A(0)}{\pi}} < \frac{c}{4f_1}$, [1]

Tabela 1

Aproximația	M	$x_n(m)$	f_1(KHz)
1	1,75	0,0268	40,65
2	1,99	0,0281	40,41
3	1,99	0,0281	40,41
4	2,00	0,0280	40,41
5	2,00	0,0280	40,41
6	2,00	0,0280	40,41
Soluția exactă	2,00	0,0280	40,41

2. *Rezonatorul de rotație tronconic.* Acesta are drept curbă directoare dreapta dată de ecuația

$$f(x) = \frac{D}{2}\left(1 - \alpha\frac{x}{l}\right), \qquad \alpha = \frac{D-d}{D} \tag{3.8}$$

unde D și d sînt diametrele secțiunilor de la capetele rezonatorului. Luînd $D = 0{,}035$ m, $d = 0{,}015$ m și $l = 0{,}065$ m rezultă M, x_n și f_1 dați în tabela 2.

Tabela 2

Aproximația	M	$x_n(m)$	f_1(KHz)
1	1,89	0,26	42,3
2	2,17	0,27	42,1
3	2,18	0,27	42,1
4	2,20	0,27	42,1
5	2,20	0,27	42,1
6	2,20	0,27	42,1
Soluția exactă	2,30		

3. *Rezonator drept de rotație, cu salt de secțiune.* În acest caz aria $A(x)$ a secțiunii transversale este dată de ecuația:

$$A(x) = \begin{cases} \pi R^2 H(x_0 - x), & x \in [0, x_0) \\ \pi r^2 H(x - x_0), & x \in [x_0, l] \end{cases}$$

unde $H(.)$ este funcția lui Heaviside, R și r sînt razele secțiunilor de la capetele rezonatorului, iar $x_0 \in (0, l)$ se alege arbitrar. Dacă se ia $r/R = 0{,}5$, $x_0/l = 0{,}5$, $l = 0{,}065$ m, se obțin rezultatele din tabela 3.

Tabela 3

Aproximația	M	$x_n(m)$	f_1(kHz)
1	2,2	0,024	46,89
2	4,5	0,030	42,34
3	4,3	0,030	41,56
4	3,9	0,031	41,02
5	3,9	0,031	40,72
6	4,1	0,031	40,54

Pentru acest ultim caz, procedeele descrise în §2 se aplică considerînd ecuațiile de mișcare și soluțiile, în sensul teoriei distribuțiilor, deoarece pentru $x = x_0$, $A(x)$ este derivabilă numai în acest sens.

În cazurile analizate numeric, soluțiile obținute sînt confirmate de rezultatele existente în literatura de specialitate *). Astfel, pentru primele două cazuri sînt obținute, și pe această cale, rezultatele date în [1]; valoarea lui M pentru rezonatorul cilindric circular cu salt de secțiune dată în [1] este regăsită cu o precizie de aproximativ 2,5%.

4. *Metoda de calcul pentru rezonatori longitudinali de rotație.* Calculul rezonatorilor acustici se realizează în general pe următoarele căi:

— prin utilizarea unor forme simple care se găsesc analizate în literatură [1];

— prin folosirea metodei descrise în § 2, pentru calculul unor rezonatori rezultați din combinarea unor forme simple (tronconice, exponențiale, cilindrice, etc.) sau din familii de forme geometrice, ușor de executat;

— prin folosirea unei metode directe în care se dau M, ϱ și p_1 și se calculează curba directoare a rezonatorului de rotație care realizează parametrii dați.

În acest paragraf prezentăm o metodă directă după Eisner [1], care se bazează pe o serie de ipoteze simplificatoare, împreună cu o analiză de verificare a ipotezelor introduse. Ipotezele sînt următoarele:

1°. Pentru $x \in (0, x)$ amplitudinea tensinii, în timpul funcționării rezonatorului este crescătoare;

2°. Pentru $x \in [x_n, x_t]$ amplitudinea tensiunii este constantă, egală cu ES_m;

3°. Pentru $x \in [x_t, l]$ amplitudinea tensiunii este descrescătoare;

4°. Pe $[0, l]$ deplasarea are derivate de ordinul întîi și al doilea.

Derivata de ordinul al doilea este continuă în $[0, l]$.

La punctele 2° și 3°, x_n, x_t și l sînt încă nedeterminați.

Conform celor arătate în § 2 problema calculului rezonatorilor este legată de determinarea funcției proprii fundamentale

Pentru a folosi rezultatul menționat, scriem ecuația (2.16) sub forma echivalentă

$$\frac{d^2\mathscr{X}}{dx^2} + \frac{d\mathscr{X}}{dx}\,\frac{d}{dx}\ln A(x) + \frac{p_1^2}{c^2}\,\mathscr{X} = 0, \tag{4.1}$$

$$\mathscr{X}'(0) = \mathscr{X}'(l) = 0,$$

unde p_1 este frecvența proprie fundamentală a rezonatorului.

Făcînd schimbările de variabilă și funcție

$$\frac{x}{l} = X, \quad U(X) = \frac{\mathscr{X}}{l}, \tag{4.2}$$

*) O bibliografie relativ completă asupra acestui subiect este dată în [1].

și introducînd notațiile

$$\Omega^2 = \frac{p_1^2}{c^2} l^2 = \left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)^2 \quad \lambda = \frac{c}{f_1}, f_1 = \frac{p_1}{2\pi}, \tag{4.3}$$

problema (4.1) se scrie sub forma

$$U'' + U'[lnA(X)]' = \Omega^2 U = 0,$$

$$U'(0) = U'(1) = 0. \tag{4.4}$$

Problema la limită (4.4), ipotezele introduse și valorile impuse pentru parametrii M, φ, p_1, determină funcția proprie fundamentală împreună cu $A(x)$ și parametrii care sînt necesari în proiectare, succesiv pe porțiunile $[0, x_n]$ și $[x_n, l]$.

Numim după Eisner porțiunea din rezonator cuprinsă în $[0, x_n]$ zona de joasă amplitudine a deplasării iar zona cuprinsă în $[x_n, l]$ zona de înaltă amplitudine. Notăm cu l_L lungimea zonei de joasă amplitudine ($x_n = l_L$) și cu l_H lungimea zonei de înaltă amplitudine ($l = l_L + l_H$). Raportăm fiecare din cele două zone la noi sisteme de axe $O'X$ și $O''X$ (O' și O'' sînt amplasate în zona neutră). Ținînd seama de (4.2), (4.3) și (4.4) și de ipotezele intoduse, avem:

I. Pentru zona de joasă amplitudine

$$\frac{d}{dX} \ln A_L(X) = -\frac{U_L'' + \Omega_L^2 U_L}{U_L'}$$

$$U_L(0) = 0, \; U_L'(0) = S_m, \; U_L''(0) = 0, \tag{4.5}$$

$$U_L'(1) = 0, \; U_L''(1) + \Omega_L^2 U_L(1) = 0, \; U_L'''(1) = 0;$$

II. Pentru zona de înaltă amplitudine

$$\frac{d}{dX} \ln A_H(X) = -\frac{U_L'' + \Omega_H^2 U_H}{U_H'}$$

$$U_H(0) = U_H'(1) = 0, \; U_H''(1) + \Omega_H^2 U_H(1) = 0 \tag{4.6}$$

$$U_H'(X) = S_m, \text{ pentru } X \in [0, X_t]$$

$$\lim_{\substack{X \to X_t \\ X < X_t}} U_H^{(n)}(X) = \lim_{\substack{X \to X_t \\ X > X_t}} U_H^{(n)}(X), \quad n = 0, 1, 2,$$

unde $X_t \in [0, 1]$ este punctul în care amplitudinea tensiunii din zona de înaltă amplitudine a deplasării, începe să descrească. În conformitate cu 4.3) avem

$$\Omega_L = \frac{2\pi l_L}{\lambda}, \qquad \Omega_H = \frac{2\pi l_H}{\lambda}. \tag{4.7}$$

Celor două grupuri de condiții le atașăm și condiția ca rezonatorul să realizeze factorul de amplificare dat

$$\frac{l_H U_H(1)}{l_L U_L(1)} = \mathrm{M}, \tag{4.8}$$

precum și factorul de calitate φ

$$\Omega_H \frac{U_H(1)}{S_m} = \varphi \tag{4.9}$$

În formulele (4.5) ... (4.9) am atașat indicele L mărimilor din zona de joasă amplitudine a deplasării și indicele H mărimilor din zona de înaltă amplitudine.

Alegind :

$$U_L(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4 + a_5X^5, \; X \in [0, 1] \text{ în } [O'X], \tag{4.10}$$

$$U_H(X) = \begin{cases} S_m X, & X \in [0, X_t] \\ b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3, & X \in [X_t, 1] \end{cases} \text{ [în } O''X],$$

și ținînd seama de (4.5), (4.6), (4.7), (4.8) și (4.9) obținem :

$$\left.\begin{aligned} U_L(X) &= S_m \left[X + \frac{1}{3}\left(\frac{20\varphi}{M\Omega_L} - 14\right) X^3 + \right. \\ &\left. + \frac{1}{3}\left(16 - \frac{25f}{M\Omega_L}\right) X^4 + \frac{1}{3}\left(\frac{8\varphi}{M\Omega} - 5\right) X^5 \right] \\ \frac{L(X)}{A(0)} &= \exp\left[-\int_0^X \frac{U_L'' + \Omega_L^2 U_L}{U_L'} \, dX \right], \\ \Omega_L &= \frac{-4 + \sqrt{16 + 60\left(\frac{\varphi}{M}\right)^2}}{3\frac{f}{M}}, \end{aligned}\right\} X \in [0, 1] \text{ în } O'x$$

$$U_H(X) = \begin{cases} S_m X, & X \in [0, X_t] \\ \dfrac{S_m}{(X_t - 1)^2}\left[\dfrac{1}{3}X_t^2 - (2X_t - 1)\,X + X_t X^2 - \right. \\ \left. - \dfrac{1}{3}X^3\right], & X \in [X_t 1] \end{cases} \quad X \text{ în } O''X$$

$$\frac{A_H(X)}{A(0)} = \begin{cases} \exp\left[-\dfrac{1}{2}\Omega_H^2 X^2\right], & X \in [0, X_t] \\ \exp\left\{-\dfrac{1}{2}\Omega_H^2\left[X_t^2 + \dfrac{1}{3}(X - X_t)^2\right] - \right. \\ \left. - 2\left(1 - \dfrac{4}{3\varphi^2}\right)\ln\left(1 + \dfrac{X - X_t}{1 - X_t}\right)\right\}, & X \in [X_t, 1] \end{cases} \quad (4.11)$$

$$\Omega_H = \varphi + \frac{2}{3\varphi},$$

$$X_t = 1 - \frac{2}{\Omega_H \varphi}.$$

Observații :

1°. Avem $A_L(0) = A_H(0) = A(0)$ conform cu ipotezele. $A(0)$ se alege astfel încît diametrul maxim al rezonatorului să fie mai mic decît $\lambda/4$.

2°. Din $(4.11)_{5,6,7}$ rezultă [1]

$$\frac{A(0)}{A_H(1)} = \exp\left[0{,}5\varphi^2 + 0{,}053 - \frac{0{,}2928}{\varphi^2}\right]. \quad (4.12)$$

Formula obținută pune în evidență faptul că deși φ poate fi ales teoretic oricît de mare, există o limită dincolo de care controlul executării rezonatorului nu mai este posibil.

3°. Reconstituirea curbei directoare a rezonatorului în sistemul inițial Ox (fig. 1) se face revenind la variabila x prin formulele

$$X = \frac{l_L - x}{l_L}, \text{ pentru } X \in O'x, \quad (4.13)$$

și

$$X = \frac{x - l_L}{lH}, \text{ pentru } X \in O''X. \quad (4.14)$$

Lungimile $l_L = x_n$ și l_H (precum și $l = l_L + l_H$) rezultă din (4.7), după ce în prealabil au fost determinați Ω_L și Ω_H prin relațiile $(4.11)_{3.6}$

OBSERVAȚII ASUPRA METODELOR DE CALCUL DESCRISE ÎN §§ 2 și 4

Metoda de determinare a geometriei rezonatorilor prezentată în acest paragraf are la bază ipotezele 1° — 4°. În vederea aplicațiilor practice este necesară verificarea acestor ipoteze, printr-o metodă independentă de ele. Facem în continuare această verificare prin metoda descrisă în § 2 luînd $\frac{M}{\varphi} = 1$, $M = 2, \ldots, 5$ cu pasul 0,5, $c = 5130$ m/s, $f_1 = 20$kHz. Procedînd conform metodei din § 2, obținem rezultatele din tabela 4 și figura 2. În această figură sînt date:

— Curbele directoare ale rezonatorilor corespunzători lui $M = 2$ și $M = 5$, cu linii groase. Scara corespunzătoare este marcată în dreapta axei ordonatelor.

— Variația funcțiilor

$$\bar{\varepsilon}(x) = \frac{l}{\pi} \frac{1}{U_0} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| = \left| \frac{\sum_{n=1}^{s} n a_n^{(1)} \sin n \frac{\pi}{l} x}{1 + \sum_{n=1}^{s} a_n^{(1)}} \right| \tag{4.15}$$

pentru $M = 2, \ldots, 5$, cu pasul 0,5. În figura 2 scara corespunzătoare este marcată în stînga axei ordonatelor.

Tabela 4

M	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
M_φ	1,998	2,498	2,989	3,463	3,923	3,973	4,735

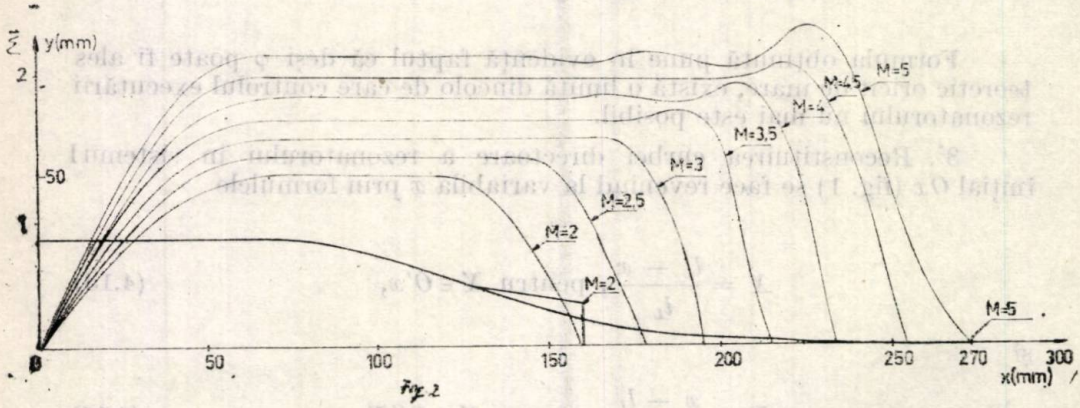


Fig. 2

În tabela 4 am notat cu M_r valoarea lui M rezultată din verificarea cu metoda din § 2. Cele două metode conduc la aceleași valori pentru $x_n = l_L$ și pentru f_1 adică 0,064 m respectiv 20 kHz Din tabelă rezultă pentru M_r diferențe care cresc cu M nedepășind însă 5,3%.

Din figura 2 rezultă :

1. Ipotezele introduse în § 4 sînt adevărate pentru $M < 3$. Pentru $M > 3$ apar abateri care justifică diferențele din tabela 1.

2. Formele rezonatorilor în zona de joasă amplitudine a deplasării rămîn practic neschimbate cînd M crește. În schimb forma zonei de înaltă amplitudine se alungește și se ascute. Acest fapt conduce la o anumită limitare a performanțelor rezonatorilor din această familie, impusă de dificultăți de execuție.

Unele analize numerice arată că în cazul în care $\frac{\varphi}{M} > 1$ impedimentul menționat se ameliorează, existînd și în acest caz limite impuse de relația (4.12).

3. Din (2.13) rezultă formula de calcul de oboseală

$$u_0 \leqslant \frac{\sigma_0}{E} \frac{|\mathcal{X}_1(0)|}{\max\limits_{x \in [0,l]} |\mathcal{X}_1'(x)|}, \tag{4.16}$$

unde σ_0 este rezistența la oboseală a materialului. În general $\mathcal{X}_1(x)$ se determină prin metoda descrisă în § 2. În cazul în care este aplicată metoda din acest paragraf avem

$$u_0 \leqslant \frac{\sigma_0}{E} \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\varphi}{M}. \tag{4.17}$$

Notînd

$$\frac{\sigma_0}{E} \frac{\lambda}{2\pi} = K \tag{4.18}$$

formula (4.17) devine

$$u_0 \leqslant K \frac{\varphi}{M} \tag{4.19}$$

Dacă se cunoaște constanta de material K se poate lua

$$u_0 = K \frac{\varphi}{M}. \tag{4.20}$$

În cazul în care se impune la ieșire o anumită deplasare $\bar{u}$ atunci avem

$$\bar{u} = Mu_0 = K\varphi \tag{4.21}$$

formulă care furnizează o relație de optimizare a rezonatorului, alături de condiții de formă rezultate din (4.12).

Primit în redacție la 29 iunie 1989

BIBLIOGRAFIE

1. W. P. MASON, *Physical Acoustics*, Academic Press, New York and London, 1964.
2. W. NOWACKI, *Dinamica sistemelor elastice*, Edit. tehnică, București, 1969.
3. N. TEODORESCU, V. OLARIU, *Ecuațiile fizicii matematice*, Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1975.

METODE PENTRU DETERMINAREA ECUAȚIEI CINEMATICE A ROBOȚILOR

I. GROȘANU, GH. VĂDUVA și D. CICA

Institutul Politehnic „Traian Vuia" Timișoara

În lucrare se prezintă metode matriceale pentru determinarea ecuației matriceale a unui robot considerînd deplasări virtuale relative provenite din cuplele cinematice și deplasări de rototranslație pentru determinarea matricei de transformare omogenă atașată obiectului manipulat. Din ecuația cinematică se extrag vectorii coloană ai matricei Jacobi atașată robotului care permite rezolvarea problemei cinematice inverse. Sînt prezentate și două exemple de calcul.

1. INTRODUCERE

Comanda roboților cere să se exprime viteza unui punct al obiectului manipulat și viteza unghiulară a acestui obiect în funcție de coordonatele generalizate ale robotului. La această exprimare se ajunge prin diferite metode matematice obținîndu-se ecuația cinematică a robotului, matricea Jacobi și matricea de transformare omogenă a obiectului manipulat de robot. Aceste exprimări depind de structura și de poziția robotului. Chiar și o sumară trecere în revistă a literaturii care abordează această problemă evidențiază importanța ei cît și greutățile pe care la întîmpină cercetătorii în obținerea soluției căutate.

Manipularea automată a obiectului și plasarea corectă a robotului în spațiul de lucru, pe întregul ciclu de lucru, cer un număr $n \geqslant 6$ de parametrii generalizați care se notează cu $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$. Acești parametrii sînt funcții de timp obținute prin comanda robotului care trebuie să satisfacă cerințele precizate mai sus și a posibilității de care dispun motoarele de acționare. Se cere deci să se exprime viteza $\bar{v}_E$ a punctului caracteristic O_E, adică a unui punct care aparține obiectului manipulat și viteza unghiulară absolută $\bar{\omega}_E$ a acestui obiect. Dacă

$$\bar{q} = \{q_0\, q_1\, q_2 \cdots q_{n-1}\}^T, \tag{1.1}$$

este vectorul coordonatelor generalizate atunci matricea Jacobi a robotului notată prin $\underline{J}$ se folosește pentru a stabili relația

$$\begin{Bmatrix} \bar{v}_E \\ \cdots \\ \bar{\omega}_E \end{Bmatrix} = \underline{J}(\bar{q})\dot{\bar{q}}. \tag{1.2}$$

Din relația (1.2) rezultă că matricea $\underline{J}$ este de dimensiune $6 \times n$. În cazul că se cunoaște $\bar{q}(t)$ relația (1.2) rezolvă problema de cinematică directă a robotului. Această problemă este mai puțin importantă în practică.

În cazul cînd $n = 6$ și $\underline{J}$ este nesingulară din relația (1.2) se obține

$$q = \underline{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \bar{v}_E \\ \dots \\ \bar{\omega}_E \end{Bmatrix}. \tag{1.3}$$

Dacă $\bar{v}_E$ și $\bar{\omega}_E$ sînt cunoscute ca funcție de timp atunci relația (1.3) rezolvă problema de cinematică inversă a robotului care are o mare importanță practică pentru realizarea acționării corecte. În cazul cînd $n > 6$ relația (1.2) conduce la

$$q = \underline{J}^{\mathrm{iv}} \begin{Bmatrix} \bar{v}_E \\ \dots \\ \bar{\omega}_E \end{Bmatrix}, \tag{1.4}$$

unde prin $\underline{J}^{\mathrm{iv}}$ se înțelege inversa generalizată sau pseudoinversa matricei Jacobi a robotului.

Robotul este format din n corpuri rigide în mișcare S_i, $i = 1, 2, \dots, n$ și un corp rigid S_0 numit bază care este fix sau are o mișcare impusă.

În această lucrare S_0 se consideră fix. De ultimul corp S_n numit efector este legat solidar, prin dispozitivul de apucare, un corp rigid care reprezintă obiectul de manipulat. Rigidele S_i sînt legate între ele prin cuple cinematice, în mod obișnuit de clasa a 5-a, astfel încît să formeze un lanț cinematic deschis (fig. 1). Pe axa cuplei cinematice C_i este fixat un punct

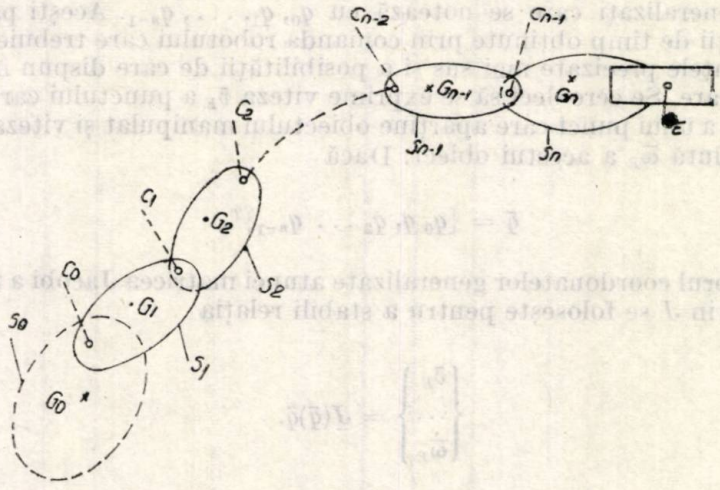


Fig. 1

O_i care constituie originea unui reper cartezian $T(O_i)$ legat solidar cu rigidul S_i. Axa $O_i z_i$ este dirijată după axa cuplei cinematice C_i iar versorul ei se notează prin $\bar{k}_i^{(i)}$). Un vector oarecare $\bar{a}$ notat superior cu un indice (i),

adică $\bar{a}^{(i)}$, arată că acel vector este exprimat în reperul $T(O_i)$. Vectorii $\bar{a}_i^{(0)} = \bar{a}_i$ sînt exprimați în reperul $O_0x_0y_0z_0$ presupus fix. Dacă se aplică această notație versorilor: $\bar{i}_s^{(r)}$; $\bar{j}_s^{(r)}$; $\bar{k}_s^{(r)}$, rezultă că versorii reperului $T(O_s)$ sînt exprimați în reperul $T(O_r)$. Cu această precizare se definesc matricele de trecere relative la cele două repere notate prin

$$\underline{B}_{s,r}^{(r)} = [\bar{i}_s^{(r)} \vdots \bar{j}_s^{(r)} \vdots \bar{k}_s^{(r)}] \tag{1.5}$$

și matricele de trecere absolute de la reperul $T(O_i)$ la reperul $T(O_0)$ notate prin

$$\underline{B}_{i,0} = [\bar{i}_i^{(0)} \vdots \bar{j}_i^{(0)} \vdots \bar{k}_i^{(0)}] = [\bar{i}_i \vdots \bar{j}_i \vdots \bar{k}_i]. \tag{1.6}$$

Considerînd pentru simplificare numai lanțuri cinematice deschise neramificate plecînd de la rigidul S_0, fiecare rigid S_i admite un precedent notat cu $S_{p(i)}$, care satisface condiția $p(i) < i$. Între rigidul S_i și precedentul $S_{p(i)}$ este plasată cupla cinametică $C_{p(i)}$. Această notație se poate păstra și pentru sisteme mai generale de rigide S_i la care între rigidul S_i și precedentul $S_{p(i)}$ sînt definite legături cinematice, elastice și/sau elemente de amortizare.

2. DEPLASĂRI RELATIVE

Fie un sistem de rigide la care plecînd de la rigidul S_0, pentru fiecare rigid S_i se poate defini în mod univoc precedentul $S_{p(i)}$. Pentru această pereche de rigide folosind notațiile din figura 2.a, se definește matricea de transformare omogenă

$$\underline{D}_{i,i-1}^{(i-1)} = \begin{bmatrix} \underline{B}_{i,i-1}^{(i-1)} & \vdots & \bar{l}_i^{(i-1)} \\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ 0\ 0\ 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.1}$$

care se exprimă prin produsul

$$\underline{D}_{i,i-1}^{(i-1)} = \underline{D}_{Ti,i-1}^{(i-1)}\ \underline{D}_{Ri,i-1}^{(i-1)}, \tag{2.2}$$

unde:

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \underline{D}_{Ti,i-1}^{(i-1)} = \begin{bmatrix} \underline{E} & \vdots & \bar{l}_i^{(i-1)} \\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ 0\ 0\ 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix};$$

$$\underline{D}_{Ri,i-1}^{(i-1)} = \begin{bmatrix} \underline{B}_{i,i-1}^{(i-1)} & \vdots & \bar{0} \\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots \\ 0\ 0\ 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Considerînd exprimarea algebrică a unui vector oarecare $\vec{a}$ prin

$$\bar{a} = \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix}, \tag{2.4}$$

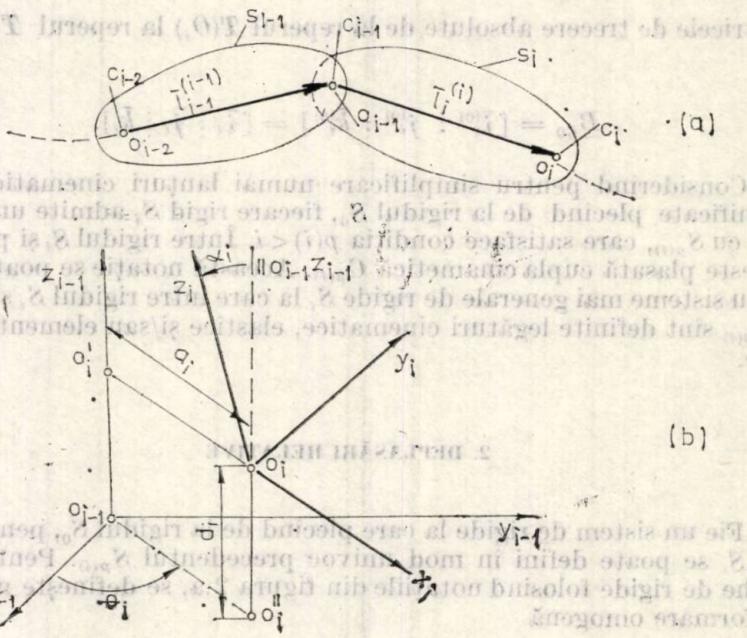


Fig. 2

pentru produsul vectorial se folosește operatorul $\bar{a}^{\nu}$ definit de

$$\bar{a}^{\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.5}$$

la care se atașează operația inversă

$$\begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}^{-\nu} = \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix}. \tag{2.6}$$

Produsul vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$ se va exprima prin

$$\bar{a}^{\nu}\bar{b} = -\bar{b}^{\nu}\bar{a}.$$

În cazul lanțurilor cinematice deschise și fără ramificații întîlnite frecvent la structurile unor roboți industriali, convenția Denavit-Hartemberg, notată prin $D-H$, este răspîndită. Cu această convenție matricea $\underline{D}_{i,i-1}^{(i-1)}$ depinde de patru parametrii θ_i, h_i, α_i, a_i și se exprimă prin

$$\underline{D}_{i,i-1}^{(i-1)} = \underline{A}_z^{(i-1)}(\theta_i, h_i)\,\underline{A}_x^{(i)}(\alpha_i, a_i), \tag{2.7}$$

unde:

$$\underline{A}_z^{(i-1)} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \underline{A}_x^{(i)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

În relațiile (2.8) și în continuare se folosesc notațiile:

$$s\alpha = \sin\alpha; \quad c\alpha = \cos\alpha. \tag{2.9}$$

Matricea din relația (2.7) a fost definită pe baza notațiilor din figura 2.b.

Inversele matricelor din relația (2.8) sînt:

$$(\underline{A}_z^{(i-1)})^{-1} = \begin{bmatrix} c\theta_i & s\theta_i & 0 & 0 \\ -s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -h_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (\underline{A}_x^{(i)})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -a_i \\ 0 & c\alpha_i & s\alpha_i & 0 \\ 0 & -s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

Considerînd deplasările virtuale relative $\delta\theta_i$ și δh_i de rototranslație după axa z_{i-1} și deplasările relative de rototranslație după axa x_i se definesc operatorii:

$$\delta\underline{\Delta}_z^{(i-1)} = \begin{bmatrix} 0 & -\delta\theta_i & 0 & 0 \\ \delta\theta_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta h_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \delta\underline{\Delta}_x^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta a_i \\ 0 & 0 & -\delta\alpha_i & 0 \\ 0 & \delta\alpha_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.11}$$

Ținînd seama că

$$\delta\Delta_z^{(i)} = (\underline{A}_x^{(i)})^{-1}\,\delta\Delta_z^{(i-1)}\underline{A}_x^{(i)} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -c\alpha_i\delta\theta_i & s\alpha_i\delta\theta_i & 0 \\ c\alpha_i\,\delta\theta_i & 0 & 0 & a_i c\alpha_i\delta\theta_i + s\alpha_i\delta h_i \\ -s\alpha_i\delta\theta_i & 0 & 0 & -a_i s\alpha_i\delta\theta_i + c\alpha_i\delta h_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.12}$$

se obține

$$\delta\underline{D}_{i,i-1}^{(i-1)} = \underline{D}_{i,i-1}^{(i-1)}\,[\delta\underline{\Delta}_z^{(i)} + \delta\underline{\Delta}_x^{(i)}]. \tag{2.13}$$

Deplasarea absolută a obiectului manipulat se poate exprima cu ajutorul deplasărilor relative ținînd seama că

$$\underline{D}_{n,0} = \underline{D}_{1,0}\,\underline{D}^{(1)}_{2,1} \cdots \underline{D}^{(i-1)}_{i,i-1} \cdots \underline{D}^{(n-1)}_{n,n-1}\,\underline{D}^{(n)}_{E,n} \tag{2.14}$$

și deci

$$\delta\underline{D}_{n,0} = \sum_{i=1}^{n} \underline{D}_{1,0}\,\underline{D}^{(1)}_{2,1} \cdots \underline{D}^{(i-1)}_{i,i-1}\,[\delta\underline{\Delta}^{(i)}_{z} + \delta\underline{\Delta}^{(i)}_{x}] \cdots \underline{D}^{(n-1)}_{n,n-1}\,\underline{D}^{(n)}_{E,n}, \tag{2.15}$$

unde matricea $D^{(o)}_{E,n}$ este constantă și reprezintă matricea de trecere de la reperul $T(O_E)$ la $T(O_{n-1})$.

Din această relație se poate extrage deplasarea prin translație a punctului O_E și deplasarea prin rotație a rigidului S_n. Pentru structuri complicate acest calcul este laborios, în schimb deplasările virtuale se pot utiliza atît în studiul cinematicii cît și în studiul dinamicii roboților. Este de observat că deplasările absolute ale rigidului S_n, deci și ale obiectului manipulat, se exprimă prin deplasările relative din cuplele cinematice care la rîndul lor se calculează cu ajutorul operatorilor definiți prin relațiile (2.11). Dacă în particular cuplele cinematice se reduc la cuple de rotație pentru care se consideră deplasările unghiulare relative q_i numite coordonatele generalizate ale robotului atunci relația (2.15) devine

$$\delta\underline{D}_{n,0} = \sum_{i=0}^{n-1} \underline{D}_{1,0}\,\underline{D}^{(1)}_{2,1} \cdots \underline{D}^{(i-1)}_{i,i-1}\,\underline{Q} \cdots \underline{D}^{(n-1)}_{n,n-1}\,\underline{D}^{(n)}_{E,n}\,\delta q_i, \tag{2.16}$$

unde

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.17}$$

O relație analogă se poate obține și în cazul cînd robotul conține cuple cinematice de translație modificîndu-se numai operatorul $\underline{Q}$.

3. MATRICEA JACOBI

Pentru determinarea matricelor Jacobi se consideră o structură de robot neramificată (fig. 3) pentru care se admite că a fost calculată matricea $D^{(n)}_{n,0}$ în cazul cînd toate cuplele cinematice sînt de clasa a cincea. Se folosește vectorul $\bar{q}$ al coordonatelor generalizate format cu deplasările relative q_i din cuplele cinematice. Pentru structurile de roboți la care se poate obține matricea $\underline{D}_{n,0}$ fără prea multe eforturi de calcul, se organizează această matrice prin evidențierea celor patru vectori coloană adică

$$\underline{D}_{n.0}(\bar{q}) = [\bar{D}_1(\bar{q}) \vdots \bar{D}_2(\bar{q}) \vdots \bar{D}_3(\bar{q}) \vdots \bar{D}_4(\bar{q})]. \tag{3.1}$$

Fie O_E punctul caracteristic aparținînd obiectului manipulat și $\underline{B}_E$ matricea de trecere de la reperul $T(O_E)$ legat de acest obiect la reperul $T(O_0)$. Se definește matricea

$$\underline{D}_{E,0} = \begin{bmatrix} \underline{B}_E & \vdots & \bar{r}_E \\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ 0\ 0\ 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{r}_E = \overline{O_0 O_E} \tag{3.2}$$

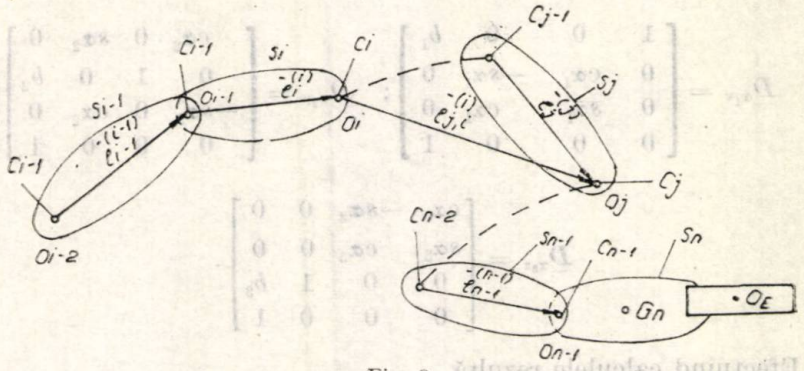


Fig. 3

și vectorul

$$\bar{q}_E = \{q_{1E}\ q_{2E} \cdots q_{6E}\}^T \tag{3.3}$$

al parametrilor ce definesc poziția punctului caracteristic O_E și orientarea obiectului manipulat, ca și cînd acest corp ar fi un rigid liber. Și matricea (3.2) poate fi organizată prin evidențierea celor patru vectori coloană

$$\underline{D}_{E0}(\bar{q}_E) = [\bar{D}_{1E}(\bar{q}_E) \vdots \bar{D}_{2E}(\bar{q}_E) \vdots \bar{D}_{3E}(\bar{q}_E) \vdots \underline{D}_{4E}(\bar{q}_E)] \tag{3.4}$$

Dacă punctul caracteristic este obligat să descrie o anumită traiectorie după o lege impusă și obiectul manipulat este obligat să respecte o orientare relativă față de această traiectorie, atunci matricea (3.4) se poate determina. Cum obiectul manipulat este legat de efectorul S_n al robotului rezultă ecuația cinematică

$$\underline{D}_{n,0}(\bar{q}) = \underline{D}_{E,0}(\bar{q}_E). \tag{3.5}$$

La rezolvarea problemei inverse se determină valorile numerice ale matricei $\underline{D}_{E,0}$ corespunzătoare momentului în care punctul caracterisic ocupă o poziție precizată pe traiectoria impusă. Aceste valori numerice se determină prin discretizarea intervalului de timp pe baza unui algoritm de calcul automat al matricei $\underline{D}_{E,0}$. Dacă valorile numerice ale matricei $\underline{D}_{E,0}$ au fost calculate urmează să se stabilească un nou algoritm de calcul automat al valorilor vectorului $\bar{q}$ pe baza ecuației cinematice (3.5). În pro-

blemele concrete calculul matricei $\underline{D}_{E,0}$ cu ajutorul valorilor vectorului $\bar{q}_E$ întîmpină greutăți. Din acest motiv aici se consideră trei deplasări prin rototranslație avînd ca axe trei direcții concurente ortogonale corespunzătoare rotațiilor cu unghiurile α_1, α_2 respectiv α_3. Translațiile simultane cu aceste rotații se notează cu b_1, b_2 respectiv b_3. Celor trei rototranslații li se atașează matricele $\underline{D}_{\alpha_1 x}$, $\underline{D}_{\alpha_2 y}$ respectiv $\underline{D}_{\alpha_3 z}$ și deci

$$\underline{D}_{E,0} = \underline{D}_{\alpha_1 x}\,\underline{D}_{\alpha_2 y}\,\underline{D}_{\alpha_3 z}, \tag{3.6}$$

unde :

$$\underline{D}_{\alpha_1 x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & c\alpha_1 & -s\alpha_1 & 0 \\ 0 & s\alpha_1 & c\alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \underline{D}_{\alpha_2 y} = \begin{bmatrix} c\alpha_2 & 0 & s\alpha_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b_2 \\ -s\alpha_2 & 0 & c\alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\underline{D}_{\alpha_3 z} = \begin{bmatrix} c\alpha_3 & -s\alpha_3 & 0 & 0 \\ s\alpha_3 & c\alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.7.}$$

Efectuînd calculele rezultă

$$\underline{D}_{E,0} = \begin{bmatrix} c\alpha_2 c\alpha_3 & -c\alpha_2 s\alpha_3 & s\alpha_2 & b_1 + b_3 s\alpha_2 \\ c\alpha_1 s\alpha_3 + s\alpha_1 s\alpha_2 c\alpha_3 & c\alpha_1 c\alpha_3 - s\alpha_1 s\alpha_2 s\alpha_3 & -s\alpha_1 c\alpha_2 & b_2 c\alpha_1 - b_3 s\alpha_1 c\alpha_2 \\ s\alpha_1 s\alpha_3 - c\alpha_1 s\alpha_2 c\alpha_3 & s\alpha_1 c\alpha_3 + c\alpha_1 s\alpha_2 s\alpha_3 & c\alpha_1 c\alpha_2 & b_2 s\alpha_1 + b_3 c\alpha_1 c\alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.8}$$

Vectorul $\bar{q}_E$ este în acest caz definit prin

$$\bar{q}_E = \{b_1\ b_2\ b_3\ \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\}^T. \tag{3.9}$$

În cazul cînd se cunosc vectorii $\bar{D}_i(\bar{q})$ respectiv $\bar{D}_{iE}(\bar{q}_E)$ se pot determina matricele Jacobi derivînd în raport cu timpul matricele care intervin în relația (3.5). Și această posibilitate este folosită mai rar din cauză că se întîmpină greutăți la efectuarea calculelor numerice. Pentru a determina matricea $\underline{J}$ se poate căuta o ecuație în deplasări virtuale de forma

$$\begin{Bmatrix} \delta\bar{r}_E \\ \cdots\cdots \\ \delta\bar{\alpha}_E \end{Bmatrix} = \underline{J}\,\delta\bar{q}, \tag{3.10}$$

urmînd ca deplasarea virtuală $\delta\bar{r}_E$ prin translație a punctului caracteristic, respectiv deplasarea virtuală $\delta\bar{\alpha}_E$ prin rotație a obiectului manipulat să se extragă din deplasarea $\delta\underline{D}_{n,0}$.

Aceste deplasări se obțin căutînd vectorii :

$$\delta\bar{r}_E = \underline{U}\,\delta\underline{D}_{n,0}\bar{k}_4; \quad \delta\bar{\alpha}_E = [\underline{U}\,\delta\underline{D}_{n,0}\underline{U}^T]^{-\vee}, \tag{3.11}$$

unde

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{k}_4 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}. \tag{3.12}$$

În cazul particular cînd toate cuplele cinematice sînt de rotație, considerînd vectorii evidențiați în figura 3 unde :

$$\bar{l}_n = \overline{O_{n-1}O_E}; \quad O_E \equiv O_n \tag{3.13}$$

și

$$\bar{l}_{j,i} = \overline{O_iO_j}; \quad (i,\ j = 0,1,2,\ldots,n). \tag{3.14}$$

se obțin :

$$\bar{v}_E = \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{k}_i \bar{l}_i \dot{q}_i;$$
$$\bar{\omega}_E = \sum_{i=0}^{n-1} \dot{q}_i \bar{k}_i. \tag{3.15}$$

În acest caz

$$\begin{Bmatrix} \bar{v}_E \\ \cdots \\ \bar{\omega}_E \end{Bmatrix} = \underline{J}\,\dot{\bar{q}}, \tag{3.16}$$

unde

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_0 \bar{l}_{n,0} & \cdots & \tilde{k}_{i\bar{l}\,n,i} & \cdots & \tilde{k}_{n-1\bar{l}\,n,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{k}_0 & \cdots & \bar{k}_i & \cdots & \bar{k}_{n-1} \end{bmatrix}, \tag{3.17}$$

relație care ușurează mult calculul matricei Jacobi. În literatură a fost stabilită relația de recurență

$$\underline{J}_i = \begin{bmatrix} \underline{E} & \cdots & \tilde{l}_{i+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \underline{O} & \cdots & \underline{E} \end{bmatrix} \underline{J}_{i+1}, \tag{3.18}$$

unde :

$$\underline{J}_{n+1} = \underline{J}; \quad \bar{l}_{i+1} = \bar{l}_{i,i+1}.$$

Ținînd seama de faptul că produsul vectorial este anticomutativ, din relația (3.18) se obține

$$\underline{J}_{i+1} = \begin{bmatrix} \underline{E} & -\tilde{l}_{i+1} \\ \underline{O} & \underline{E} \end{bmatrix} \underline{J}_i, \tag{3.19}$$

astfel încît calculul matricei $\underline{J}$ se reduce la calculul matricei $\underline{J}_i$.

În cazul cînd cuplele cinematice C_i sînt de clasa a cincea matricea Jacobi se exprimă prin

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} (1-\sigma_0)\tilde{k}_0\tilde{l}_{n,0} + \sigma_0\tilde{k}_0 & \cdots & (1-\sigma_i)\tilde{k}_i\tilde{l}_{n,i} + \sigma_i\tilde{k}_i & \cdots \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ (1-\sigma_0)\tilde{k}_0 & \cdots & (1-\sigma_i)\tilde{k}_i & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (1-\sigma_{n-1})\tilde{k}_{n-1}\tilde{l}_{n,n-1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ (1-\sigma_{n-1})\tilde{k}_{n-1} \end{bmatrix}, \tag{3.20}$$

unde $\sigma_i = 0$ corespunde unei cuple cinematice de rotație și $\sigma_i = 1$ unei cuple cinematice de translație.

În relațiile (3.17) respectiv (3.20) toți versorii $\bar{k}_i$ și toți vectorii $\bar{l}_{n,i}$ sînt exprimați în raportul $T(O_0)$.

4. APLICAȚII

Ca o primă aplicație se consideră un robot cu șase cuple cinematice din care trei cuple cinematice de translație și trei cuple cinematice de rotație. Acest robot poate fi asimilat cu un robot virtual format din trei module de rototranslație a căror axe rămîn permanent concurente și formează un reper cartezian. Robotul urmează să execute deplasarea unei scule pe suprafața paraboloidului de rotație

$$(x-100)^2 + (y-100)^2 + 20(z-200) = 0 \tag{4.1}$$

Vîrful sculei, reprezentînd punctul caracteristic O_E trebuie să străbată o curbă impusă care este situată pe suprafața paraboloidului. Se orientează axa sculei după discția normalei principale la curba impusă care are ecuațiile parametrice :

$$x = t; \quad y = t; \quad z = 200 - \frac{(t-100)^2}{10}, \tag{4.2}$$

unde t este timpul și

$$\bar{r}_E = \{x\ y\ z\}^T, \tag{4.3}$$

deci:

$$\bar{v}_E = \dot{\bar{r}}_E = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -\dfrac{t-100}{5} \end{Bmatrix}; \quad \ddot{\bar{r}}_E = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dfrac{1}{5} \end{Bmatrix}. \tag{4.4}$$

Notînd cu $\bar{\tau}$, $\bar{b}$ și $\bar{n}$ versorii tangentei, binormalei și normalei principale ai curbei pe care urmează să se deplaseze punctul caracteristic, exprimați în reperul fix, matricea omogenă de trecere de la reperul $T(O_E)$ la reperul fix $T(O_0)$ este

$$\underline{D}_{E,0} = \begin{bmatrix} \bar{\tau} & \bar{b} & \bar{n} & \bar{r}_E \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{4.5}$$

unde:

$$\bar{\tau} = \frac{\dot{\bar{r}}_E}{\| \dot{\bar{r}}_E \|}; \quad \bar{b} = \frac{\dot{\bar{r}}_E \ddot{\bar{r}}_E}{\| \dot{\bar{r}}_E \ddot{\bar{r}}_E \|}.$$

Efectuînd calculele se obține

$$\underline{D}_{E,0} = \begin{bmatrix} \dfrac{5}{\sqrt{50+(t-100)^2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{t-100}{\sqrt{100+2(t-100)^2}} & t \\ \dfrac{5}{\sqrt{50+(t-100)^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{t-100}{\sqrt{100+2(t-100)^2}} & t \\ -\dfrac{t-100}{\sqrt{50+(t-100)^2}} & 0 & \dfrac{5}{\sqrt{50+(t-100)^2}} & 200-\dfrac{(t-100)^2}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.6}$$

Egalînd matricea dată în relația (3.8) cu matricea din (4.6), pentru problema cinematică inversă se determină valorile deplasărilor b_1, b_2, b_3 respectiv valorile unghiurilor α_1, α_2, α_3 începînd din momentul inițial și apoi în momente situate la intervale de timp egale. În tabelul 1 sînt date cîteva din aceste valori calculate pentru deplasarea din punctul A în punctul B în timp de 1 s, punctele A și B fiind poziționate prin vectorii $\bar{r}_A = \{0\ 0\ -800\}^T$ respectiv $\bar{r}_B = \{10\ \ 10\ \ -628{,}1\}^T$.

În al doilea rînd se consideră un robot cu șase cuple cinematice de rotație (fig. 4). Reperul $T(O_6)$ se consideră suprapus peste reperul $T(O_E)$. Punctul caracteristic O_E urmează să se deplaseze pe traiectoria

$$x = 0, \quad z - 6y = 0, \tag{4.7}$$

Tabelul 1

Timp [sec.]	Alfa 1 [grade]	Alfa 2 [grade]	Alfa 3 [grade]
.1	−78.5788137252	−45.0251988826	87.4943714
.2	−78.4653793467	−45.0222139593	87.42039403893
.3	−78.3497005624	−45.0191368946	87.3972525034
.4	−78.231711068	−45.0159638635	87.3400142525
.5	−78.1113419607	−45.0126908427	87.3122084967
.6	−77.9885216133	−45.0093135917	87.2838173774
.7	−77.8631755448	−45.0058276477	87.2548222832
.8	−77.7352262724	−45.0022283056	87.225203807
.9	−77.6045931665	−44.9985106017	87.194941706
1	−77.4711922911	−44.9946693016	87.1640148532

Timp [sec.]	$B1$ [mm]	$B2$ [mm]	$B3$ [mm]
.1	−549.875487811	764.850495051	−219.942733492
.2	−534.931291496	745.442926323	−217.884244604
.3	−520.130208549	726.242049214	−215.813133068
.4	−505.472295468	707.248087899	−213.729026142
.5	−490.957611697	688.46127636	−211.631536693
.6	−476.586219918	669.88185892	−209.520262479
.7	−462.358186177	651.510090821	−207.394785421
.8	−448.273580192	633.346238797	−205.254670867
.9	−434.332475484	615.390581719	−203.099466812
1	−420.534949676	597.643411291	−200.928702995

conservînd orientarea inițială a obiectului manipulat. Dacă timpul t se admite ca parametru, legea de mișcare impusă punctului caracteristic este

$$\bar{r}_E(t) = \bar{r}_E(0) + \{O \quad 0{,}1\ t^2 \quad 0{,}6t^2\}^T. \tag{4.8}$$

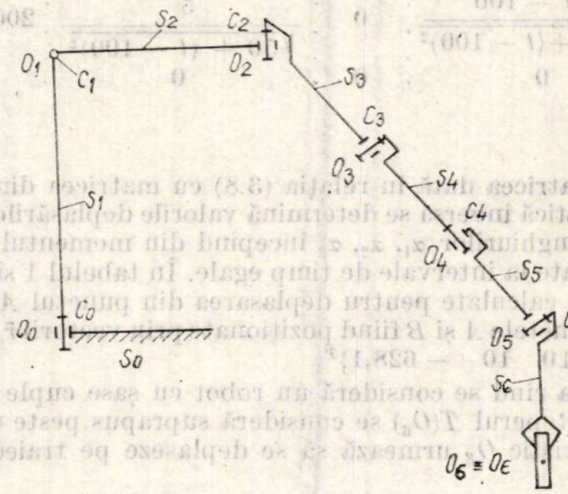


Fig. 4

În aceste condiții matricea de transformare omogenă atașată obiectului manipulat este

$$\underline{D}_{E,0}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0{,}45 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}5+0{,}1t^2 \\ 0 & -1 & 0 & -0{,}3+0{,}6t^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{4.9}$$

deoarece în momentul inițial se admite că matricea $\underline{D}_{E,0}(0)$ a fost

$$\underline{D}_{E,0}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0{,}45 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}5 \\ 0 & -1 & 0 & -0{,}3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.10}$$

Vectorul coordonatelor generalizate se consideră nul în momentul inițial.

Se admite că la sfîrșitul intervalului de timp δt poziția punctului caracteristic și orientarea obiectului manipulat se definesc prin matricea

$$\delta \underline{D}_{E,0} = \underline{D}_{E,0}(\delta t) - \underline{D}_{E,0}(0) \tag{4.11}$$

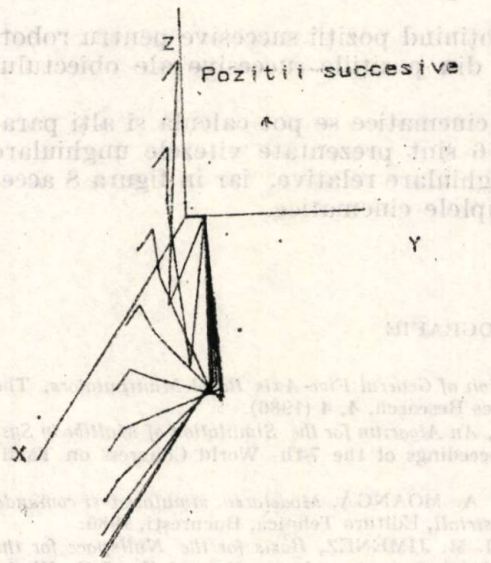


Fig. 5

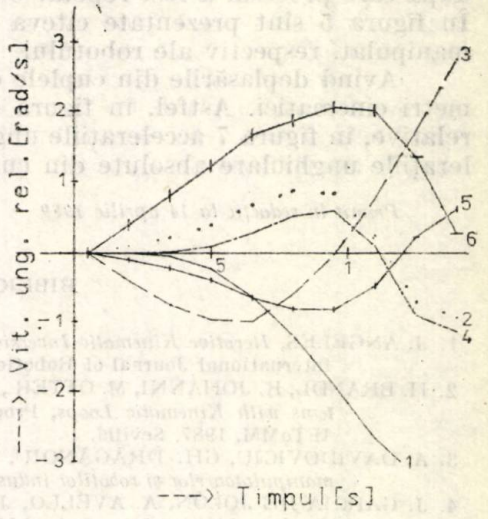


Fig. 6

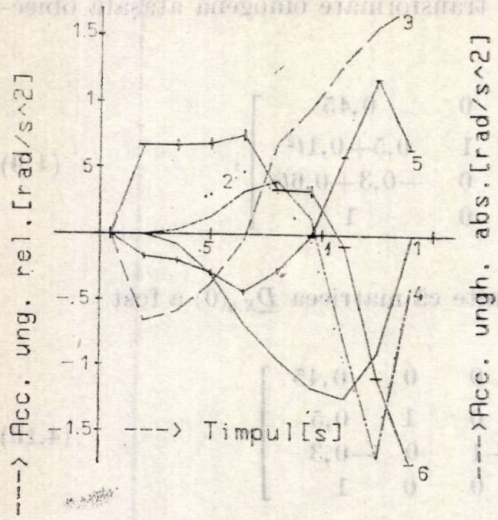


Fig. 7

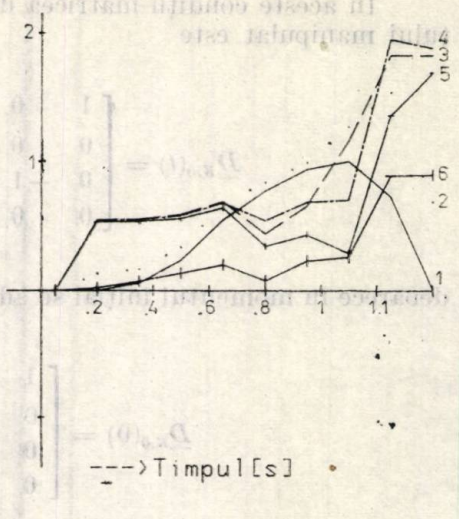


Fig. 8

Matricea Jacobi a acestui robot, de dimensiune 6×6, a fost determinată numeric pentru fiecare moment din intervalul de timp considerat. Și calculul inversei matricei Jacobi a fost făcut prin discretizarea intervalului de timp, cu ajutorul calculatorului, încît a fost posibil să se rezolve problema cinematică inversă. Astfel, în primul rînd a fost calculată matricea $\underline{J}$ pentru poziția inițială a robotului. Apoi, după calculul vectorului $\bar{q}(\delta t)$ a fost determinat vectorul

$$\bar{q}' = \bar{q}(0) + \bar{q}(\delta t), \tag{4.12}$$

după care procesul a fost repetat obținînd poziții succesive pentru robot. În figura 5 sînt prezentate cîteva din pozițiile succesive ale obiectului manipulat, respectiv ale robotului.

Avînd deplasările din cuplele cinematice se pot calcula și alți parametri cinematici. Astfel, în figura 6 sînt prezentate vitezele unghiulare relative, în figura 7 accelerațiile unghiulare relative, iar în figura 8 accelerațiile unghiulare absolute din cuplele cinematice.

Primit în redacție la 14 aprilie 1989

BIBLIOGRAFIE

1. J. ANGELES, *Iterative Kinematic Inversion of General Five-Axis Robot Manipulators*, The International Journal of Robotics Research, **4**, 4 (1986).
2. H. BRANDL, R. JOHANNI, M. OTTER, *An Algoritm for the Simulation of Multibody Systems with Kinematic Loops*, Proceedings of the 7-th World Congress on TMM-IFToMM, 1987, Sevilla.
3. A. DAVIDOVICIU, GH. DRĂGĂNOIU, A. MOANGĂ, *Modelarea, simularea și comanda manipulatoarelor și roboților industriali*, Editura Tehnică, București, 1986.
4. J. GARCIA DE JOLÓN, A. AVELLO, J. M. JIMÉNEZ, *Basis for the Nullspace for the Jacobean Matrix of Constrained Multibody Systems*, Proceedings of the 7-th World Congress on TMM—IFToMM, 1987, Sevilla.

5. I. GROȘANU, GH. VĂDUVA, *Kinematics of Robots with a Planned Trajectory*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., **30**, 5 (1985).
6. S. GUPTA, M. A. TOWNSEND, *On the Equations of Motion for Robot Arms and Open Kinematic Chains*. Trans. ASME Journ. of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, **110** (1988).
7. H. HEISS, *Grundlagen der Koordinatentransformation bei Industrierobotern*, Robotersystem, **2**, (1986).
8. K. H. HUNT, *Robot Kinematics — A Compact Analitic Inverse Solution for Velocities*, Trans. of the ASME Journal of M T A in Design, **109** (1987).
9. FR. KOVÁCS, G. COJOCARU, *Manipulatoare, roboți și aplicațiile lor industriale*, Edit. Facla, Timișoara, 1982.
10. F. L. LITVIN, V. PARENTI CASTELI, P. FANGHELLA, J. TAN, *Singularieties in Motion and Displacement Functions of Manipulators and Spatial Linkages*. Proceeding of the 7-th World Congress on TMT — IFTOMM, 1987, Sevilla.
11. P. G. RÁNKY, C. Y. HO, *Robot Modelling : Control and Applications with Software*, Springer — Verlag, Berlin, Heidelberg, 1985.
12. M. RENAUD, *Calcul de la matrice Jacobienne nécessaire à la commande coordonnée d'un manipulateur*, Mechanism and Machine Theory, **15** (1980).

STUDIUL STĂRII DE EFORTURI DE MEMBRANĂ ÎN TURNURILE ÎN FORMĂ DE TOR HIPERBOLIC *)

de M. V. SOARE, D. IORDACHE
Institutul de construcții
București

CORINA-MARIA ALDEA
Institutul de studii și proiectări
hidroenergetice, București

Se descrie calculul eforturilor de membrană într-o placă subțire de rotație în formă de turn. Prin particularizarea formei se obțin torul hiperbolic și hiperboloidul de rotație cu o pînză. Algoritmul de calcul bazat pe metoda trapezului și, în alternativa finală, pe metoda Runge-Kutta, a condus la elaborarea programului TOR. Un exemplu de calcul a permis determinarea eforturilor din greutatea proprie, din acțiunea vîntului și pentru combinația de încărcări $(0{,}9G + 1{,}3V)$. În final se trag concluzii asupra modificării stării de eforturi cînd se trece de la hiperboloidul de rotație la torul hiperbolic.

Într-o publicație anterioară [2] a fost studiată starea de eforturi de membrană în turnurile avînd forma unui hiperbolcid de rotație cu o pînză. În studiul de față este reluată problema mai generală cînd suprafața mediană este o suprafață de rotație oarecare. Soluția numerică este bazată pe introducerea diferențelor finite, atît în metoda trapezului, cît și în metoda Runge-Kutta. Suprafața mediană este particularizată pentru *torul hiperbolic*, care își găsește o largă aplicare la construcția turnurilor de răcire moderne, de mare înălțime. Un exemplu de calcul ilustrează teoria dezvoltată și programul de calcul elaborat. În încheiere se trag concluzii asupra diferenței dintre stările de eforturi în cele două turnuri cu geometrii diferite.

1. ECUAȚIILE DE ECHILIBRU DE MEMBRANĂ ALE PLĂCILOR SUBȚIRI DE ROTAȚIE.

Ecuațiile generale și calea de rezolvare cu ajutorul seriilor trigonometrice au fost detaliate în studiul [2] astfel încît ne vom limita la transcrierea ecuațiilor diferențiale ordinare relative la armonica de rang n:

$$\frac{\mathrm{d}F_n}{\mathrm{d}z} = \frac{r_0}{r_1 \sin^2\varphi} G_n + \left(\frac{1}{n} X_n r_0 + Z_n r_2 \right) r_2, \tag{1a}$$

$$\frac{\mathrm{d}G_n}{\mathrm{d}z} = \frac{n^2}{r_0^2} F_n - (Y_n \sin\varphi + Z_n \cos\varphi) r_2, \tag{1b}$$

*) Comunicare prezentată la cea de-a XIII-a Consfătuire de Mecanica Solidelor, Sibiu, 3 iunie 1989, de către cel de-al doilea dintre autori.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 49, NR. 2, 1990, P. 173–184

în care F_n şi G_n sînt două funcţii de eforturi din care derivă eforturile meridian şi de lunecare, conform relaţiilor

$$N_{\varphi\theta n} = -\frac{nF_n}{r_0^2}, \tag{2a}$$

$$N_{\varphi n} = \frac{G_n}{r_0 \sin\varphi}, \tag{2b}$$

X_n, Y_n, Z_n componentele încărcării exterioare, corespunzătoare armonicii n,

φ — unghiul meridian,

z — variabila independentă reprezentînd cota unui cerc paralel, măsurată faţă de cercul colier ($z = 0$),

r_0, r_1, r_2 — raza cercului paralel, respectiv cele două raze de curbură principale ale suprafeţei mediane.

Eforturile finale sînt exprimate prin sumele

$$\begin{gathered} N_\varphi = \sum N_{\varphi n} \cos n\theta,\ N_\theta = \sum N_{\theta n} \cos n\theta, \\ N_{\varphi\theta} = N_{\theta\varphi} = \sum N_{\varphi\theta n} \sin n\theta \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \end{gathered} \tag{3}$$

Eforturile inelare se deduc din cele meridiane cu ajutorul relaţiei

$$N_{\theta n} = -N_{\varphi n}\frac{r_2}{r_1} - Z_n r_2. \tag{4}$$

Încărcarea din acţiunea vîntului a fost detaliată în studiul [2].

2. APLICAREA METODEI TRAPEZULUI ŞI METODEI RUNGE-KUTTA

Pentru simplificarea scrierii vom introduce notaţiile generale

$$\begin{gathered} A = \frac{r_0}{r_1 \sin^3\varphi}, \\ B = \frac{1}{r_0^2}, \\ C_n = \left(\frac{1}{n} X_n r_0 + Z_n r_2\right) r_2, \\ D_n = (Y_n \sin\varphi + Z_n \cos\varphi)\, r_2, \end{gathered} \tag{5}$$

în care indicele n se referă, ca şi precedent, la rangul armonicei studiate; A, B, C_n, D_n sînt funcţii de unghiul meridian φ, respectiv de cota z.

Cu notaţiile (5), sistemul de ecuaţii diferenţiale (1) se scrie:

$$\begin{aligned} \frac{dF_n}{dz} &= AG_n + C_n, \\ \frac{dG_n}{dz} &= n^2 BF_n - D_n. \end{aligned} \tag{6}$$

În continuare se suprimă indicele n și, prin împărțirea înălțimii într-un număr de intervale egale Δz, vom nota cu m nodul curent (ultimul interval poate să fie diferit).

Vom începe cu *metoda trapezului*. Folosind *diferențele progresive* se va putea scrie pentru nodul curent m:

$$\frac{dF_m}{dz} \approx \frac{F_{m+1} - F_m}{\Delta z}, \quad \frac{dG_m}{dz} \approx \frac{G_{m+1} - G_m}{\Delta z}.$$

Atunci sistemul de ecuații (6), transcris în diferențe finite, ia forma:

$$\begin{aligned} F_{m+1} &= F_m + A_m \Delta z \cdot G_m + C_m \Delta z, \\ G_{m+1} &= G_m + n^2 B_m \Delta z \cdot F_m - D_m \Delta z. \end{aligned} \tag{7}$$

Cu condițiile inițiale precizate (F_0 și G_0 dați), sistemul (7) constituie relații de recurență care determină, din aproape în aproape, valorile F_1, G_1; F_2, G_2; ... Cunoscînd valorile celor două funcții de eforturi, eforturile de membrană vor fi apoi determinate cu ajutorul relațiilor (2a), (2b) și (4).

În absența unor încărcări liniare aplicate la marginea superioară (rostul $m = 0$), condițiile inițiale se scriu $F_0 = 0$, $G_0 = 0$.

Aplicarea *metodei Runge-Kutta* se face așa cum s-a indicat în studiul nostru anterior [2].

Trebuie observat că dacă se consideră direct

$$A_m = \frac{a^2}{r_{0,m}^2 \operatorname{tg}^2 A}, \qquad B_m = \frac{1}{r_{0,m}^2},$$

se regăsește calculul turnului în formă de hiperboloid de rotație cu o pînză.

3. GEOMETRIA TORULUI HIPERBOLIC

Pentru realizarea turnurilor de răcire de înălțime mare, hiperboloidul de rotație cu o pînză nu permite realizarea unor secțiuni transversale (ale cercurilor paralele) suficient de mari. S-a ajuns astfel la curba meridiană denumită în literatura de specialitate hiperbolă meridiană *deplasată*. Într-un sistem de axe de coordonate carteziene (situat într-un plan meridian) Or_0z, ecuația ei se scrie

$$r_0 = c + \frac{a}{b}\sqrt{z^2 + b^2} \tag{8}$$

în care a, b reprezintă semiaxa reală, respectiv imaginară a hiperbolei meridiane,

c — distanța dintre axa de rotație și axa imaginară a hiperbolei meridiane.

Ținînd seama că $r_0^2 = x^2 + y^2$ (într-un sistem de axe triortogonal) ridicînd la pătrat de două ori (pentru raționalizare), rezultă ecuația *torului hiperbolic* :

$$\left(x^2 + y^2 - \frac{a^2}{b^2} z^2 - a^2\right)^2 - 2c^2\left(x^2 + y^2 + \frac{a^2}{b^2} z^2 + a^2\right) + c^4 = 0 \qquad (9)$$

care este o suprafață de gradul al patrulea, pe cînd hiperboloidul de rotație cu o pînză este o suprafață de gradul al doilea (cuadrică).

Pentru calcule va fi utilizată relația (8).

Dacă se consideră $c = 0$ în (8) și (9) rezultă ecuația hiperbolei meridiane

$$r_0 = \frac{a}{b}\sqrt{z^2 + b^2},$$

respectiv a hiperboloidului de rotație cu o pînză

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

4. PROGRAM DE CALCUL TOR

Rezolvarea numerică dezvoltată în paragrafele precedente este relativ simplă, însă necesită un volum de calcul foarte mare, iar efectuarea lui ar răpi un timp îndelungat pentru un calcul manual. De aceea a fost elaborat programul de calcul automat TOR, corespunzător calculului de membrană a turnurilor în formă de tor hiperbolic, supuse acțiunii greutății proprii și vîntului, aplicînd metoda Runge-Kutta.

Notațiile folosite au fost sistematizate, codificate și definite în Anexa 1. În Anexa 2 este redată organigrama programului TOR.

Datele de intrare sînt următoarele : a, b, c, h_i, h_s, H_c, Δz, C_v, q_{10}, γ, $\Delta\theta$, λ_0, λ_1, λ_2, d_i, d_s, d_1, d_2, h_1, h_2, h_3.

Unitățile de măsură folosite sînt : m pentru lungimi, daN/m² pentru presiuni, tf/m pentru eforturile de membrană.

În funcție de datele inițiale programul furnizează următoarele :

1° Eforturile de membrană N_φ și N_θ din greutatea proprie, în lungul meridianelor.

2° Eforturile de membrană N_φ, N_θ, $N_{\varphi\theta}$ datorate armonicelor $n = 0$, 1 și 2 din acțiunea vîntului, în lungul meridianelor $\theta = 0$ și respectiv $\theta = \pi/2$.

3° Eforturile totale N_φ și N_θ, din acțiunea vîntului, în lungul meridianului de stagnare ($\theta = 0$).

4° Eforturile de membrană N_φ, N_θ, $N_{\varphi\theta}$ din acțiunea vîntului, pentru diferite secțiuni meridiane (diferind prin $\Delta\theta$).

5° Eforturile de membrană N_φ și N_θ pentru combinația de încărcări $0{,}9G + 1{,}3V$, pentru diferite cote z și diferite secțiuni meridiane, necesare pentru calculul la fisurare al plăcii de beton armat (G și V reprezintă eforturile datorate greutății proprii, respectiv vîntului).

Pentru exemplificare a fost considerat un turn în formă de tor hiperbolic, avînd următoarele date numerice :

$H = 125$ m — înălțimea totală a turnului,
$H_{st} = 27$m — înălțimea stîlpilor,
$H_c = 110$ m — înălțimea cercului colier deasupra nivelului terenului,
$H_p = 98$ m — înălțimea totală a plăcii, din care
$h_i = 83$ m — sub cercul colier,
$h_s = 15$m — deasupra cercului colier,
$a = 16{,}05$m — semiaxa reală a hiperbolei meridiane,
$b = 53{,}0375$m — semiaxa imaginară a hiperbolei meridiane,
$c = 17{,}45$ m — distanța dintre axa de rotație și axa imaginară a hiperbolei meridiane,
$\lambda_0 = -0{,}804$, $\lambda_1 = +0{,}440$, $\lambda_2 = +1{,}380$ coeficienții sumei trigonometrice C_0 pentru suprafețe netede,
$\lambda_0 = -0{,}258$, $\lambda_1 = +0{,}488$, $\lambda_2 = +0{,}476$ coeficienții sumei trigonometrice C_0 pentru suprafețe rugoase, factorul de rafală,
$C_g = 1{,}86$
$q_{10} = 100$ daN/m² presiunea dinamică de bază a vîntului,
$\gamma = 2500$ daN/m³ greutatea tehnică a betonului armat,
$d_s = 0{,}60$ m — grosimea plăcii la marginea superioară,
$d_i = 1{,}20$ m — grosimea plăcii la marginea inferioară,
$d_1 = 0{,}20$ m — grosimea plăcii la $h_1 = 6$ m de la marginea superioară,
$d_2 = d_3 = 0{,}18$ m grosimea plăcii între $h_2 = 15$ m și $h_3 = 80$ m de la marginea superioară.

Între cotele indicate s-a admis că grosimea plăcii variază liniar. Pasul rețelei a fost $\Delta z = 3$ m pe înălțimea turnului (intervalul de la bază a rezultat de 2 m), iar secțiunile meridiane (care precizează poziția punctelor pe cercurile paralele) au fost luate multiplu de $\pi/12$, începînd de la meridianul de stagnare ($\theta = 0$).

Pentru comparație au fost considerate atît suprafața netedă, cît și suprafața rugoasă.

În figura 1 a ... d au fost reprezentate curba meridiană, variația grosimii plăcii, diagramele N_φ și N_θ provenind din greutatea proprie.

În figura 2 a, b, c a fost redată variația eforturilor N_φ, N_θ și $N_{\theta\varphi}$ datorite acțiunii vîntului, pe diferite inele desfășurate, iar în figura 3 este redată variația eforturilor meridiane N_φ pe înălțimea turnului, provenind din combinația de încărcări $0{,}9G + 1{,}3V$.

În sfîrșit, pentru a se vedea influența deplasării hiperbolei meridiane, au fost repetate calculele considerînd aceleași date numerice, cu $c = 0$. Variațiile eforturilor corespunzătoare au fost trecute cu linie întreruptă în figurile 1 a, c, d și 3.

Se observă că deplasarea hiperbolei meridiane cu cantitatea c are drept consecință dilatarea suprafeței mediane. Din punctul de vedere al stării de eforturi de membrană, produsă de greutatea proprie, eforturile meridiane N_φ suferă modificări reduse (vezi figura 1c), în timp ce eforturile inelare N_θ cresc, la torul hiperbolic, aproximativ în raportul $\frac{c+a}{c}$.

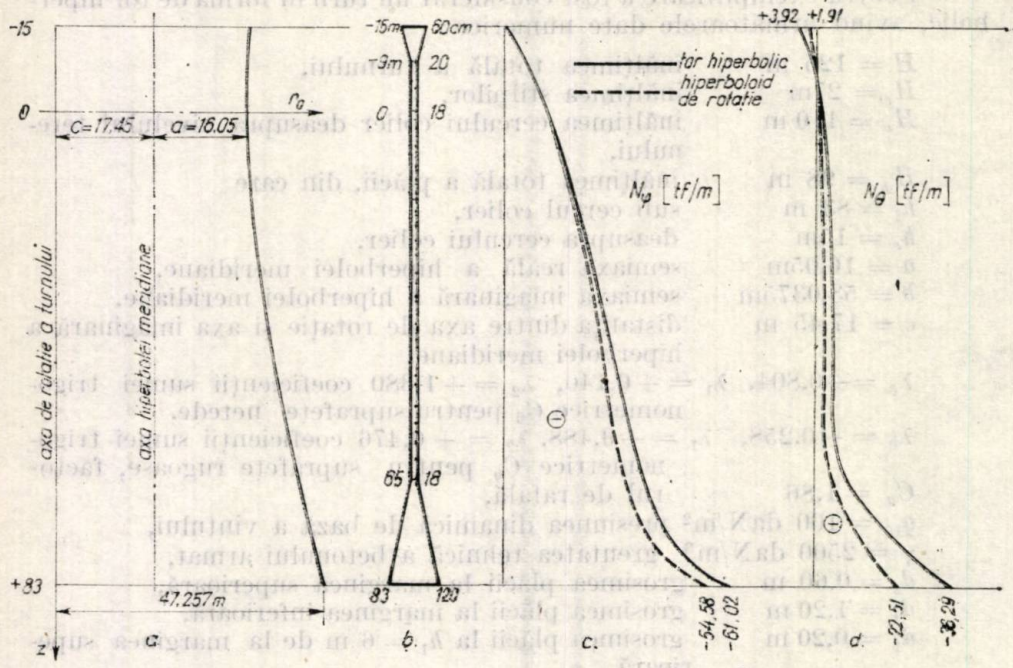


Fig. 1. — a) Arcul de hiperbolă meridiană ; b) variaţia grosimii plăcii pe înălţimea turnului ; c) diagrama eforturilor meridiane N_φ datorite greutăţii proprii ; d) diagrama eforturilor inelare N_θ datorite greutăţii proprii.

La combinaţia de încărcări $0{,}9G + 1{,}3V$ se constată că eforturile meridiane sînt considerabil mai mici la tor decît la hiperboloid. Acest rezultat poate fi explicat prin aceea că, efectul vîntului fiind dominant faţă de greutatea proprie, turnul lucrează aproximativ ca o consolă supusă la încovoiere. La tor secţiunea transversală avînd un diametru mai mare, modulul de rezistenţă va fi mai mare decît cel al secţiunii transversale corespunzătoare hiperboloidului. Aceasta antrenează eforturi meridiane mai mici.

Rugozitatea suprafeţei joacă deasemeni un rol important, suprafaţa netedă conducînd la eforturi mai mari decît cea rugoasă ; de menţionat că, în literatura de specialitate nu se găsesc indicaţii privind evaluarea presiunilor pentru rugozităţi intermediare între cele două situaţii extreme.

Primit la redacţie la 31 ianuarie 1989

BIBLIOGRAFIE

1. M. V. SOARE, *Aplicarea ecuaţiilor cu diferenţe finite la calculul plăcilor curbe subţiri*, ediţia 2-a, Edit. Academiei, Bucureşti, 1968.

2. M. V. SOARE, D. IORDACHE, *Calculul eforturilor de membrană în turnurile de răcire hiperbolice*. St. Cerc. Mec. Apl., **48**, 5, (1989).

Notă. La articolul citat la referinţa [2], la p. 509 va fi suprimată fraza de la rîndurile 8 şi 9.

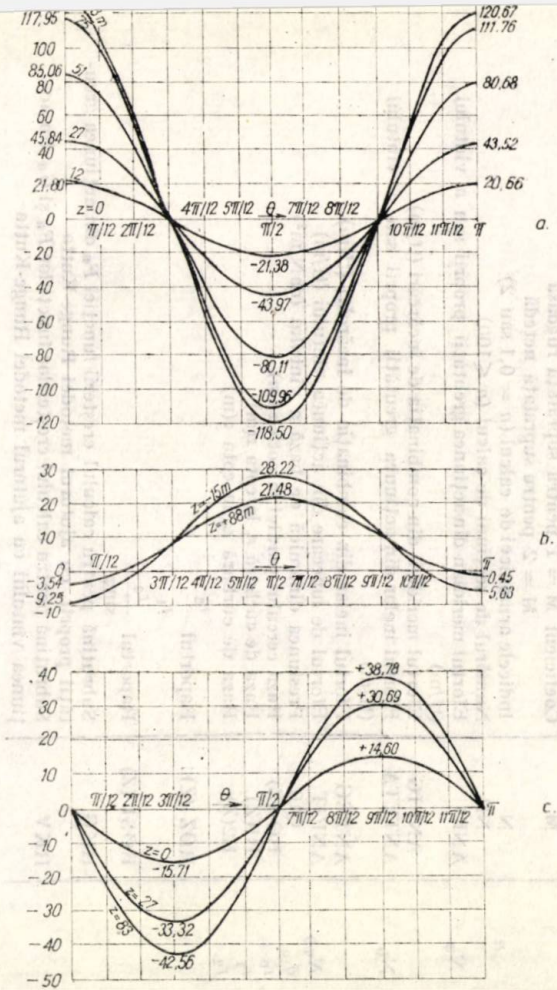


Fig. 2. — a) Variația eforturilor meridiane N_φ; b) variația eforturilor inelare N_0; c) variația eforturilor de lunecare $N_{\varphi\theta}$ datorite acțiunii vîntului, pentru suprafața netedă.

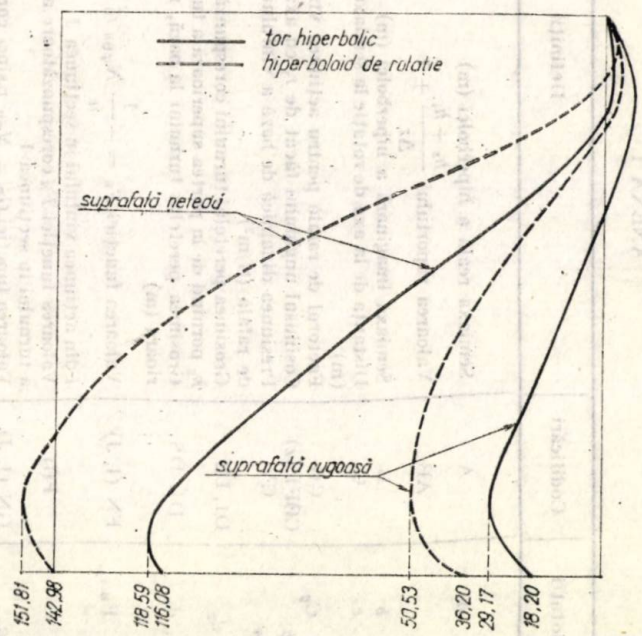


Fig. 3. — Variația eforturilor meridiane N_φ pe înălțimea turnului, provenind din combinația de încărcări $0{,}9G+1{,}3V$, în cazul torului hiperbolic și a hiperboloidului de otație, pentru suprafața netedă și suprafața rugoasă.

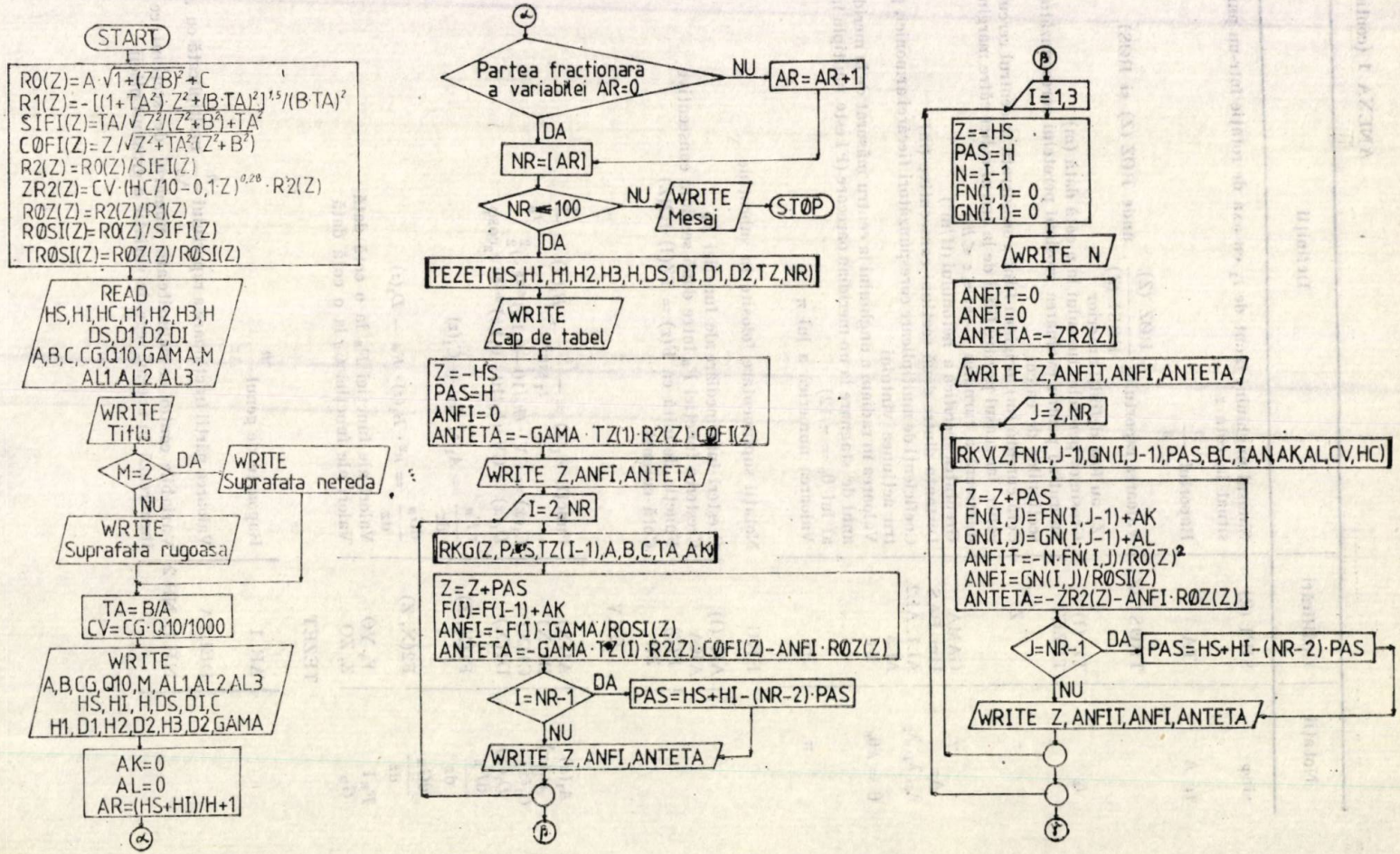
ANEXA 1

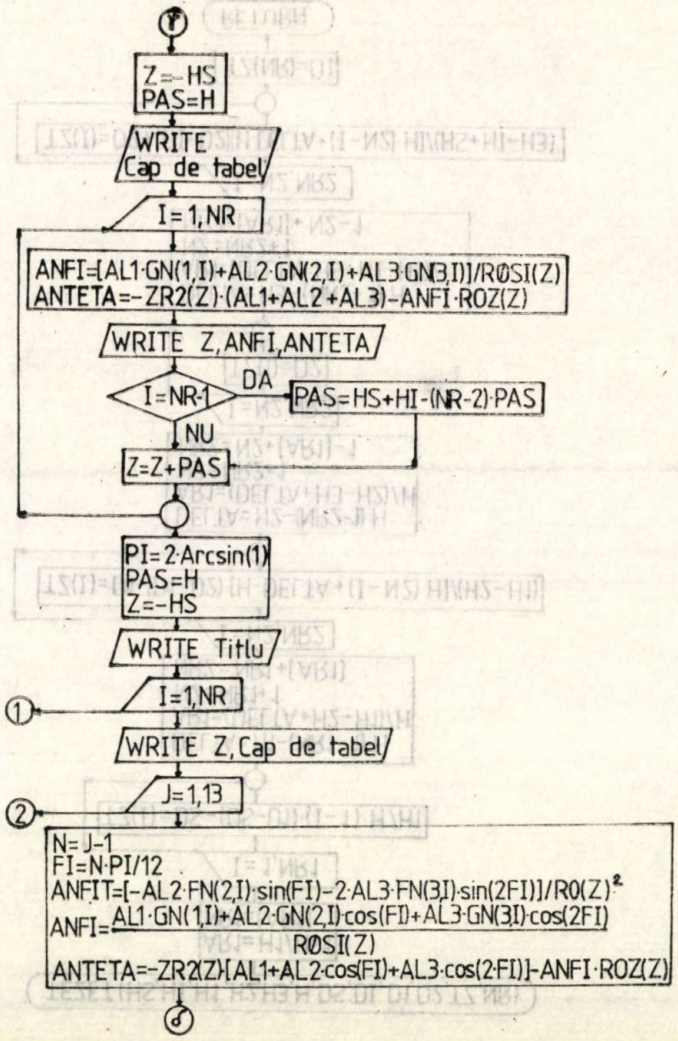
Notații	Codificări	Definiții
a	A	Semiaxa reală a hiperbolei (m)
	AR	Valoarea raportului $\frac{h_s + h_i}{\Delta z} + 1$
b	B	Semiaxa imaginară a hiperbolei (m)
c	C	Distanța de la axa de rotație la semiaxa imaginară a hiperbolei (m)
C_g	CG	Factorul de rafală pentru acțiunea vîntului
$\cos\varphi$	CØFI (z)	Cosinusul unghiului făcut de r_1 cu axa de rotație
$C_g p_0$	CV	Presiunea dinamică de bază a vîntului multiplicată cu factorul de rafală (tf/m²)
d_1, d_2	D1, D2	Grosimea peretelui turnului corespunzătoare cotei h_1, respectiv h_2 pornind de la partea superioară a turnului către bază (m)
d_i, d_s	DI, DS	Grosimea peretelui turnului la bază, respectiv la marginea superioară (m)
F_n	FN (I, J)	Valoarea funcției $F_n = -\frac{1}{n} N_{\varphi\theta n} r_0^2$ corespunzătoare armonicei i din acțiunea vîntului în secțiunea J
	F(i)	Valoarea funcției F_n corespunzătoare acțiunii greutății proprii a turnului în secțiunea I
G_n	GN (I, J)	Valoarea funcției $G_n = N_{\varphi n} r_0 \sin\varphi$ corespunzătoare armonicei I din acțiunea vîntului și secțiunii J
h_1, h_2, h_3	H1, H2, H3	Cote măsurate de la partea superioară a turnului către bază, de la care se modifică legea liniară de variație a grosimii peretelui (m)
h_c	HC	Înălțimea totală de la cercul colier al turnului la baza construcției (m)
h_i	HI	Înălțimea turnului de la cercul colier la baza turnului
h_s	HS	Înălțimea turnului deasupra cercului colier
k, l	AK, AL	Creșterile funcțiilor F_n, respectiv G_n pentru două puncte consecutive
	M	Coeficient M = 1 pentru suprafață rugoasă M = 2 pentru suprafață netedă
n	N	Indicele armonicei de calcul ($n = 0,1$ sau 2)
	NR	Numărul de secțiuni de calcul ($n \leqslant 100$)
N_φ	ANFI	Efortul meridian din acțiunea greutății proprii sau a vîntului (tf/m)
	ANFIG	Efortul meridian din combinația de încărcări (tf/m)
N_θ	ANTETA	Efortul inelar din acțiunea greutății proprii sau a vîntului (tf/m)
	ANTEG	Efortul inelar din combinația de încărcări (tf/m)
$N_{\varphi\theta}$	ANFIT	Efortul de lunecare din acțiunea vîntului (tf/m)
q_{10}	Q10	Presiunea dinamică de bază a vîntului (daN/m²)
r_0	RO (Z)	Raza cercului paralel la cota z (m)
r_1	R1(Z)	Raza de curbură r_1 la cota z(m)
r_2	R2(Z)	Raza de curbură r_2 la cota z(m)
	RØZ (Z)	Raportul $\frac{r_2}{r_1}$
	RØSI (Z)	Raportul $\frac{r_0}{\sin\varphi}$
	RKG	Subrutină pentru calculul creșterii funcției F_n din acțiunea greutății proprii, cu ajutorul metodei Runge-Kutta
	RKV	Subrutină pentru calculul creșterilor funcțiilor F_n și G_n din acțiunea vîntului cu ajutorul metodei Runge-Kutta

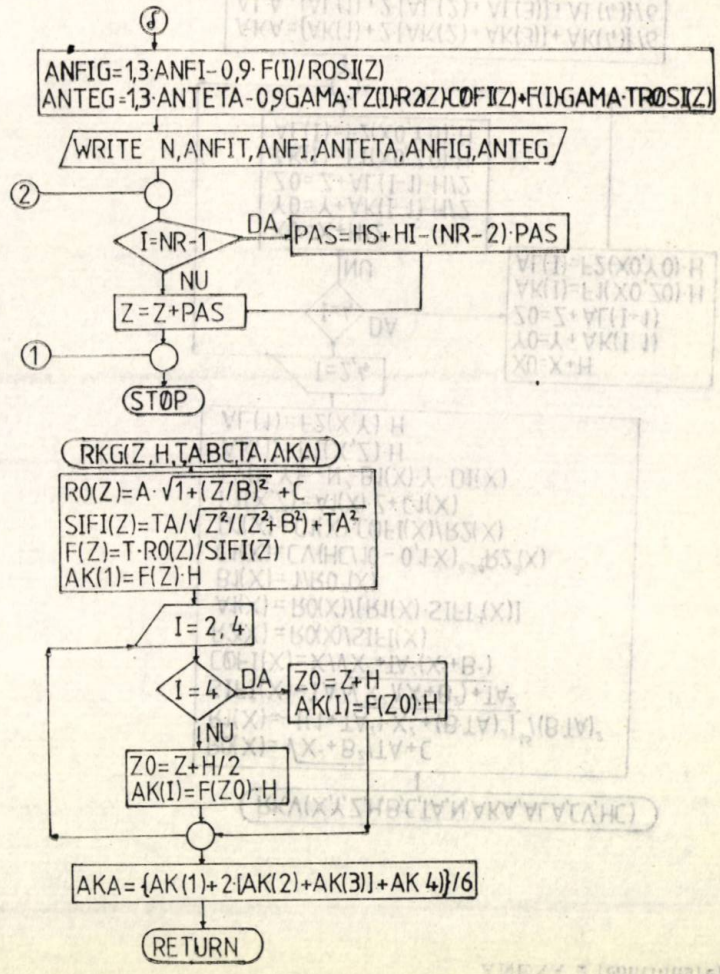
ANEXA 1 (continuare)

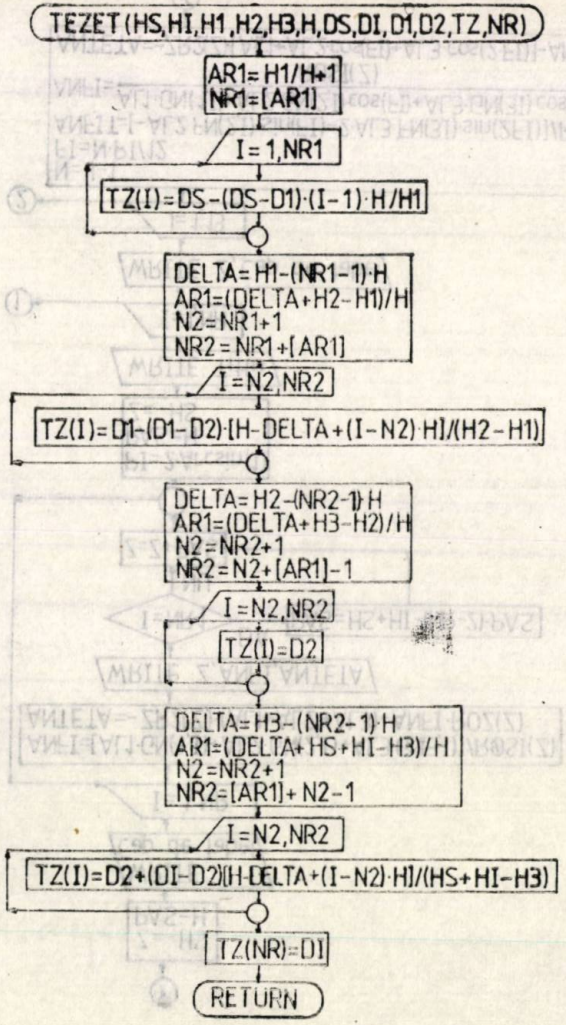
Notaţii	Codificări	Definiţii
$\sin\varphi$	SIFI (Z)	Sinusul unghiului făcut de r_1 cu axa de rotaţie într-un punct situat la cota z
tg A	TA	Raportul $\frac{b}{a}$
	TRØSI (Z)	Valoarea raportului $\frac{\text{RØZ (Z)}}{\text{RØSI (Z)}}$, unde RØZ (Z) şi RØSI (Z) au fost definiţi anterior
t_z	TZ (I)	Grosimea peretelui turnului la o cotă dată (m)
	TEZET	Subrutină pentru evaluarea grosimii peretelui corespunzătoare secţiunilor de calcul
z	Z	Cotă curentă (m), originea fiind considerată în centrul cercului colier, iar sensul pozitiv fiind de la cercul colier către marginea inferioară a turnului ($-h_s \leqslant z \leqslant h_i$)
γ	GAMA	Greutatea specifică a betonului (tf/m^3)
Δz	Hm PAS	Distanţa dintre două secţiuni consecutive (m)
$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$	AL1, AL2, AL3	Coeficienţi de multiplicare corespunzători fiecărei armonici, pentru acţiunea vîntului
$\theta = k\theta_0$	FI	Valoarea în radiani a unghiului la centru măsurat de la meridianul de stagnare la un meridian oarecare (FI este multiplu întreg al lui $\theta_0 = \pi/12$)
π	PI	Valoarea numerică a lui π
	RKG	Notaţii suplimentare folosite în subrutine
	AK (I)	Creşteri intermediare ale funcţiei F_n
	AKA	Creşterea funcţiei F_n între două secţiuni consecutive
	F(Z)	Funcţie definită ca $F(z) = TZ(I) \cdot R2(Z)$
	ZO	Cotă curentă
	RKV	
$A_1(x)$	A1(X)	Funcţii $A_1(x) = \frac{r_0}{r_1 \sin^3\varphi}$, $B_1(x) = \frac{1}{r_0^2}$
$B_1(x)$	B1 X)	
$C_1(x)$	C1(X)	$C_1(x) = CV \cdot (h_c/10 - 0{,}1x)^{0{,}28} \cdot r_2^2$
$D_1(x)$	D1(X)	$D_1(x) = CV \cdot (h_c/10 - 0{,}1x)^{0{,}28} \cdot r_2 \cos\varphi$
$\frac{dF_n}{dz}$	F1(X, Z)	$\frac{dF_n}{dz} = A_1(z) \cdot G_n + C_1(z)$
$\frac{dG_n}{dz}$	F2(X, Z)	$\frac{dG_n}{dz} = n^2 \cdot B_1(z) \cdot F_n - D_1(z)$
F_nI	Y, YO	Valori ale funcţiei F_n la o cotă dată
G_n	Z, ZO	Valori ale funcţiei G_n la o cotă dată
	TEZET	
	AR 1	Rapoarte de genul $\frac{h}{\Delta z}$
	DELTA	Valoarea părţii fracţionare a raportului $\frac{h}{\Delta z}$ multiplicată cu Δz(m)
	NR 1, NR 2	Variabile contor ce delimitează numărul de secţiuni ce se încadrează în aceeaşi lege de variaţie a grosimii plăcii

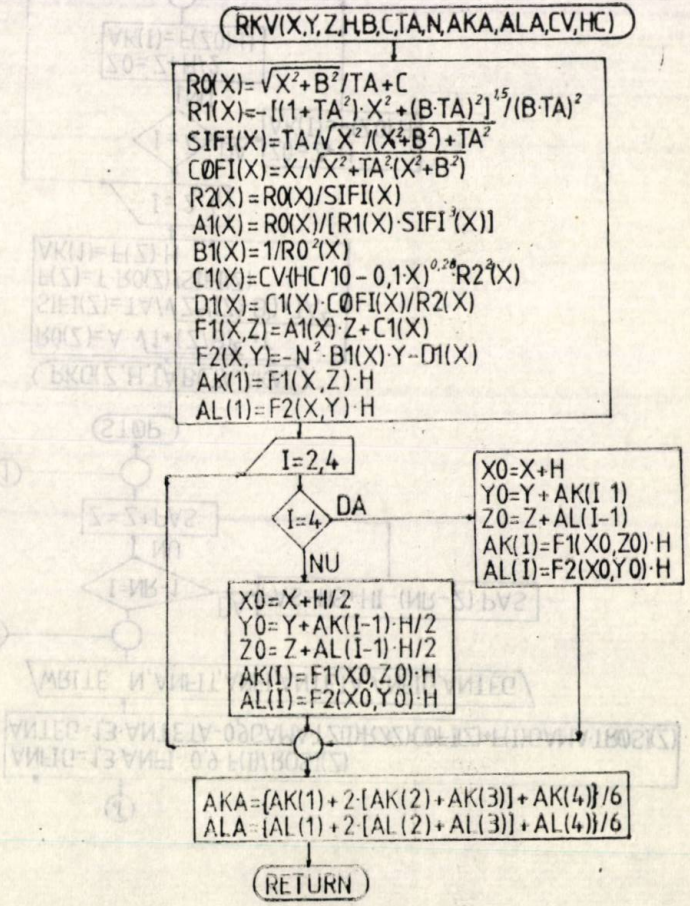
ANEXA 2


START
R0(Z)=A·√1+(Z/B)²+C
R1(Z)=-[(1+TA²)·Z²+(B·TA)²]^1,5/(B·TA)²
SIFI(Z)=TA/√Z²/(Z²+B²)+TA²
COFI(Z)=Z/√Z²+TA²·(Z²+B²)
R2(Z)=R0(Z)/SIFI(Z)
ZR2(Z)=CV·(HC/10-0,1·Z)^0,28·R2(Z)
ROZ(Z)=R2(Z)/R1(Z)
ROSI(Z)=R0(Z)/SIFI(Z)
TROSI(Z)=ROZ(Z)/ROSI(Z)
READ
HS,HI,HC,H1,H2,H3,H
DS,D1,D2,DI
A,B,C,CG,Q10,GAMA,M
AL1,AL2,AL3
WRITE
Titlu
M=2
DA
WRITE
Suprafata neteda
NU
WRITE
Suprafata rugoasa
TA=B/A
CV=CG·Q10/1000
WRITE
A,B,CG,Q10,M,AL1,AL2,AL3
HS,HI,H,DS,DI,C
H1,D1,H2,D2,H3,D2,GAMA
AK=0
AL=0
AR=(HS+HI)/H+1
α
Partea fractionara a variabilei AR=0
NU
AR=AR+1
DA
NR=[AR]
NR≤100
NU
WRITE
Mesaj
STOP
DA
TEZET(HS,HI,H1,H2,H3,H,DS,DI,D1,D2,TZ,NR)
WRITE
Cap de tabel
Z=-HS
PAS=H
ANFI=0
ANTETA=-GAMA·TZ(1)·R2(Z)·COFI(Z)
WRITE Z,ANFI,ANTETA
I=2,NR
RKG(Z,PAS,TZ(I-1),A,B,C,TA,AK)
Z=Z+PAS
F(I)=F(I-1)+AK
ANFI=-F(I)·GAMA/ROSI(Z)
ANTETA=-GAMA·TZ(I)·R2(Z)·COFI(Z)-ANFI·ROZ(Z)
I=NR-1
DA
PAS=HS+HI-(NR-2)·PAS
NU
WRITE Z,ANFI,ANTETA
β
I=1,3
Z=-HS
PAS=H
N=I-1
FN(I,1)=0
GN(I,1)=0
WRITE N
ANFIT=0
ANFI=0
ANTETA=-ZR2(Z)
WRITE Z,ANFIT,ANFI,ANTETA
J=2,NR
RKV(Z,FN(I,J-1),GN(I,J-1),PAS,B,C,TA,N,AK,AL,CV,HC)
Z=Z+PAS
FN(I,J)=FN(I,J-1)+AK
GN(I,J)=GN(I,J-1)+AL
ANFIT=-N·FN(I,J)/R0(Z)²
ANFI=GN(I,J)/ROSI(Z)
ANTETA=-ZR2(Z)-ANFI·ROZ(Z)
J=NR-1
DA
PAS=HS+HI-(NR-2)·PAS
NU
WRITE Z,ANFIT,ANFI,ANTETA
γ


Z=-HS
PAS=H
WRITE
Cap de tabel
I=1,NR
ANFI=[AL1·GN(1,I)+AL2·GN(2,I)+AL3·GN(3,I)]/RØSI(Z)
ANTETA=-ZR2(Z)·(AL1+AL2+AL3)-ANFI·ROZ(Z)
WRITE Z,ANFI,ANTETA
I=NR-1
DA
PAS=HS+HI-(NR-2)·PAS
NU
Z=Z+PAS
PI=2·Arcsin(1)
PAS=H
Z=-HS
WRITE Titlu
I=1,NR
WRITE Z,Cap de tabel
J=1,13
N=J-1
FI=N·PI/12
ANFIT=[-AL2·FN(2,I)·sin(FI)-2·AL3·FN(3,I)·sin(2FI)]/R0(Z)²
ANFI=(AL1·GN(1,I)+AL2·GN(2,I)·cos(FI)+AL3·GN(3,I)·cos(2FI))/RØSI(Z)
ANTETA=-ZR2(Z)·[AL1+AL2·cos(FI)+AL3·cos(2·FI)]-ANFI·ROZ(Z)


ANFIG=1,3·ANFI-0,9·F(I)/ROSI(Z)
ANTEG=1,3·ANTETA-0,9GAMA·TZ(I)-R2(Z)·COFI(Z)+F(I)·GAMA·TRØSI(Z)
WRITE N,ANFIT,ANFI,ANTETA,ANFIG,ANTEG
I=NR-1
DA
PAS=HS+HI-(NR-2)·PAS
NU
Z=Z+PAS
STØP
RKG(Z,H,TA,BC,TA,AKA)
R0(Z)=A·√1+(Z/B)²+C
SIFI(Z)=TA/√Z²/(Z²+B²)+TA²
F(Z)=T·R0(Z)/SIFI(Z)
AK(1)=F(Z)·H
I=2,4
I=4
DA
Z0=Z+H
AK(I)=F(Z0)·H
NU
Z0=Z+H/2
AK(I)=F(Z0)·H
AKA={AK(1)+2·[AK(2)+AK(3)]+AK 4)}/6
RETURN


TEZET (HS,HI,H1,H2,H3,H,DS,DI,D1,D2,TZ,NR)
AR1= H1/H+1
NR1=[AR1]
I = 1,NR1
TZ(I)=DS-(DS-D1)·(I-1)·H/H1
DELTA= H1-(NR1-1)·H
AR1=(DELTA+H2-H1)/H
N2=NR1+1
NR2 = NR1+[AR1]
I = N2,NR2
TZ(I)=D1-(D1-D2)·[H-DELTA+(I-N2)·H]/(H2-H1)
DELTA= H2-(NR2-1)·H
AR1=(DELTA+H3-H2)/H
N2=NR2+1
NR2 = N2+[AR1]-1
I = N2,NR2
TZ(I)=D2
DELTA= H3-(NR2-1)·H
AR1=(DELTA+HS+HI-H3)/H
N2=NR2+1
NR2=[AR1]+ N2-1
I = N2,NR2
TZ(I)=D2+(DI-D2)·[H-DELTA+(I-N2)·H]/(HS+HI-H3)
TZ(NR)=DI
RETURN


RKV(X,Y,Z,H,B,C,TA,N,AKA,ALA,CV,HC)
R0(X)=√(X²+B²)/TA+C
R1(X)=-[(1+TA²)·X²+(B·TA)²]^1.5/(B·TA)²
SIFI(X)=TA/√(X²/(X²+B²)+TA²)
CØFI(X)=X/√(X²+TA²·(X²+B²))
R2(X)=R0(X)/SIFI(X)
A1(X)=R0(X)/[R1(X)·SIFI³(X)]
B1(X)=1/R0²(X)
C1(X)=CV·(HC/10-0,1·X)^0.2·R2³(X)
D1(X)=C1(X)·CØFI(X)/R2(X)
F1(X,Z)=A1(X)·Z+C1(X)
F2(X,Y)=-N²·B1(X)·Y-D1(X)
AK(1)=F1(X,Z)·H
AL(1)=F2(X,Y)·H
I=2,4
I=4
DA
NU
X0=X+H
Y0=Y+AK(I-1)
Z0=Z+AL(I-1)
AK(I)=F1(X0,Z0)·H
AL(I)=F2(X0,Y0)·H
X0=X+H/2
Y0=Y+AK(I-1)·H/2
Z0=Z+AL(I-1)·H/2
AK(I)=F1(X0,Z0)·H
AL(I)=F2(X0,Y0)·H
AKA=[AK(1)+2·[AK(2)+AK(3)]+AK(4)]/6
ALA=[AL(1)+2·[AL(2)+AL(3)]+AL(4)]/6
RETURN

PROCEDEU ITERATIV PENTRU DETERMINAREA RĂSPUNSULUI DINAMIC STAȚIONAR LA FUNDAȚII DE MAȘINI

de V. SZOLGA

Institutul de Construcții București

Lucrarea prezintă un procedeu iterativ pentru determinarea răspunsului dinamic staționar al fundațiilor de mașini supuse unor solicitări armonice sincrone și sinfazice. Metoda se bazează pe analiza modală a răspunsului dinamic, utilizînd modurile proprii de vibrație ale sistemului conservativ, în cazul cuplajului prin amortizare. Procedeul este exemplificat printr-o fundație cu două grade de libertate dinamică, iar rezultatele sînt comparate cu cele obținute prin metode exacte de calcul sau alte metode.

INTRODUCERE

Răspunsul dinamic al fundațiilor de mașini la excitații armonice depinde de proprietățile terenului de fundare, inerțiale, de rigiditate și de amortizare ale fundației, precum și de excitație [5]. Efectul solului în răspunsul structurii a fost investigat prin diferite metode : analiză directă, analiză Fourier, metoda elementului finit ș.a. ; efect uzual denumit interacțiune sol-structură.

Pentru structurile la care amortizarea este de tip Rayleigh, analiza modală a răspunsului dinamic este modalitatea cea mai simplă și eficace de investigare, punînd în evidență și modurile dominante în răspunsul structurii [2].

La fundațiile de mașini (considerate ca sisteme cu mai multe grade de libertate) efectul terenului de fundare în răspunsul dinamic este deosebit de dificil de abordat pe cale analitică directă. În general metoda elementului finit este metoda de investigare completă a interacțiunii teren-fundație. O modalitate simplă și modernă de abordare a fenomenului de interacțiune sol-structură este metoda elementelor de frontieră. Procedeele și metodele enumerate, în cazul fundațiilor de mașini, validează, sau determină elementele unui model dinamic simplu corespunzător sistemului sol-structură — modelul cu parametrii concentrați [4], [5], [10]. Acest model înlocuiește terenul de fundare cu elemente concentrate avînd proprietăți elastice și de amortizare (rescarte și amortizoare-vîscoase-cu coeficienți variabili). Structura (sistemul fundație-mașină), modelată ca sistem cu un număr finit de grade de libertate dinamice, rezultă deci un sistem mecanic cu toți parametrii concentrați.

CONSIDERAȚII GENERALE

Pentru sistemul modelat astfel, ecuațiile diferențiale de mișcare — sub formă compactă — se pot scrie :

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{P(t)\} \qquad (1)$$

unde $[M]$, $[C]$, $[K]$ sînt respectiv matricele de inerție, amortizare și de rigiditate, iar $\{x\}$ și $\{P(t)\}$ reprezintă vectorii deplasărilor și ai excitației. În cazul cînd amortizarea este neglijabilă (sistemul mecanic este conservativ), sau dacă considerăm numai proprietățile elastice și de inerție ale sistemului, ecuația (1) devine :

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{P(t)\} \tag{2}$$

cînd, există posibilitatea efectuării unei transformări de coordonate (dacă matricea de rigiditate $[K]$ este independentă de frecvențele perturbatoare):

$$\{x\} = [\Phi]\{\eta\}, \tag{3}$$

vectorul $\{\eta\}$ fiind vectorul coordonatelor generalizate (coordonate modale), iar matricea $[\Phi]$ matricea modală a sistemului conservativ. Cu această transformare și premultiplicînd ecuația (1) cu $[\Phi]^T$ obținem :

$$[M]^*\{\ddot{\eta}\} + [C^*]\{\dot{\eta}\} + [K^*]\{\eta\} = \{P^*(t)\}, \tag{4}$$

unde matricele $[M^*]$ și $[K^*]$ sînt matricele de inerție și rigiditate generalizate, diagonale ($[M^*] = [\Phi]^T[M][\Phi]$, $[K^*] = [\Phi]^T K][\Phi]$), $[C^*] = [\Phi]^T[C][\Phi]$ este matricea amortizărilor generalizate, iar $\{P^*(t)\} = [\Phi]^T\{P(t)\}$ este vectorul forțelor generalizate [2]. Se remarcă faptul că dacă matricea $[C^*]$ nu este diagonală (cuplaj prin amortizare), nu există o diferență calitativă între ecuațiile (1) și (4), însă dacă această matrice este diagonală (amortizarea tip Rayleigh) ecuațiile (4) sînt decuplate, iar dacă n este coordonata modală, răspunsul sistemului mecanic (decuplat prin amortizare) se obține prin metoda superpoziției modale, conform relației (3).

RĂSPUNSUL DINAMIC AL SISTEMULUI CUPLAT PRIN AMORTIZARE FOLOSIND MODURILE PROPRII ALE SISTEMULUI CONSERVATIV

Datorită faptului că matricea amortizărilor (corespunzătoare efectului de amortizare al terenului de fundare — amortizare prin radiație — amortizare geometrică) nu este de tip Rayleigh (nu poate fi exprimată printr-o combinație liniară a matricelor de inerție și rigiditate, deci nu se diagonalizează simultan cu acestea), răspunsul dinamic al sistemului mecanic se poate obține fie neglijînd termenii din afara diagonalei matricei $[C^*]$ și efectuînd o analiză modală cu modurile proprii ai sistemului conservativ (modurile reale) [4], fie efectuînd analiza modală cu modurile proprii complexe [1], [6] (vectorii proprii complexi care diagonalizează simultan matricele $[M]$, $[C]$, $[K]$), fie efectuînd integrarea directă a ecuațiilor diferențiale (1) sau (4) [3].

Pentru cazul cînd excitația este sincronă și sinfazică (situație des întîlnită la fundațiile de mașini) toate aceste procedee și metode pentru obținerea răspunsului dinamic staționar sînt mult prea laborioase sau (în cazul neglijării cuplajului prin amortizare) erorile introduse în anumite situații pot fi foarte mari [8].

Se propune în continuare un procedeu iterativ, de determinare a răspunsului dinamic permanent la excitația amintită, procedeu care nu neglijează termenii nediagonali ai matricei $[C^*]$ și folosește modurile proprii ale sistemului conservativ, moduri determinate prin procedeele bine cunoscute [1], [2], [6], [8], [9].

Considerăm că matricea $[C^*]$ este suma matricilor :

$$[C^*] = [C^*] + [C_1] \tag{5}$$

unde $[C^*]$ este matricea amortizărilor generalizate din care s-au omis termenii nediagonali, iar $[C_1]$ este matricea termenilor nediagonali. Cu această descompunere, ecuația (4) devine [8] :

$$[M^*]\{\ddot{\eta}\} + [C^*]\{\dot{\eta}\} + [K^*]\{\eta\} = \{P^*(t)\} - [C_1]\{\dot{\eta}\} \tag{6}$$

În acest fel partea stîngă a ecuației este decuplată, cuplajul ecuațiilor producîndu-se în membrul drept (adică printr-o modificare a excitației).

Considerînd ecuația (6) ca o relație de recurență între doi pași de iterație :

$$[M^*]\{\ddot{\eta}\}_{k+1} + [C^*]\{\dot{\eta}\}_{k+1} + [K^*]\{\eta\}_{k+1} = \{P^*(t)\} - [C_1]\{\dot{\eta}\}_k \tag{7}$$

unde $k = 0, 1, \ldots p$ și $\{\eta\}_0 = \{0\}$, adică se aproximează soluția $\{\eta\}_1$ prin neglijarea termenilor nediagonali ai matricei de amortizare generalizată. O dată iterația terminată se obține răspunsul staționar instantaneu folosind relația (3), deci dacă soluția ecuației (4) este :

$$\eta_i(t) = a_i \sin(\omega t + \varphi_i) = c_{i1} \sin\omega t + c_{i2} \cos\omega t \tag{8}$$

cu $i = 1, \ldots, n$, atunci rezultă :

$$\{x\} = \sum_{i=1}^{n} \{\Phi\}_i a_i \sin(\omega t + \varphi_i) = \begin{Bmatrix} \vdots \\ A_j \sin(\omega t + \varphi_j) \\ \vdots \end{Bmatrix} \tag{9}$$

unde :

$$A_j = \left[\left(\sum_{i=1}^{n} c_{i1} \Phi_{ji} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} c_{i2} \Phi_{ji} \right)^2 \right]^{1/2}, \tag{10}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_{i2} \Phi_{ji}}{\sum_{i=1}^{n} c_{i1} \Phi_{ji}} \tag{11}$$

și în care ω este pulsația excitației armonice sincrone și sinfazice.

VERIFICAREA PROCEDEULUI PE UN EXEMPLU (FUNDAȚIE RIGIDĂ CU DOUĂ GRADE DE LIBERTATE DINAMICĂ)

Pentru dovedirea faptului că neglijarea termenilor nediagonali introduce erori extrem de mari și că procedeul propus este deosebit de simplu de utilizat, se exemplifică metoda propusă pe un exemplu de fundație rigidă

[7] considerînd numai vibrațiile cuplate orizontale și de rotație (figura 1). Pentru comparație și verificare se calculează de asemenea și soluția exactă (prin integrare directă).

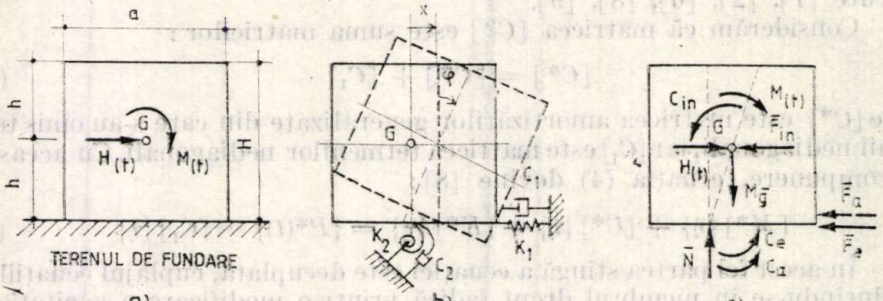


Fig. 1

Pentru fundația reprezentată în figura 1 ecuațiile diferențiale ale mișcării (folosind principiul lui d'Alembert) sînt:

$$\Sigma X_i = 0; \quad F_{in} + F_e + F_a = H(t)$$

$$\Sigma M_{iG} = 0; \quad C_{in} + C_e + C_a - (F_e + F_a)h - Nh\varphi = M(t) \tag{12}$$

$$\Sigma Y_i = 0; \quad N = Mg,$$

în care am notat:

$$F_{in} = M\ddot{x}, \; F_e = K_1\Delta = K_1(x - h\varphi), \; F_a = C_1 v = C_1(\dot{x} - h\dot{\varphi}),$$

$$C_{in} = J_G\ddot{\varphi}, \; C_e = K_2\varphi, \; C_a = C_2\dot{\varphi}, \tag{13}$$

x și φ fiind parametrii cinematici independenți corespunzători celor două grade de libertate.

Înlocuind (13) în (12) găsim în continuare:

$$M\ddot{x} + C_1\dot{x} - C_1h\dot{\varphi} + K_1x - K_1h\varphi = H(t)$$

$$J_G\ddot{\varphi} - C_1h\dot{x} + (C_2 + C_1h^2)\dot{\varphi} - K_1hx + (K_2 + K_1h^2 - Mgh)\varphi = M(t) \tag{14}$$

adică matricele de inerție, amortizare și rigiditate au expresiile:

$$[M] = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & J_G \end{bmatrix}, \quad [C] = \begin{bmatrix} C_1 & -C_1h \\ -C_1h & (C_2 + C_1h^2) \end{bmatrix},$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1h \\ -K_1h & (K_2 + K_1h^2 - Mgh) \end{bmatrix} \tag{15}$$

Pentru obținerea valorilor numerice se cunosc următoarele:

$$H = 6{,}6\,\text{m} = 2h, \quad a = 6{,}5\,\text{m}, \quad b = 8{,}75\,\text{m}, \quad \gamma_b = 2400\,\text{kg/m}^3,$$

terenul de fundare fiind de rezistență mijlocie cu caracteristicile:

$$C_z = 5{,}2\text{daN/cm}^3, \quad v_s = 250\text{m/s}, \quad \rho = 1650\ \text{kg/m}^3.$$

Cu acestea, rezultă efectuînd unele rotunjiri;

$$M = V \cdot \gamma_b = SH \cdot \gamma_b = abH\ \gamma_b = 0{,}9 \cdot 10^6\,\text{kg}.$$

$$J_G = \frac{MH^2}{12} = 3{,}25 \cdot 10^6\,\text{kgm}^2, \quad C_x = 0{,}5 \cdot C_z = 2{,}6 \cdot 10^7\,\text{N/m}^3,$$

$$K_1 = SC_x = abC_x = 1{,}5 \cdot 10^9\,\text{N/m}, \quad C_\varphi = 2C_z = 10{,}4 \cdot 10^7\,\text{N/m}^3,$$

$$K_2 = I_\Delta C_\varphi = (\text{ba}^3/12)C_\varphi = 20 \cdot 10^9\,\text{Nm},$$

$$\overline{\overline{C}}_1 = 0{,}33, \ \lambda = \sqrt{S} = 7{,}55\ \text{m}, \quad C_1 = \overline{\overline{C}}_1 K_1 \lambda / v_s = 1{,}5 \cdot 10^7\,\text{Ns/m},$$

$$\overline{\overline{C}}_2 = 0{,}08, \lambda' = \sqrt[4]{I_\Delta} = 3{,}76\ \text{m}, \quad C_2 = \overline{\overline{C}}_2 K_2 \lambda' / v_s = 2{,}55 \cdot 10^7\,\text{Nms},$$

iar matricele devin;

$$[M] = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0 \\ 0 & 3{,}25 \end{bmatrix} 10^6, \quad [C] = \begin{bmatrix} 1{,}5 & -5 \\ -5 & 19 \end{bmatrix} 10^7,$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 1{,}5 & -5 \\ -5 & 36 \end{bmatrix} 10^9,$$

la care se adaugă vectorul încărcărilor $\{P(t)\} = \begin{Bmatrix} 6 \\ -40 \end{Bmatrix} \cdot 10^4 \cdot \sin 39\,t$ redus în centrul de greutate al blocului.

Dacă considerăm sistemul conservativ, modurile proprii ale sistemului cu două grade de liberate sînt:

$$\omega_1 = 28{,}85\,\text{s}^{-1}, \quad \omega_2 = 109{,}14\,\text{s}^{-1}, \quad [\Phi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}15 & -1{,}844 \end{bmatrix}.$$

Se constată că este evitată situația de rezonanță. În continuare matricele generalizate corespunzătoare ecuației (4) se obțin:

$$[M^*] = \begin{bmatrix} 0{,}973 & 0 \\ 0 & 11{,}355 \end{bmatrix} 10^6, \quad [C^*] = \begin{bmatrix} 0{,}419 & -4{,}708 \\ -4{,}708 & 84{,}548 \end{bmatrix} 10^7,$$

$$[K^*] = \begin{bmatrix} 0{,}81 & 0 \\ 0 & 142{,}355 \end{bmatrix} 10^9, \quad \{P(t)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 40 \end{Bmatrix} 10^4 \cdot \sin 39t.$$

Soluția exactă, cea obținută prin omiterea termenilor nediagonali din matricea $[C^*]$, precum și soluția obținută prin procedeul propus în

doi pași de iterație sînt respectiv :

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} 16{,}9064 \sin(39t + 1{,}1685) \\ -12{,}7979 \sin(39t - 0{,}458) \end{Bmatrix} 10^{-6},$$

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} 6{,}2266 \sin(39t - 0{,}2595) \\ -11{,}482 \sin(39t - 0{,}2595) \end{Bmatrix} 10^{-6},$$

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} 16{,}2635 \sin(39t + 1{,}1693) \\ -12{,}3112 \sin(39t - 0{,}4572) \end{Bmatrix} 10^{-6}.$$

CONCLUZII ȘI OBSERVAȚII

Așa cum rezultă și din exemplul prezentat, rezultatele obținute prin procedeul propus diferă în foarte mică măsură (după doi pași de iterație) de cele exacte, erorile în amplitudine și fază sînt mai mici de 3%. Pentru o eroare impusă (pentru utilajele din industria de vîrf : mecanică fină, electrotehnică, centrale nuclearo-electrice, automatică aeronautică etc.) se efectuează mai mulți pași de iterație, în exemplul prezentat trebuie 6 pași de iterație pentru a obține soluția cu o eroare de 10^{-4} față de soluția exactă.

Procedeul omiterii termenilor nediagonali din matricea amortizărilor generalizate (procedeu propus în [4]) introduce erori deosebit de mari atît în amplitudinea cît și în faza mișcării. Așa cum se arată în [8] aceste erori depind nu numai de amortizare [4] ci și de amplitudinea și pulsația excitației.

În comparație cu metoda integrării directe sau analizei modale cu vectorii proprii complexi, procedeul propus este mult mai simplu, astfel : folosește vectorii proprii ai sistemului conservativ (deci vectori proprii reali) și în cazul determinării răspunsului dinamic permanent la excitația menționată se rezolvă n sisteme algebrice cu cîte două ecuații cu două necunoscute în locul unui sistem de 2n ecuații algebrice cu tot atîtea necunoscute în cazul integrării directe [3].

Precum se vede și în exemplul prezentat în general doi pași de iterație sînt suficienți pentru o bună aproximare a soluției.

Procedeul propus poate fi folosit și pentru alte structuri în considerarea interacțiunii dinamice cu terenul de fundare sau la sistemele mecanice unde există cuplaj prin amortizare.

Primit în redacție la 14 aprilie 1989

BIBLIOGRAFIE

1. C. M. HARRIS, CH. E. CREDE, *Șocuri și vibrații*, Ed. tehnică, București, 1969.
2. M. IFRIM, *Dinamica structurilor și inginerie seismică*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1984.
3. D. MANGERON, N. IRIMICIUC, *Mecanica rigidelor cu aplicații în inginerie. Mecanica vibrațiilor sistemelor de rigide*, vol. **II**, Edit. tehnică, București, 1980
4. M. NOVAK, *Effect of Soil on Structural Response to Wind and Earthquake*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 3 (1974).

5. F. E. RICHART, J. R. HALL, R. D. WOODS, *Vibrations of Soils and Foundations*, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1970.
6. H. SANDI, *Elemente de dinamica structurilor*, Edit. Tehnică, București, 1983.
7. I. SLĂTINEANU, M. ALEXANDRESCU, V. SZOLGA, A. COTESCU, C. SVASTA, *Studiul teoretic și experimental al comportării dinamice a fundațiilor compresoarelor CO_2-Uree II Craiova*, Contract nr. 91/1984.
8. V. SZOLGA, *Comportarea la solicitări dinamice a unor structuri masive*, Teză de doctorat, Institutul de Construcții București, 1988.
9. V. SZOLGA, *Răspunsul dinamic staționar al fundațiilor masive de orice formă în plan la excitație armonică verticală folosind un procedeu simplificat*, Buletinul Științific al ICB, 1 (1989).
10. V. SZOLGA, *Cîtul Rayleigh. O modalitate de folosire pentru separarea vectorilor proprii (Dublu cît Rayleigh)*, Buletinul Științific al ICB, 2 (1989).

ASUPRA UNOR INDICATORI DE CAPACITATE PORTANTĂ AI RECIPIENTELOR-BUTELII PRESURIZATE STATIC, PNEUMATIC SAU HIDRAULIC, LA INTERIOR

de A. PAVEL
Institutul de Petrol și Gaze Ploiești

Se reiau indicatorii *normați* de capacitate portantă și se definesc următorii *noi indicatori* de capacitate portantă : presiunea de curgere, presiunea de distrugere și simplexul de caracterizare barică, respectiv coeficienții de siguranță (factorii de securitate) față de limita tehnică de curgere și, corespunzător, față de rezistența de rupere. Se studiază și se corelează dependențele $p(\tau)$ și $p(\varepsilon)$, în final formulîndu-se sugestii pentru actualizarea documentelor tehnice normative de tip cod, PT ISCIR etc.

INTRODUCERE

În mod convențional, indicatorii de capacitate portantă (ICP) ai recipientelor-butelii presurizate la interior se grupează în :

a) ICP privind materialul de bază al corpului (peretele cilindric + + fundurile bombate), care includ : 1) *rezistența de rupere* la întindere (tracțiune), obținută la temperatura de 20°C pe epruvete prelevate în direcție longitudinală, $\sigma_r = R^{20} = R^{20}_m$; 2) *limita tehnică de curgere*, minimă, de asemenea obținută la temperatura de 20°C pe epruvete prelevate în direcție longitudinală, $\sigma_c = \sigma_{0.2} = R^{20}_{0.2} = R^{20}_{p\,0.2}$; 3) *lungirea relativă la rupere*, evidențiată pe epruveta scurtă la temperatura de 20°C, $\delta = A^{20}_5$; 4) *simplexul de caracterizare mecanică* $\bar{\sigma} = \sigma_c/\sigma_r$; 5) *coeficientul* (*factorul*) *de siguranță* (*securitate*) față de rezistența de *rupere* c_r ; 6) *coeficientul* (*factorul*) *de siguranță* (*securitate*) față de limita tehnică de *curgere* c_c ;

b) ICP privind structura propriu-zisă de rezistență a corpului (în ansamblul său), care includ : 7) *presiunea de curgere* p_c ; 8) *presiunea de distrugere* prin plesnire/spargere p_d ; 9) *simplexul de caracterizare barică* $\bar{p} = p_c/p_d$.

Prescripțiile tehnice (PT), oficial aflate în vigoare în România, ale Inspecției pentru cazane, recipiente sub presiune și instalații de ridicat (ISCIR), avînd indicativul C 5-84 [7], reține explicit și restricționează doar următorii ICP :

- în cazul oțelurilor pentru recipiente-butelii *fără sudură* : $\sigma_r \leqslant$ $\leqslant 1\,200$ N/mm^2 ; $\delta \geqslant 14\%$; $\bar{\sigma} \leqslant 0{,}8$, cînd oțelurile sînt *normalizate* și $\sigma \leqslant$ $\leqslant 0{,}9$, cînd oțelurile sînt *îmbunătățite* ;
- în cazul oțelurilor pentru recipiente-butelii *sudate* : $\sigma_r \leqslant 600$ N/mm^2 (transversal) ; $\delta \geqslant 16\%$; $\delta \leqslant 0{,}8$, ... totodată impunînd următoarele formule de calcul :

— pentru *grosimea s a peretelui cilindric* al corpului de butelie :

$$s = \frac{p_h D_e}{\dfrac{2\sigma_c}{1{,}3}\varphi + p_h} \ ; \ [\text{mm}] \qquad (1)$$

— pentru *grosimea s_f a fundurilor bombate* ale buteliilor executate în construcție sudată :

$$s_f = \frac{p_h D_e \beta}{\frac{4\sigma_c}{1{,}3}\varphi} + s_a, \text{ [mm]} \qquad (2)$$

în care : D_e reprezintă diametrul exterior nominal al recipientului-butelie, în mm ; $s_a = 0{,}5$ mm — adaos de grosime (impus) ; p_h — presiunea (interioară) de încercre hidraulică, în MPa (N/mm²) ; $\varphi = Z$ — coeficientul de rezistență al îmbinărilor sudate ($\varphi = 1{,}0$ pentru recipientele-butelii fără sudură, cu funduri ogivate ; $\varphi = 0{,}6$ — impus — pentru recipientele-butelii în construcție sudată) ; β — coeficientul de formă al fundului bombat, având valori conform cu [7,p. 15], ... cu mențiunea suplimentară conform căreia : în final, grosimile s și s_f se vor adopta astfel, încît, în condițiile presurizării interioare cu intensitatea p_h, solicitarea materialului de bază — în oricare punct al corpului de butelie — să aibă o intensitate ce nu depășește 75% din cea corespunzătoare valorii garantate minime σ_c. Prin urmare, formulele de calcul (1) și (2) implică — pentru circumstanțele încercării de presiune hidraulică cu intensitatea p_h — coeficientul (factorul) de siguranță (securitate) $c_c = 1{,}3$.

Așadar, potrivit PT ISCIR C 5-84, evaluarea capacității portante a recipientelor-butelii în discuție se materializează numai prin intermediul ICP din grupa a), și anume : σ_r (maxim), σ_c (neprecizat), δ (minim), $\bar{\sigma}$ (maxim) și c_c (singular) (dar nu și c_r!).

SIMPLEXUL DE CARACTERIZARE BARICĂ

Experimental, s-a constat [2,5,6] că dependența tipică $p = p(\tau)$, corespunzătoare presurizării interioare hidraulice *statice* a structurilor de speța recipientelor-butelii, este de forma celei redate — pentru cazul general — în figura 1, deosebindu-se următoarele puncte caracteristice ;

- punctul P, de ordonată $p_p \rightarrow$ presiunea manometrică de *proporționalitate*, care semnifică limita superioară a intervalului de timp în care dependența $p(\tau)$ este crescător *liniară*, pornind din origine ;
- punctul C, de ordonată $p_c \rightarrow$ presiunea manometrică de *curgere*, care semnifică limita superioară a intervalului de timp în care dependența $p(\tau)$ este *neliniară*, monoton crescătoare, pornind din P ;
- punctul D, de ordonată $p_d \rightarrow$ presiunea manometrică de *distrugere*, care semnifică limita superioară a intervalului de timp în care dependența $p(\tau)$ este iarăși crescător *liniară*, însă pornind din C.

Conform cu [4], presiunile manometrice de curgere p_c și de distrugere p_d au următoarele expresii analitice :

$$p_c = 2\sigma_c\left(\frac{s}{D_m}\right) ; \; p_d = \frac{2\sigma_r}{1+\delta}\left(\frac{s}{D_m}\right), \text{ [MPa]} \qquad (3,4)$$

rezultînd următoarea formulă de calcul pentru simplexul de caracterizare barică :

$$\bar{p} = \frac{p_c}{p_d} = \frac{\sigma_c}{\sigma_r}(1 + \delta) = \bar{\sigma}(1 + \delta). \tag{5}$$

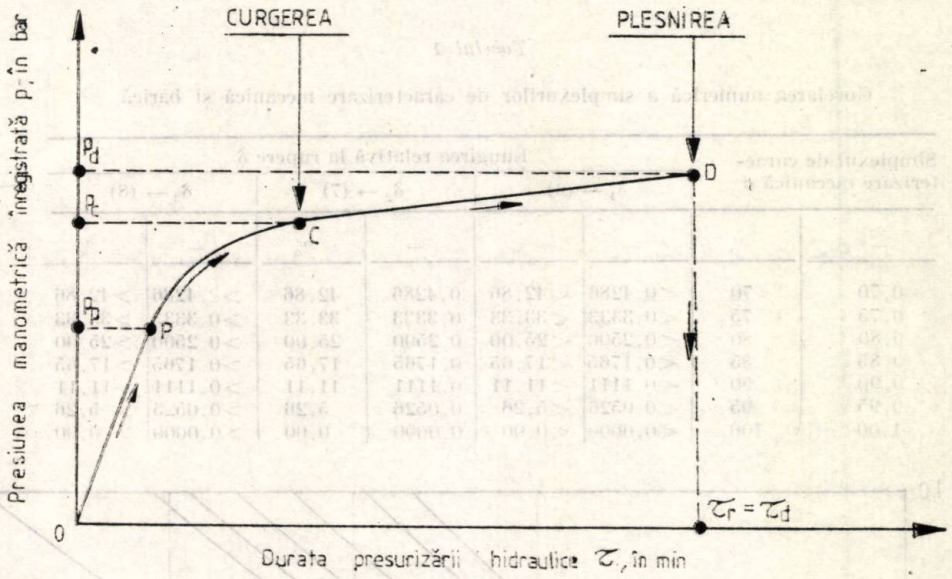


Fig. 1. — Diagrama tipică, *experimentală*, corespunzătoare presurizării interioare hidraulice *statice a* recipientelor-butelii : *c*, *C* semnifică curgerea tehnică ; *d*, *D* → distrugerea (*r* → ruperea) ; *p*, *P* → proporționalitatea ; p_d reprezintă presiunea manometrică de distrugere ; p_c — presiunea manometrică de curgere (tehnică) ; p_p — presiunea manometrică de proporționalitate ; $\tau_r = \tau_d$ — durata de rupere/distrugere prin presurizare interioară.

Reținînd atenția următoarele alternative :

1) $\bar{p} < 1$, respectiv $p_c < p_d$, ceea ce corespunde dependenței *tipice reale* $p(\tau)$ redate în figura 1, rezultînd :

$$\delta_1 < \frac{1}{\bar{\sigma}} - 1 ; \tag{6}$$

2) $\bar{p} = 1$, respectiv $p_c = p_d$, ceea ce corespunde unei dependențe $p(\tau)$ *ipotetice*, cu consolidare de tipul celei Prandtl [1], rezultînd :

$$\delta_2 = \frac{1}{\bar{\sigma}} - 1 ; \tag{7}$$

3) $\bar{p} > 1$, respectiv $p_c > p_d$, ceea ce corespunde unei dependențe $p(\tau)$ *imposibile* în realitatea tehnică, pentru care :

$$\delta_3 > \frac{1}{\bar{\sigma}} - 1. \tag{8}$$

Corelarea simplexurilor de caracterizare mecanică $\bar{\sigma}$ și barică $\bar{p}$ se ilustrează prin tabelul 1 și în figura 2, constatîndu-se că :

● impunîndu-se $\bar{\sigma} \leqslant 0{,}80 \rightarrow 80\%$, deoarece întotdeauna $\bar{p} \leqslant 1$, este neapărat necesară și impunerea restricției $\delta \leqslant 25\%$, ceea ce înseamnă prescrierea obligatorie a valorii *maxime* $A_5 = 25\%$, pentru care $\bar{p} = 1$;

Tabelul 1

Corelarea numerică a simplexurilor de caracterizare mecanică și barică

Simplexul de caracterizare mecanică $\bar{\sigma}$		Lungirea relativă la rupere δ					
		$\delta_1 \rightarrow (6)$		$\delta_2 \rightarrow (7)$		$\delta_3 \rightarrow (8)$	
—	%	—	%	—	%	—	%
0,70	70	<0,4286	<42,86	0,4286	42,86	>0,4286	>42,86
0,75	75	<0,3333	<33,33	0,3333	33,33	>0,3333	>33,33
0,80	80	<0,2500	<25,00	0,2500	25,00	>0,2500	>25,00
0,85	85	<0,1765	<17,65	0,1765	17,65	>0,1765	>17,65
0,90	90	<0,1111	<11,11	0,1111	11,11	>0,1111	>11,11
0,95	95	<0,0526	<5,26	0,0526	5,26	>0,0526	> 5,26
1,00	100	<0,0000	<0,00	0,0000	0,00	>0,0000	> 0,00

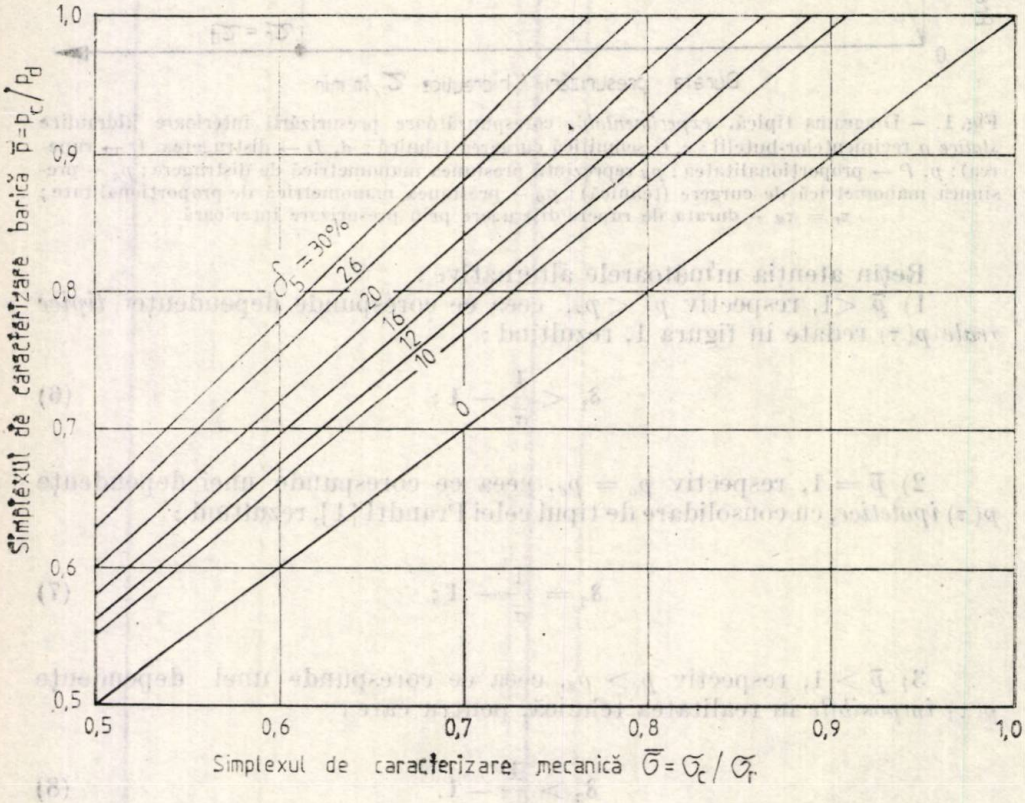


Fig. 2 — Corelarea grafică a simplexurilor de caracterizare mecanică și, respectiv, barică.

• impunîndu-se $\delta \geqslant 14\%$, deoarece mereu trebuie ca $\bar{p} \leqslant 1$, este neapărat necesar a se impune și restricția $\bar{\sigma} \leqslant 0{,}8772$, ceea ce implică prescrierea obligatorie a valorii *maxime* $\bar{\sigma} = 0{,}8772 < 0{,}9000$;

• pentru $\delta \geqslant 16\%$, întrucît în permanență $\bar{p} \leqslant 1$, rezultă $\bar{\sigma} \leqslant 0{,}8621$, ceea ce revine la necesitatea de a prescrie, în mod obligatoriu, o valoare *maximă* $\bar{\sigma} = 0{,}8621 > 0{,}8000$.

Validarea experimentală a formulelor (3,4) este confirmată prin datele consemnate în tabelul 2.

COEFICIENȚII (FACTORII) DE SIGURANȚĂ (SECURITATE)

În cazurile practice cu:

$$p_h = 1{,}5\ p_{max}, \tag{9}$$

deoarece se impune ca, întotdeauna, $\sigma_{max} \leqslant \sigma_a$, condiția de rezistență, în circumstanțele încercării de presiune hidraulică, se formulează astfel [3]:

$$\sigma_h = 1{,}5\ \sigma_{max} \leqslant 1{,}5\ \sigma_a \leqslant k\sigma_c, \tag{10}$$

unde: p_{max} este presiunea de lucru maximă, respectiv presiunea manometrică de încărcare a recipientelor-butelii, în MPa (N/mm^2); p_h — presiunea de încercare hidraulică, în MPa (N/mm^2); σ_h — tensiunea mecanică efectivă din peretele corpului recipientului-butelie în condițiile încercării de presiune hidraulică, în N/mm^2; σ_{max} — idem, în condițiile încărcării la presiunea manometrică p_{max}, în N/mm^2; σ_a — rezistența admisibilă pentru materialul de bază al corpului de recipient-butelie, în N/mm^2; $k < 1$ — factorul numeric (subunitar) considerînd rezerva — nominalizată ca atare de fiecare dată *) — față de limita tehnică de curgere.

Implicînd simplexul de caracterizare mecanică $\bar{\sigma} = \sigma_c/\sigma_r$, condiția de rezistență (10) capătă configurația:

$$\sigma_h = 1{,}5\ \sigma_{max} \leqslant 1{,}5\ \sigma_a \leqslant k\ \bar{\sigma}\sigma_r, \tag{11}$$

pentru $\sigma_a = \sigma_c/c_c$ și, respectiv, $\sigma_a = \sigma_r/c_r$ rezultînd:

$$(10) \rightarrow c_c \geqslant \frac{1{,}5}{k}; \tag{12}$$

$$(11) \rightarrow c_r \geqslant \frac{1{,}5}{k\,\bar{\sigma}}, \tag{13}$$

deci:

$$\frac{c_r}{c_c} = \frac{1}{\bar{\sigma}}, \tag{14}$$

*) Considerîndu-se precizia determinării valorii $\sigma = \sigma_{0,2}$ și, de asemenea, precizia determinării prin calcul (sau prin măsurări) a tensiunilor mecanice efective pentru situația dată (încercare hidraulică sau încărcare normală).

Tabelul 2

Validarea experimentală a formulelor de calcul privind presiunea de curgere și presiunea de distrugere [$p_c \rightarrow (3)$ și $p_d \rightarrow (4)$]

Denumirea parametrului		Recipientul-butelie testat distructiv prin presurizarea interioară hidraulică (marcare convențională)					
		1*	2	3	4	5	6
Diametrul exterior măsurat D_e, în mm	Min.	223,4	222,8	221,2	221,2	221,2	203,0
	Max.	227,2	222,8	221,2	221,2	221,2	203,0
Grosimea măsurată ultrasonic a peretelui cilindric s, în mm	Min.	6,2	6,2	5,9	5,7	5,3	5,4
	Max.	7,2	7,7	7,8	7,2	6,4	—
Presiunea de curgere p_c, în bar, obținută	Prin calcul p_c^{calc}	341,4 410,4	312,6 392,3	311,8 429,8	308,9 448,1	305,4 398,7	min. 303,0
	Experimental p_c^{exp}	460,6	404,8	434,6	384,7	356,8	375,0
Presiunea de distrugere (prin plesnire longitudinală) p_d, în bar, obținută	Prin calcul p_d^{calc}	348,2 418,8	325,8 408,4	315,1 434,3	321,6 466,5	321,5 419,9	min. 345,0
	Experimental p_d^{exp}	470,7	423,6	440,9	400,1	376,6	423,6
Simplexul de caracterizare barică $\bar{p}$	Calculat	0,98	0,96	0,99	0,96	0,95	0,88
	Experimental	0,98	0,96	0,99	0,96	0,95	0,89

* Recipient-butelie cu contur exterior vizibil distorsionat.

Notă. Caracteristicile fizico-mecanice și constructiv-geometrice, complete, ale tuturor recipientelor-butelii testate distructiv prin presurizare interioară hidraulică, se regăsesc în lucrarea [5, partea a IV-a].

respectiv :

$$c_c = \overline{\sigma}\, c_r, \tag{15}$$

valorile corespunzătoare ale coeficienților (factorilor) de siguranță (securitate) c_r și c_c centralizîndu-se în tabelul 3. Așadar :

- pentru $k \leqslant 0{,}75 \rightarrow 75\%$, trebuie impuse valorile :

$c_c \geqslant 2{,}00$, indiferent de $\overline{\sigma}$;

$c_r \geqslant 2{,}50$, cînd $\overline{\sigma} \leqslant 0{,}80$;

$c_r \geqslant 2{,}22$, cînd $\overline{\sigma} \leqslant 0{,}90$,

Tabelul 3

Coeficienții (factorii) de siguranță (securitate)

$\overline{\sigma}$ \ k	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
			c_r			
0,70	2,8571	2,6786	2,5210	2,3810	2,2556	2,1429
0,75	2,6667	2,5000	2,3529	2,2222	2,1053	2,0000
0,80	2,5000	2,3438	2,2059	2,0833	1,9737	1,8750
0,85	2,3529	2,2059	2,0761	1,9608	1,8576	1,7647
0,90	2,2222	2,0833	1,9608	1,8519	1,7544	1,6667
0,95	2,1053	1,9737	1,8576	1,7544	1,6620	1,5789
1,00	2,0000	1,8750	1,7647	1,6667	1,5789	1,5000
			c_c			
Cricare	2,0000	1,8750	1,7647	1,6667	1,5789	1,5000

formulele (1,2) căpătînd forma :

$$s = \frac{p_h D_e}{\varphi \sigma_c + p_h} \; ; \quad s_f = \frac{p_h D_e \beta}{2\varphi \sigma_c} + s_a \; ; \; [\text{mm}] \tag{16,17}$$

- pentru $k \leqslant 0{,}80 \rightarrow 80\%$, ar trebui impuse valorile :

$c_c \geqslant 1{,}875$, indiferent de $\overline{\sigma}$;

$c_r \geqslant 2{,}343$, cînd $\overline{\sigma} \leqslant 0{,}80$;

$c_r \geqslant 2{,}083$ cînd $\overline{\sigma} \leqslant 0{,}90$,

formulele (1,2) metamorfozîndu-se astfel:

$$s = \frac{p_h D_e}{\frac{2\sigma_c}{1{,}875}\varphi + p_h} = \frac{p_h D_e}{1{,}067\ \varphi\sigma_c + p_h}; \tag{18}$$

$$s_f = \frac{\frac{p_h D_e \beta}{4\varphi\sigma_c}}{1{,}875} + s_a = \frac{p_h D_e \beta}{2{,}133\varphi\sigma_c} + s_a; \tag{19}$$

• pentru $k \leqslant 0{,}90 \rightarrow 90\%$, rezultă ca fiind necesară impunerea valorilor:

$c_c \geqslant 1{,}67$, indiferent de $\bar{\sigma}$;

$c_r \geqslant 2{,}08$, cînd $\bar{\sigma} \leqslant 0{,}80$;

$c_r \geqslant 1{,}85$, cînd $\bar{\sigma} \leqslant 0{,}90$,

formulele (1,2) devenind:

$$s = \frac{p_h D_e}{1{,}2\varphi\sigma_c + p_h}; \quad s_f = \frac{p_h D_e \beta}{2{,}4\varphi\sigma_c} + s_a. \tag{20,21}$$

UNELE CONSIDERAȚII TEORETICE

În scopul rezolvării inginerești a unor probleme de interes practic imediat, dependența tipică $p(\tau)$ din figura 1 se poate apropxima prin cea așa-zisă *tehnică* redată în figura 3, amdițîndu-se ipoteza conform căreia $p_c'' \rightarrow p_c' \rightarrow p_c$, respectiv $p_c'' \rightarrow p_c' = p_c'' + \Delta p_c \rightarrow p_c = p_c' + \Delta p_c' = p_c'' + \Delta p_c'' + \Delta p_c'$ atunci cînd $\Delta p_c' \rightarrow \Delta p_c'' \rightarrow 0$.

Se definesc și se introduc următoarele concepte și mărimi:

• în domeniul presurizării tehnic *elastice* (domeniul I în fig. 3):

$\lim\limits_{\Delta\tau\rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta\tau} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\tau} = \dot{p}_e = \mathrm{tg}\ \alpha = w_e^p = \mathrm{const}$ — viteza *instantanee* de presurizare interioară, în MPa/s sau în bar/s;

$\bar{w}_e^p = \frac{p_c'}{\tau_c'} = \mathrm{tg}\ \alpha = w_e^p = \mathrm{const}$ — viteza *medie* de presurizare interioară, în MPa/s sau în bar/s;

$p = \bar{w}_e^p \tau$ — ecuația dependenței liniare $p(\tau)$ în intervalul $\tau \in [0; \tau_c']$, respectiv în domeniul I (în MPa sau în bar);

• în domeniul presurizării tehnic *inelastice* (domeniul II în fig. 3):

$\lim\limits_{\Delta\tau\rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta\tau} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\tau} = \dot{p}_{ie} = \mathrm{tg}\ \psi = w_{ie}^p = \mathrm{const}$ — viteza *instantanee* de presurizare interioară, în MPa/s sau în bar/s;

$\overline{w}_{ie}^{p} = \dfrac{p_d - p_c'}{\tau_d - \tau_c} = \operatorname{tg}\psi = w_{ie}^{p} = \text{const}$ — viteza *medie* de presurizare interioară, în MPa/s sau în bar/s;

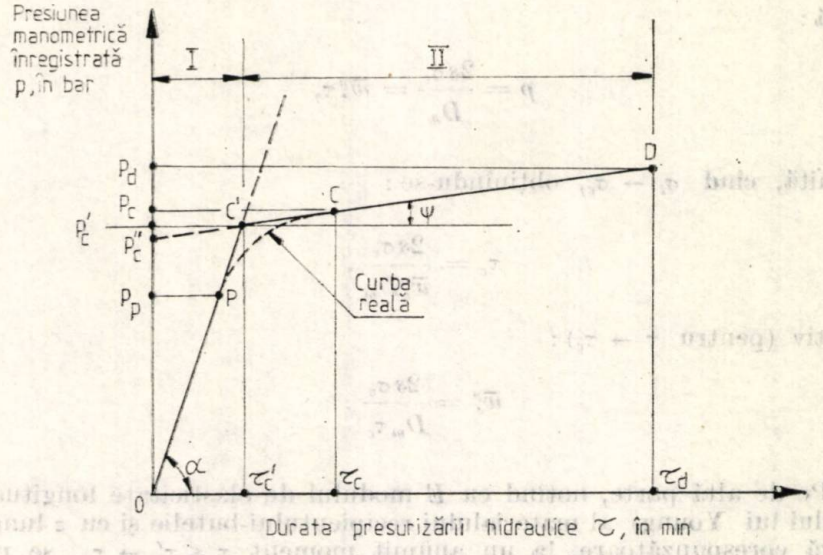


Fig. 3. — Dependența $p(\tau)$ așa-zisă tehnică: I — domeniul presurizării interioare statice tehnic *elastice*; II — domeniul presurizării interioare statice tehnic *inelastice*.

$p = p_c' + \overline{w}_{ie}^{p}(\tau - \tau_c')$ — ecuația dependenței liniare $p(\tau)$ în intervalul $\tau \in [\tau_c', \tau_d]$, respectiv în domeniul II (în MPa/s sau în bar/s), rezultînd:

$\overline{w}_c^{p} \gg \overline{w}_{ie}^{p}$, deoarece întotdeauna $\psi \ll \alpha$;

$\overline{w} = \dfrac{\overline{w}_c^{p}}{\overline{w}_{ie}^{p}} = \dfrac{p_c'}{p_d}\dfrac{\tau_d}{\tau_c}\left(\dfrac{1 - \tau_c'/\tau_d}{1 - p_c'/p_d}\right)$ — simplexul caracterizant din punctul de vedere al vitezelor de presurizare interioară, respectiv simplexul de caracterizare cinetic.

În cazurile *particulare* cu $p_c' \to p_c$ și $\tau_c' = \tau_c \ll \tau_d$, se obține:

$$\overline{w}_c^{p} = \frac{p_c}{\tau_c}\ ;\ \overline{w}_{ie}^{p} = \frac{p_d - p_c}{\tau_d}\ ;\ \overline{w} = \frac{\overline{p}}{\overline{\tau}(1 - \overline{p})}, \qquad (22, 23, 24)$$

aici $\overline{\tau} = \tau_c/\tau_d$ numindu-se simplexul de caracterizare din punctul de vedere al duratelor presurizării interioare, respectiv simplexul de caracterizare *temporal*. Cum, întotdeauna, $\overline{w} > 0$ și $\overline{\tau} > 0$, se impune a se avea în atenție că $\overline{p} < 1$ și nicidecum $\overline{p} \geqslant 1$ (ceea ce corespunde la $\overline{\sigma} = 0{,}80$ și $\delta \geqslant 25\%$ - tab. 1).

În stadiul presurizării tehnic *elastice* (I în fig. 3), fiind maxime eforturile unitare circumferențiale din peretele corpului cilindric al recipien-

tului-butelie, cu intensitatea [8]:

$$\sigma_t = \frac{pD_m}{2s}, \tag{25}$$

rezultă:

$$p = \frac{2s\,\sigma_t}{D_m} = \overline{w}_e^p \tau,$$

la limită, cînd $\sigma_t \to \sigma_c$, obținîndu-se:

$$\tau_c = \frac{2s\,\sigma_c}{\overline{w}_e^p D_m}, \tag{26}$$

respectiv (pentru $\tau \to \tau_c$):

$$\overline{w}_e^p = \frac{2s\,\sigma_c}{D_m \tau_c}. \tag{27}$$

Pe de altă parte, notînd cu E modulul de elasticitate longitudinal (modulul lui Young) al materialului recipientului-butelie și cu ε lungirea relativă corespunzătoare, la un anumit moment $\tau \leqslant \tau_c' \to \tau_c$, se poate scrie:

$$\sigma_t = p\frac{D_m}{2s} = E\varepsilon,$$

astfel că:

$$p = \frac{2Es}{D_m}\varepsilon = \omega_e \varepsilon, \tag{28}$$

respectiv:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\tau} = \dot{p} = \omega_e \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\tau} = \omega_e \dot{\varepsilon},$$

adică:

$$\dot{p} = \omega_e \dot{\varepsilon}, \tag{29}$$

corelîndu-se, deci, viteza de presurizare interioară $\dot{p}$ cu cea de deformare corespunzătoare $\dot{\varepsilon}$, bineînțeles, în stadiul tehnic *elastic*.

În stadiul presurizării tehnic *inelastice* (II în fig. 3), dacă prin E_p se notează modulul de plasticitate, atunci rezultă:

— în dreapta punctului $C' \to C$ (fig. 3), respectiv pentru $\tau \geqslant \tau_c$:

$$\sigma = \sigma_c + E_p(\varepsilon - \varepsilon_c), \tag{30}$$

unde [1]:

$$\sigma_c = \frac{\sqrt{3}\, p_c}{1 - \frac{1}{\gamma^2}}, \tag{31}$$

ε_c fiind lungirea relativă la curgere;

— la limită (indice l), cînd toată secțiunea peretelui este deformată remanent plastic:

$$\sigma = \sigma_l + E_p(\varepsilon - \varepsilon_l), \tag{32}$$

unde [1]:

$$\sigma l = \frac{\sqrt{3}\, p_l}{2 \ln \gamma}, \tag{33}$$

ε_l fiind lungirea relativă la limită ($\varepsilon_l = \varepsilon_c$), iar σ_l — efortul unitar la limită ($\sigma_l = \sigma_c$), respectiv $\gamma = D_e/D_i$ (aici D_i este diametrul interior *nominal* al corpului de recipient-butelie, în mm).

Egalînd (30) cu (31), se obține (pentru cazul general $p_c \to p$):

$$\frac{\sqrt{3}\, p_c}{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sigma_c + E_p(\varepsilon - \varepsilon_c),$$

deci:

$$p_c = \frac{1 - \frac{1}{\gamma^2}}{\sqrt{3}} [\sigma_c + E_p(\varepsilon - \varepsilon_c)],$$

astfel că ($p_c \to p$):

$$\frac{dp}{d\tau} = \dot{p} = \frac{E_p\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)}{\sqrt{3}} \frac{d\varepsilon}{d\tau} = \omega_{ie}\dot{\varepsilon}, \tag{34}$$

adică:

$$\dot{p} = \omega_{ie}\dot{\varepsilon}, \tag{35}$$

de această dată fiind corelate viteza de presurizare interioară $\dot{p}$ și cea de deformare corespunzătoare $\dot{\varepsilon}$ în stadiul tehnic *inelastic*.

Pe de altă parte, pentru $\tau \geqslant \tau_c$, se poate scrie (v. formula 33 cînd $\sigma_l \to \sigma_c$ și figura 3 cînd $p'_c \to p_c$):

$$p_l = \frac{2\sigma_c \ln\gamma}{\sqrt{3}} = p_c + \overline{w}^p_{ie}(\tau - \tau_c), \tag{36}$$

Tabelul 4

Indicatorii de capacitate portantă ai recipientelor-butelii pentru gaze comprimate, gaze lichefiate și gaze dizolvate sub presiune

Indicatorul de capacitate portantă (ICP)	Valorile ICP			
	Impuse prin PT ISCIR C 5-84 [7]		Recomandate pentru actualizarea prescripțiilor tehnice ISCIR	
	Min.	Max.	Min.	Max.
Pentru materialul de bază al corpului de recipient-butelie				
Rezistența de rupere la întindere (tracțiune) R^{20}, în N/mm²	— —	1 200 (600)	840 (—)	1 200 (600)
Limita tehnică de curgere $R^{20}_{0,2}$, în N/mm²	—	—	720	—
Lungirea relativă la rupere A_5, în %	14 (16)	— —	14 (16)	25 (25)
Simplexul de caracterizare mecanică $\bar{\sigma} = R^{20}_{0,2}/R^{20}$	— — —	0,80 0,90 (0,80)	—	— 0,80 (0,80)
Coeficientul de siguranță (factorul de securitate) față de rezistența de rupere la întindere c_r	—	—	2,343 [$k \leqslant 0,80$]	2,500 [$k \leqslant 0,75$]
Coeficientul de siguranță (factorul de securitate) față de limita tehnică de curgere c_c	—	1,300 [$k \leqslant 0,75$]	1,875 [$k \leqslant 0,80$]	2,000 [$k \leqslant 0,75$]
Pentru structura propriu-zisă de rezistență a corpului de recipient-butelie				
Presiunea (manometrică) de curgere p_c	—	—	$p_c = 2R^{20}_{0,2}\left(\frac{s}{D_m}\right)$	
Presiunea (manometrică) de distrugere p_d (pentru $A'_5 = A_5/100$)	—	—	$p_d = \frac{2R^{20}}{1+A'_5}\left(\frac{s}{D_m}\right)$	
Simplexul de caracterizare barică $\bar{p}$	—	—	0,912 (0,928)	1,000

Notă. Valorile numerice indicate între paranteze curbe corespund recipientelor-butelii sudate. Celelalte valori revin recipientelor-butelii fără sudură.

de unde rezultă imediat :

$$\Delta\tau = \tau - \tau_c = \frac{1}{\overline{w}^p_{ic}} \left(\frac{2\sigma_c \ln\gamma}{\sqrt{3}} - p_c \right). \tag{37}$$

Prin urmare, ca alură generală, dependența $p(\varepsilon)$ este perfect identică cu cea $p(\tau)$, ilustrată în figurile 1 și 3, ceea ce, de altfel, s-a constatat mai demult pe cale experimentală [2, 6].

ÎNCHEIERE

În tabelul 4 se confruntă valorile ICP *impuse* prin PT ISCIR C 5-84 [7] cu cele *recomandate*, în baza studiului de față, spre a fi luate în considerație la *actualizarea* prescripțiilor tehnice respective, care, de altfel, se impune cu stringentă necesitate.

Primit în redacție la 12 mai 1989

BIBLIOGRAFIE

1. GH. BUZDUGAN, AL. SELEȘTEANU (coord.), *Manualul inginerului mecanic*, vol. **1**, Edit Tehnică, București, 1959.
2. E. KRÄGELOH, H. OSSWALD, *Festigkeit von Hohlzylindern mit eingeschweissten Stutzen*, Schweissen und Schneiden, **24**, 7 (1972).
3. A. PAVEL, *Materiale și rezistențe admisibile folosite în construcția de utilaje pentru industria petrolieră prelucrătoare și petrochimică*, Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1967.
4. A. PAVEL, *Plesnirea longitudinală a tubulaturilor presurizate uniform la interior*, Mine, Petrol și Gaze, **36**, 9 (1985).
5. A. PAVEL, *Distrugerea brizantă a unei baterii mobile de recipiente-butelii pentru alimentarea autovehiculelor și tractoarelor cu gaz metan comprimat*. I — IV, Ploiești, Institutul de Petrol și Gaze, 1989.
6. K. WELLINGER, D. ÜEBING, *Festigkeitsverhalten dickwandiger Hohlzylinder unter Innendruck im vollplastischen Bereich*, Mitteilungen der Vereinigung der Grosskesselbesitzer, 66 (1960).
7. * * * *Prescripții tehnice (PT) pentru proiectarea, execuția, repararea, utilizarea și verificarea recipientelor-butelii pentru gaze comprimate, lichefiate sau dizolvate sub presiune*, C 5-84 (*cu modificările din 1985*). Ediție oficială a Inspecției pentru cazane, recipiente sub presiune și instalații de ridicat (ISCIR). Edit. Tehnică, București, 1985.
8. A. PAVEL, *Elemente de inginerie mecanică (pentru petrochimie)*. Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1981.

de unde rezultă imediat:

$$\Delta\tau = \tau - \tau_c = \frac{1}{\sqrt{3}\sigma_c}\left(\frac{2\sigma_c \ln\tau}{\sqrt{3}} - p_c\right). \tag{37}$$

Prin urmare, ca altă generală, dependența $p(\tau)$ este perfect identică cu cea $p(\tau)$, ilustrată în figurile 1 și 3, ceea ce, de altfel, s-a constatat mai demult pe cale experimentală [2, 6].

INCHEIERE

În tabelul 4 se confruntă valorile ICP rezultate prin PT ISCIR C 7-85 [7] cu cele recomandate în baza studiului de față, spre a fi luate în considerație la ocheiarea prescripțiilor tehnice respective, care, de altfel, se impune cu stringență mecesitate.

BIBLIOGRAFIE

1. GH. BUZDUGAN, AL. SELEȘTREANU (coord.), Alcoomatul Dicționarului mecanic, vol. I, Edit. Tehnică, București, 1986.
2. E. KRAGELSKI, H. OSSWALD, Reibung und Verschleiss, Stuttgart, Schmiessen und Schneiden, 23, 7 (1972).
3. A. PAVEL, Alcătuirea și rezistența echipamentelor de mișcare pentru mașini de ridicat, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.
4. A. PAVEL, Mecanica contactului dintre corpuri, Editura Academiei Române, București, 1987.
5. A. PAVEL, Diferențe privitoare la unele aspecte ale proiectării pentru durabilitate a mașinilor de ridicat și transportat cu cele ale construcției, I – IV, Institutul de Petrol și Gaze, 1989.
6. K. WOLLENBERG, U. DEHLINGER, Reibungsverhalten elektrolytisch vernickelter Flächen, Metall (Berlin), Mitteilungen der Vereinigung der Forschungsinstitute, 86 (1980).
7. ..., Prescripții tehnice (Y7) pentru proiectarea, executia, repararea, utilizarea și verificarea instalațiilor pentru sarcini suspendate, Inspectia de stat pentru controlul cazanelor, recipientelor sub presiune și instalațiilor de ridicat (ISCIR). Edit. Tehnică, București, 1985.
8. A. PAVEL, Elemente de mașini mecanice (pentru petrochimie). Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1991.

CALCULUL REZISTENȚELOR HIDRAULICE OPTIME LA SISTEME SPECIALE DE PROTECȚIE LA ȘOC HIDRAULIC A STAȚIILOR DE POMPARE

de M. POPESCU
TH. GHINDA

Institutul de Cercetări Hidrotehnice — București

A. HALANAY

Universitatea din București

Plecînd de la ecuațiile generale ale mișcării oscilatorii a apei într-un sistem hidraulic sub presiune prevăzut cu rezervor de aer, se prezintă o metodă directă de calcul hidraulic pentru dimensionarea optimă a sistemelor de protecție la șoc hidraulic de tip „rezervor de aer prevăzut cu dispozitiv de rezistență hidraulică asimetrică".

Pentru exemplificarea metodei se prezintă o aplicație practică la o stație de pompare calculată anterior prin metode numerice uzuale.

1. INTRODUCERE

Pentru protecția la șoc hidraulic a stațiilor de pompare în mod obișnuit se adoptă soluții de tip rezervor de aer sau castel de echilibru, care transformă mișcarea rapid variabilă a apei din conducta de refulare în mișcare lent variabilă (oscilație în masă), figura 1.

În ultimul timp, la noi în țară, s-a promovat un sistem de protecție de mare eficacitate funcțională de tip „rezervor de aer prevăzut cu dispozitiv special de rezistență hidraulică asimetrică", figura 1, a [3], [4], [5].

Aplicarea acestui sistem la proiectarea unui număr de peste 20 de stații de pompare, cea mai mare parte dintre ele fiind deja intrate în funcțiune, a evidențiat posibilitatea realizării unor sisteme de protecție la șoc hidraulic care realizează reducerea substanțială, sau în anumite cazuri chiar eliminarea suprapresiunilor — provocate de regimurile hidraulice tranzitorii — din conducta de refulare.

Un sistem de protecție similar s-a obținut prin montarea dispozitivului de rezistență hidraulică menționat la castelul de echilibru (fig. 1, b), în acest caz efectul sistemului de protecție fiind reducerea amplitudinilor nivelurilor maxime din castel.

Dispozitivul special de rezistență hidraulică asimetrică [1] (tip ICH) este alcătuit din piese fixe și prezintă următoarele avantaje:

— asigură rapoarte de asimetrie relativ mari;

— are o structură simplă.

Dispozitivul este compus dintr-un anumit număr de piese tronconice identice și o piesă bitronconică amplasate în serie într-o poziție particulară, determinată, în interiorul conductei de branșare. Piesele

[1] Rezistența hidraulică locală este asimetrică cînd produce pierderi de sarcină hidraulică diferite în cele două sensuri de curgere.

tronconice au raportul între diametrele celor două baze $d/D = \alpha = 0{,}4 \div 0{,}6$ și lungimea l egală cu diametrul D al conductei de branșare, iar piesa bitronconică este compusă din două piese tronconice cu bazele mici unite.

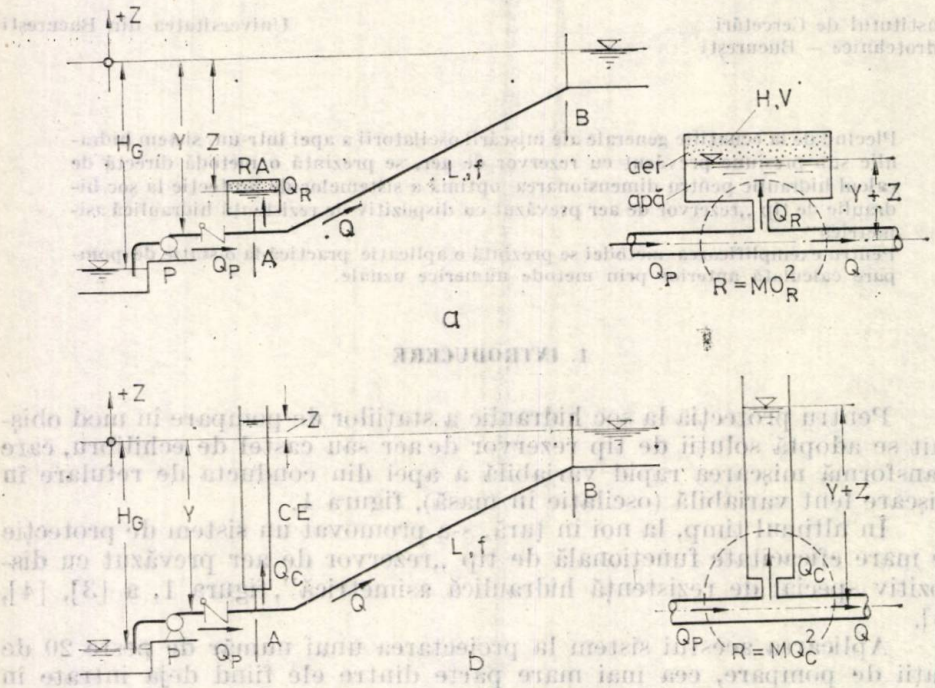


Fig. 1. — Schema unei stații de pompare prevăzute cu : a) rezervor de aer ; b) castel de echilibru la bază.

Coeficienții de pierdere de sarcină hidraulică locală ai dispozitivului, pentru cele două sensuri de curgere, s-au determinat pe cale experimentală cu ajutorul unei instalații de laborator [3].

Notînd cu 1 și 2 cele două sensuri de curgere ale fluidului în lungul conductei de branșare, raportul de asimetrie al rezistenței hidraulice este dat de raportul ζ_2/ζ_1, cu $\zeta_2 > \zeta_1$, unde ζ reprezintă coeficientul de pierdere de sarcină hidraulică locală ($\Delta h = \zeta V^2/2g$).

Valorile coeficienților ζ_1 și ζ_2, precum și a raportului $r = \zeta_2/\zeta_1$ în funcție de numărul n de piese tronconice, pentru diverse rapoarte $\alpha = d/D$, sînt sistematizate sub formă de grafice care se pot folosi direct în activitatea practică de proiectare [5].

Din literatura de specialitate se știe că dispozitivele de construcție simplă realizate din piese fixe furnizează rapoarte de asimetrie hidraulică cu valori de pînă la $1{,}5 \div 2$.

De menționat că dispozitivul descris mai sus furnizează rapoarte de asimetrie cu valori de $4 \div 5$, pentru variante cu 2 sau 3 piese tronconice [3], [4], [5].

În mod obișnuit, calculele hidraulice pentru funcționarea la regimuri tranzitorii a stațiilor de pompare — care presupun stabilirea și dimensionarea sistemelor de protecție la șoc hidraulic — se efectuează prin metode numerice și necesită în general calculul și analiza unui număr de cca 10—15 variante, din care se reține soluția optimă din punct de vedere tehnic și funcțional pentru sistemul de protecție respectiv.

În articolul de față se prezintă o metodă directă de calcul hidraulic pentru dimensionarea optimă a sistemelor de protecție de tip „rezervor de aer prevăzut cu rezistență asimetrică", și se exemplifică cu o aplicație practică pe o stație de pompare calculată anterior prin metode numerice.

2. METODA DE CALCUL

2.1. MODELUL MATEMATIC

În cazul stației de pompare prevăzute cu rezervor de aer la bază (fig. 1, a), pentru calculul mișcării nepermanente a apei din sistemul rezervor de aer — conductă de refulare se pleacă de la modelul mișcării lent variabile :

$$\frac{L}{gf}\frac{dQ}{dt} - (H + Z) + PQ|Q| - MQ_R|Q_R| = 0$$

$$Q_P = F\frac{dZ}{dt} + Q \qquad (1)$$

$$(H + h_a)V = (H + h_a)(Z^* - Z)F = (H_0 + h_a)V_0 = C$$

$$Q_P = Q_P(t)$$

în care s-au folosit notațiile : Z — cota nivelului apei din rezervorul de aer față de nivelul din rezervorul de refulare, Z^* — cota părții superioare a rezervorului de aer, Q_P — debitul pompat ; Q și W — debitul și respectiv viteza din conducta de refulare ; Q_R — debitul de intrare — ieșire din rezervorul de aer ; L — lungimea conductei ; f — aria secțiunii conductei ; F — aria secțiunii orizontale a rezervorului de aer la oglinda apei ; H — presiunea pernei de aer ; V — volumul pernei de aer ; C — constanta elastică a pernei de aer ; P — coeficient de pierdere de sarcină longitudinală pe conductă ; M — coeficient de pierdere de sarcină locală în branșamentul rezervorului de aer ; h_a — presiunea atmosferică în m.c.a. ; t — timpul ; g — accelerația gravitației.

Pentru situația de regim mărimile se notează cu indicele 0. Se va analiza cazul manevrei de oprire bruscă a stației ($Q_P = 0$), care implică următoarele condiții inițiale :

$$Z(t)\Big|_{t=0} = Z_0, \quad \frac{dZ}{dt}\Big|_{t=0} = -\frac{Q_0}{F} = -\frac{f}{F}W_0 \qquad (2)$$

În acest caz, sistemul de ecuaţii (1), scris în variabila $Z(t)$, conduce la următoarea ecuaţie diferenţială a mişcării oscilatorii din sistem:

$$\frac{LF}{gf}\frac{d^2Z}{dt^2}+F^2(P+M)\frac{dZ}{dt}\left|\frac{dZ}{dt}\right|+Z+\frac{(H_0+h_a)(Z^*-Z_0)}{Z^*-Z}-h_a=0 \tag{3}$$

iar presiunea apei din conducta de refulare, în secţiunea rezervorului de aer, este dată de următoarea relaţie:

$$\frac{p_A(t)}{\gamma}=H+Y+Z+MQ_R|Q_R|=$$

$$=\frac{(H_0+h_a)(Z^*-Z_0)}{Z^*-Z(t)}+Y+Z(t)+MF^2\frac{dZ}{dt}\left|\frac{dZ}{dt}\right|-h_a \tag{4}$$

Valorile extreme (maxime şi minime) ale acestei presiuni sînt legate de valorile extreme ale lui Z prin relaţia:

$$\frac{p_A}{\gamma}=\frac{(H_0+h_a)(Z^*-Z_0)}{Z^*-Z}+Z+Y-h_a \tag{5}$$

2.2. BAZELE TEORETICE ALE METODEI DE CALCUL

Pentru a obţine valorile extreme ale nivelului Z al apei din rezervor, se vor considera următoarele două faze iniţiale ale mişcării:

— faza I, în care nivelul apei în rezervor scade, variind între valorile Z_0 şi Z_{min};

— faza II-a, în care nivelul apei în rezervor creşte, variind între valorile Z_{min} şi Z_{max}.

Deoarece în fiecare dintre faze $\frac{dZ}{dt}\neq 0$, aplicaţia $t\to Z(t)$ se poate inversa; notăm cu τ inversa corespunzătoare şi cu α funcţia definită prin relaţia:

$$\alpha(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{dZ}{dt}\bigg|_{t=\tau(x)}\right]^2 \tag{6}$$

cu observaţia că această funcţie reprezintă chiar energia cinetică a oscilaţiilor unităţii de masă din sistem. Trecerea la variabila α pentru studiul oscilaţiilor nivelului apei din rezervorul de aer este clasică [1].

În urma acestei schimbări de variabilă, rezultă următoarele ecuaţii:

a) în prima fază:

$$\frac{d\alpha}{dx}=\frac{2gfF}{L}(P+M)\alpha(x)-\frac{fg}{LF}\left[x+\frac{(H_0+h_a)(Z^*-Z_0)}{Z^*-x}-h_a\right] \tag{7}$$

b) în a doua fază :

$$\frac{d\alpha}{dx} = -\frac{2gfF}{L}(P+M)\alpha(x) - \frac{fg}{LF}\left[x + \frac{(H_0+h_a)(Z^*-Z_0)}{Z^*-x} - h_a\right] \quad (8)$$

cu condițiile inițiale :

$$\alpha(Z_0) = \frac{f^2}{2F^2} W_0^2 \quad (9)$$

pentru prima fază și

$$\alpha(Z_{min}) = 0 \quad (10)$$

pentru a doua fază, unde Z_{min} este valoarea minimă a nivelului obținută în prima fază.

În prima fază ecuația se studiază pentru $x < Z_0$, iar în cea de a doua fază pentru $x > Z_{min}$.

Valoarea Z_{min} se calculează din ecuația $\alpha(Z_{min}) = 0$, α fiind soluția ecuației (7) corespunzătoare primei faze.

Introducînd notația :

$$\rho = \frac{2gfF}{L}(P+M) \quad (11)$$

se obține pentru Z_{min} ecuația :

$$\Phi(\rho, Z) = 0, \text{ unde}$$

$$\Phi \overset{def}{=} \int_{Z_0}^{Z} e^{\rho(Z_0-\xi)}\left[\xi + \frac{(H_0+h_a)(Z^*-Z_0)}{Z^*-\xi} - h_a\right]d\xi - \frac{fL}{2gF} W_0^2 \quad (12)$$

Pentru cea de a doua fază valoarea Z_{max} se calculează din ecuația :

$$\Psi_{Z_{min}}(\rho, Z) = 0, \text{ unde :}$$

$$\Psi_{Z_{min}} \overset{def}{=} \int_{Z_{m\,i}}^{Z} e^{\rho\xi}\left[\xi + \frac{(H_0+h_a)(Z^*-Z_0)}{Z^*-\xi}\right]d\xi \quad (13)$$

cu Z_{min} obținut din prima fază.

2.3. PROCEDURA DE CALCUL

Se recomandă următoarea procedură de calcul :

a) Se alege o primă valoare $\hat{\rho}$, deci o primă valoare pentru coeficientul M de rezistență hidraulică a branșamentului.

Se rezolvă pe cale numerică ecuația diferențială de ordinul doi neliniară (3), care cu notația (11) devine :

$$\frac{L}{gf}\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}t^2}+\frac{FL\hat{\rho}}{2gf}\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}\left|\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}\right|+Z+\frac{(H_0+h_a)(Z^*-Z_0)}{Z^*-Z}-h_a=0 \quad (14)$$

cu condițiile inițiale :

$$Z(t)\Big|_{t=0}=Z_0 \text{ și } \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=-\frac{Q_0}{F}=-\frac{f}{F}W_0 \quad (15)$$

și se determină valoarea minimă a lui Z în prima fază de oscilație ; această valoare se notează $\hat{Z}$.

b) Se formează ecuația diferențială :

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}Z}=-\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial Z}(\rho,Z)}{\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}(\rho,Z)} \quad (16)$$

cu funcția $\Phi(\rho, Z)$ definită prin relația (12) și se rezolvă cu condiția inițială $\rho(\hat{Z})=\hat{\rho}$.

Dacă se adoptă o anumită valoare pentru presiunea minimă din conductă $(p_A/\gamma)_{min}$ deci pentru Z_{min}, se efectuează integrarea de la $\hat{Z}$ la Z_{min} și se reține valoarea corespunzătoare $\rho(Z_{min})$; conform relației (11) rezultă valoarea coeficientului M_1 de rezistență hidraulică a branșamentului în sensul de curgere rezervor — conductă de refulare.

În mod alternativ putem forma și ecuația diferențială

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\rho}=-\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}(\rho,Z)}{\frac{\partial\Phi}{\partial Z}(\rho,Z)} \quad (17)$$

cu condiția inițială $Z(\hat{\rho})=\hat{Z}$, și efectuînd calcule pentru o plajă de valori ale lui ρ, putem să alegem valori ale lui ρ care conduc la valori Z_{min} acceptabile (deci și la presiuni minime în conductă acceptabile).

Să remarcăm că această ultimă ecuație se scrie :

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\rho}=-\int_{Z_0}^{Z}\frac{\mathrm{e}^{\rho(Z-\xi)}(Z_0-\xi)\left[\xi+\frac{(H_0+h_a)(Z^*-Z_0)}{Z^*-\xi}-h_a\right]}{Z+\frac{(H_0+h_a)(Z^*-Z_0)}{Z^*-Z}-h_a}\mathrm{d}\xi \quad (18)$$

c) Reținem valoarea lui ρ, pe care o notăm $\tilde{\rho}$, care convine pentru prima fază a mișcării și cu această valoare în loc de $\hat{\rho}$ rezolvăm ecuația (14) cu condițiile inițiale (15), urmărind de această dată ambele faze ale mișcării apei în sistem, pentru a calcula valoarea maximă a lui Z, pe care o vom nota $\tilde{Z}$.

d) Scriem ecuația diferențială :

$$\frac{dZ}{d\rho} = -\frac{\dfrac{\partial \Psi_{Z_{min}}(\rho, Z)}{\partial \rho}}{\dfrac{\partial \Psi_{Z_{min}}(\rho, Z)}{\partial Z}} \tag{19}$$

care, explicit, este :

$$\frac{dZ}{d\rho} = -\int_{Z_{min}}^{Z} e^{\rho(\xi - Z)} \cdot \frac{\xi\left[\xi + \dfrac{(H_0 + h_a)(Z^* - Z_0)}{Z^* - \xi} - h_a\right]}{Z + \dfrac{(H_0 + h_a)(Z^* - Z_0)}{Z^* - Z} - h_a} d\xi \tag{20}$$

și o rezolvăm pentru $Z(\tilde{\rho}) = \tilde{Z}$.

Alegem valoarea lui ρ, deci a coeficientului M_2 de rezistență hidraulică a branșamentului pe direcția de curgere conductă — rezervor, care conduce la valori acceptabile pentru presiunea maximă din conductă $(p_A/\gamma)_{max}$ și corespunzător pentru Z_{max}.

În acest mod, în funcție de valorile acceptate pentru presiunile minime și maxime din conducta de refulare au rezultat valori corespunzătoare pentru rezistențele hidraulice locale ale branșamentului pe cele două sensuri de curgere, determinînd astfel caracteristicile rezistenței hidraulice asimetrice a branșamentului (M_1, M_2, M_2/M_1).

De menționat că procedeul de rezolvare a problemelor de funcții implicite prin reducerea la probleme Cauchy pentru ecuații diferențiale, adoptat în metoda de calcul prezentată, este datorat lui Davidenko și a fost reluat pentru diferite aplicații tehnice de mai mulți autori [2].

În sfîrșit, se menționează că metoda de calcul prezentată se poate aplica și în cazul stației de pompare cu castel de echilibru prevăzut cu dispozitiv de rezistență hidraulică asimetrică (fig. 1, b), în acest caz calculele devenind mult mai simple.

3. APLICAȚIE

Metoda s-a aplicat și verificat la mai multe stații de pompare. Aici, pentru exemplificare s-a ales stația de pompare de bază SPA Oprișeni din cadrul sistemului hidrotehnic Derivația Prut — Bîrlad [5].

Dintre principalele caracteristici tehnice ale stației de pompare menționăm : înălțimea geodezică de pompare $H_G = 98{,}5$ m ($Y = 95$ m); debitul instalat $Q_I = 3$ m^3/s ; conducta de refulare de construcție metalică are lungimea $L = 6757$ m și diametrul $D = 1{,}4$ m ; stația este echipată cu 8 electropompe verticale de tip MV 403×2, avînd fiecare puterea $N = 800$ kW, turația $n = 1500$ rot/min și caracteristicile hidraulice $Q_0 = 0{,}4$ m^3/s și $H_0 = 100$ m.

Stația se pretează la o soluție de protecție de tip rezervor de aer prevăzut cu dispozitiv de rezistență hidraulică asimetrică deoarece presiunea de regim fiind destul de mare și anume de cca 10 atm., pentru a asigura o funcționare hidraulică optimă a stației la regimuri tranzitorii este necesar ca suprapresiunile în sistem să fie cît mai mici.

În vederea aplicării metodei la dimensionarea rezervorului de aer se efectuează calcule simultan pentru cîteva valori care se aleg în limite acceptabile ale volumului pernei de aer la presiunea de regim. (De exemplu, se poate lua volumul total al rezervorului de aer (V_t) de cca 2% din volumul conductei de refulare, iar volumul pernei de aer la presiunea de regim $V_0 = (0{,}3 \div 0{,}5)V_t$).

În cazul de față s-au efectuat toate calculele impuse de metodă pentru două valori ale volumului pernei de aer la presiunea de regim :

— varianta I : $V_0 = 50$ m^3, și

— varianta II : $V_0 = 70$ m^3.

S-a admis manevra cea mai defavorabilă în exploatare, de oprire a stației la funcționarea de regim cu debit maxim $Q_P = 3$ m^3/s.

În calculele preliminare s-a ales pentru coeficientul de rezistență hidraulică a branșamentului valoarea $M_1 = M_2 = 8$, care conduce la $\rho_1 = \rho_2 = 0{,}85$ conform relației (11) și s-a efectuat integrarea numerică a ecuației (14) cu condiții inițiale de tip (15) :

— pentru varianta I :

$$Z(t)\Big|_{t=0} = -85{,}6 \text{ m}; \quad \frac{dZ}{dt}\Big|_{t=0} = -0{,}15 \text{ m/s};$$

— pentru varianta II :

$$Z(t)\Big|_{t=0} = -86{,}5 \text{ m}; \quad \frac{dZ}{dt}\Big|_{t=0} = -0{,}15 \text{ m/s}$$

și cu valorile de calcul $Z^* = -83$ m și $F = 20$ m^2.

Rezultatele calculelor numerice sînt prezentate grafic în figura 2, de unde se reține valorile minime ale nivelului Z :

— în varianta I : $Z_{min} = -87{,}55$ m ;

— în varianta II : $Z_{min} = -88{,}65$ m.

Cu aceste rezultate considerate drept condiții inițiale $Z(\rho_1) = Z_{min}$, se integrează numeric ecuația diferențială (18), în ambele variante analizate, obținîndu-se graficele $Z_{min}(\rho_1)$ și $p_A/\gamma(\rho_1)$ prezentate în figurile 3 și 4.

Mai departe, pentru alegerea valorilor optime ale rezistențelor hidraulice ale branșamentului, situîndu-ne de exemplu în cazul variantei II (cu $V_0 = 70$ m^3) și alegînd presiunea minimă în conductă $(p_A/\gamma)_{min} = 60$ m, conform graficelor din figura 4 rezultă valoarea $\rho_1 = 0{,}5$ ($M_1 = 0{,}405$).

Pentru găsirea și celui de al doilea coeficient de rezistență hidraulică a branșamentului M_2, se integrează numeric ecuația (14), cu condițiile la limită (15), cu $\rho_1 = \rho_2 = \hat{\rho} = 0{,}5$ și din graficul obținut $Z(t)$ se reține valoarea Z_{max} din prima oscilație. Cu această valoare pentru Z_{max}, folosită

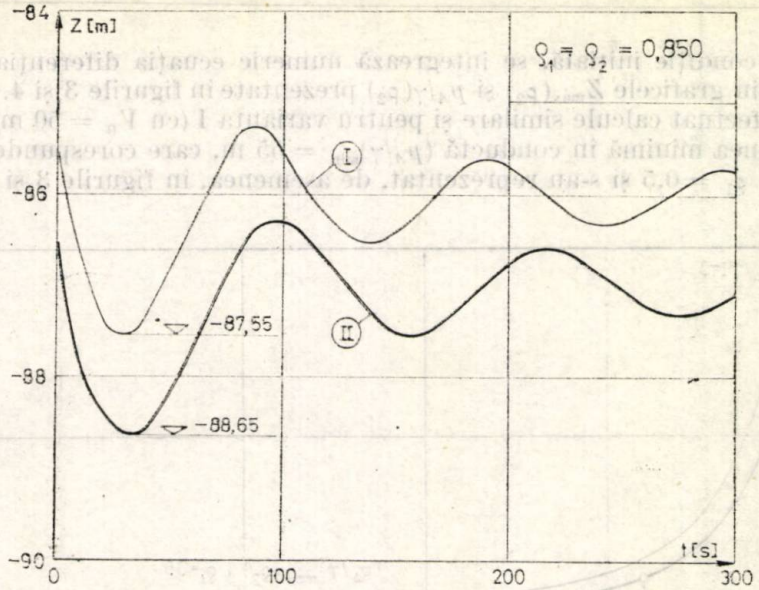


Fig. 2. — Curbele de variație în timp a nivelului apei din rezervorul de aer la manevra de oprire bruscă a stației de pompare, pentru o anumită rezistență hidraulică a branșamentului $\rho_1 = \rho_2 = 0{,}850$.

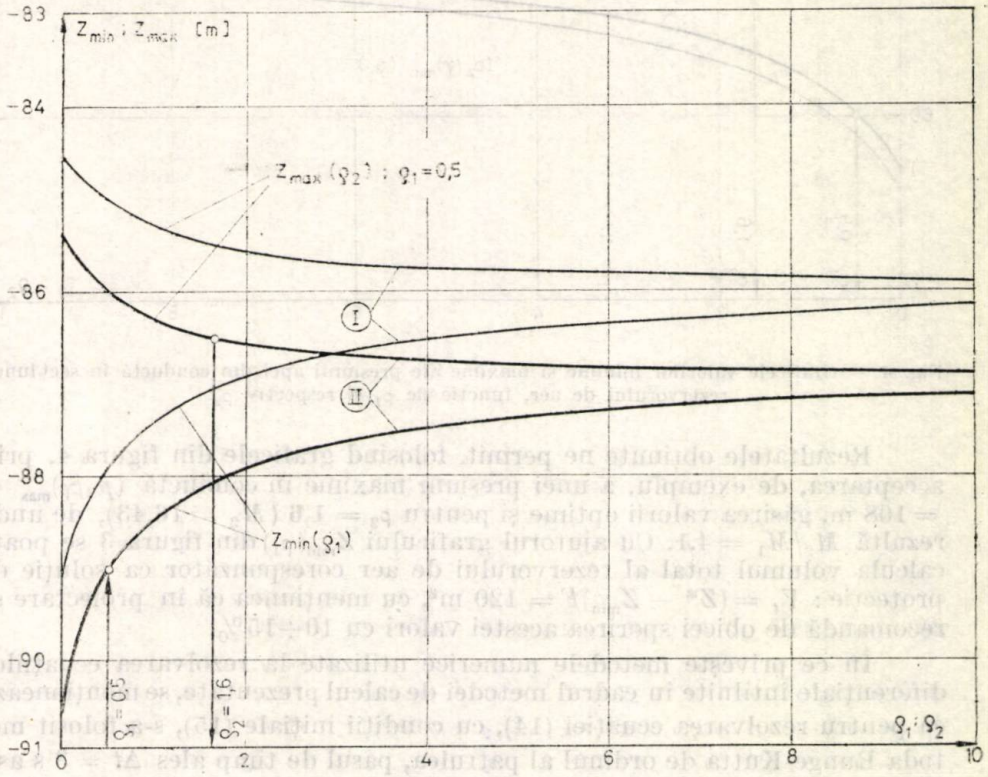


Fig. 3. — Graficele nivelurilor minime și maxime ale apei din rezervorul de aer, funcție de rezistențele hidraulice ale branșamentului în cele două direcții de curgere ρ_1, ρ_2.

drept condiție inițială, se integrează numeric ecuația diferențială (20) și se obțin graficele $Z_{max}(\rho_2)$ și $p_A/\gamma(\rho_2)$ prezentate în figurile 3 și 4. Simultan s-au efectuat calcule similare și pentru varianta I (cu $V_0 = 50$ m^3) alegînd presiunea minimă în conductă $(p_A/\gamma)_{min} = 55$ m, care corespunde aceleiași valori $\rho_1 = 0{,}5$ și s-au reprezentat, de asemenea, în figurile 3 și 4.

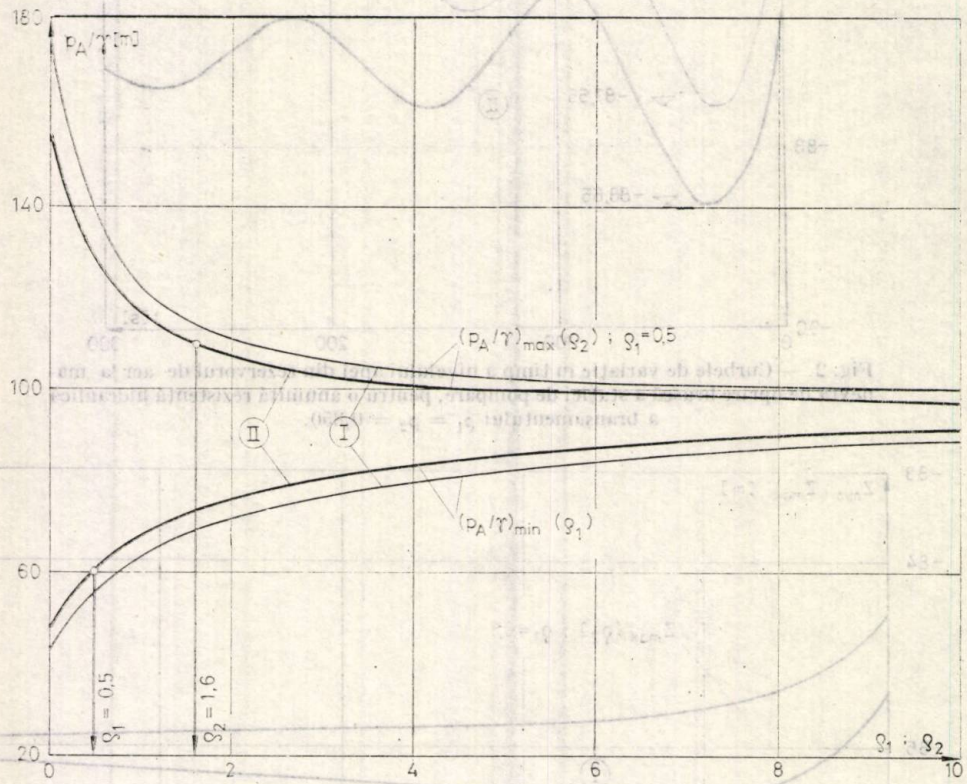


Fig. 4. — Graficele valorilor minime și maxime ale presiunii apei din conductă în secțiunea rezervorului de aer, funcție de ρ_1 și respectiv ρ_2.

Rezultatele obținute ne permit, folosind graficele din figura 4, prin acceptarea, de exemplu, a unei presiuni maxime în conductă $(p_A/\gamma)_{max} = 108$ m, găsirea valorii optime și pentru $\rho_2 = 1{,}6$ ($M_2 = 16{,}43$), de unde rezultă $M_2/M_1 = 4{,}1$. Cu ajutorul graficului $Z_{min}(\rho_1)$ din figura 3 se poate calcula volumul total al rezervorului de aer corespunzător ca soluție de protecție : $V_t = (Z^* - Z_{min})F = 120$ m^2, cu mențiunea că în proiectare se recomandă de obicei sporirea acestei valori cu $10 \div 15\%$.

În ce privește metodele numerice utilizate la rezolvarea ecuațiilor diferențiale întîlnite în cadrul metodei de calcul prezentate, se menționează că pentru rezolvarea ecuației (14), cu condiții inițiale (15), s-a folosit metoda Runge-Kutta de ordinul al patrulea, pasul de timp ales $\Delta t = 3$ s asigurînd pentru calculul lui Z precizia de calcul impusă de 0,01 m.

Pentru rezolvarea numerică a ecuațiilor diferențiale (18) și (20) cu condițiile inițiale respective, s-a folosit pentru calculul valorilor $Z_{min}(\rho)$ și $Z_{max}(\rho)$, de asemenea, metoda Rungé-Kutta cu pași de calcul $\Delta\rho = 0{,}2$ pentru calculul în sens direct și $\Delta\rho = 0{,}05$ pentru calculul în sens invers, asigurîndu-se precizia de calcul de 0,1 m impusă pentru calculul presiunilor extreme $(p_A/\gamma)_{min}$ și $(p_A/\gamma)_{max}$.

În cadrul procesului de integrare numerică, valorile integralelor din ecuații s-au calculat cu formula lui Simpson cu 25 de puncte, care s-a dovedit de precizie satisfăcătoare.

Comparînd rezultatele obținute mai sus prin noua metodă de calcul cu rezultatele obținute anterior prin metode numerice pentru aceeași stație de pompare, se constată o concordanță bună a rezultatelor [5].

În concluzie, se subliniază faptul că metoda de calcul prezentată permite alegerea directă a parametrilor optimi pentru dimensionarea rezervoarelor de aer prevăzute cu rezistențe hidraulice asimetrice, prin analizarea mai multor variante cu ajutorul aceloraș grafice.

În fine, se menționează că pentru soluția definitivă de protecție aleasă, studiul concret al funcționării hidraulice a stației la regimuri tranzitorii, pentru diferite manevre de debit și situații reale de funcționare întîlnite în exploatare, se poate efectua aplicînd metodele numerice uzuale folosite curent în practică.

Primit în redacție la 30 mai 1989

BIBLIOGRAFIE

1. L. ESCANDE, *Calcul rapide des reservoirs d'air de stations de pompage*, International commission on irrigation and drainage, Annual Bulletin (1963).
2. M. KUBICEK, M. MAREK, *Computational method in bifurcation theory and dissipative structures*, Springer series in computational physics, Springer-Verlag, New York, 1983.
3. M. POPESCU, *Recherches sur certaines dispositifs nouveaux fournissant des resistances hydrauliques asymetriques dans les systémes sous pression*, XVIII Convegno di Idraulica e Construzioni Idrauliche, Bologna, Italia, 1982.
4. M. POPESCU, *Highly efficient protection systems against waterhammer for pumping stations*, International Conference on the Hydraulics of Pumping Stations, Manchester, September 17—19, 1985.
5. M. POPESCU, D. ARSENIE, *Metode de calcul hidraulic pentru uzine hidroelectrice și stații de pompare*, Edit. Tehnică, București, 1987.

BUDAPEST MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁR 1848

Pentru rezolvarea numerică a ecuațiilor diferențiale (18) și (20) cu condițiile inițiale respective, s-a folosit pentru calculul valorilor $Z_{max}(\varphi)$ și $Z_{max}(\varphi)$, de asemenea, metoda Runge-Kutta cu pasul de calcul $\Delta\varphi = 0{,}2$ pentru calculul în serie direct și $\Delta\varphi = 0{,}05$ pentru calculul în sens invers, asigurându-se precizia de calcul de 0,1 m împușă pentru calculul presiunilor extreme $(p_1)_{min}$ și $(p_1)_{max}$.

În cadrul procesului de integrare numerică, valorile integralelor din ecuații s-au calculat cu formula lui Simpson cu 25 de puncte, care s-a dovedit de precizie satisfăcătoare.

Comparând rezultatele obținute mai sus prin noua metodă de calcul cu rezultatele obținute anterior prin metode numerice pentru aceeași stație de pompare, se constată o concordanță bună a rezultatelor [5].

În concluzie, se subliniază faptul că metoda de calcul prezentată permite alegerea directă a parametrilor optimi pentru dimensionarea rezervorului de aer prevăzute cu rezistențe hidraulice asimetrice, prin analizarea mai multor variante cu ajutorul aceleași grafice.

În fine, se menționează că pentru soluția definitivă de protecție aleasă, studiul comcret al funcționării hidraulice a stației în regimuri tranzitorii, pentru diferite manevre de debit și situații reale de funcționare intilnite în exploatare, se poate efectua aplicînd metodele numerice uzuale folosite curent în practică.

BIBLIOTECA

ÎNCĂRCAREA DE COINCIDENȚĂ PENTRU ELIPSĂ

de GH. BOGATU

T.A.G.C.M.M., București

În domeniul Mecanicii construcțiilor, sînt cunoscute încărcările de coincidență pentru arce (bolți) a căror axă este parabolă — uniform distribuită după o direcție — cerc — uniform distribuită după circumferință — și lănțișor — uniform distribuită după arc ; pentru elipsă această încărcare nu era cunoscută.

În cele ce urmează se arată cum s-a determinat încărcarea de coincidență pentru elipsă. Se menționează că, în această etapă, nu se ia în considerare deformația elastică a materialului și flambajul.

Necesitățile practice care au condus la această determinare constau în cerința de a se stabili forma optimă a canalizărilor de sub depozitele iazurilor de decantare din industria minieră. Aceste lucrări de canalizare necesită volume mari de beton armat ; o prioiectare judicioasă a lor aduce economii însemnate.

La acest gen de lucrări una din ipotezele de încărcare, determinată de încercări făcute in situ, este dată de situația finală a iazului, cînd asupra conductei de canalizare acționează presiunea verticală produsă de greutatea întregii coloane de steril depozitat și o presiune orizontală, a cărei intensitate este, funcție de proprietățile sterilului, o fracțiune din presiunea verticală.

Se consideră o curbă închisă, simetrică, care reprezintă axa unei construcții de genul canalizării menționate mai sus. Semiaxele sînt orizontale (a) și verticale (b). Axele de coordonate au originea în centrul O al curbei.

Încărcarea exterioară este uniform distribuită pe orizontală de sus în jos, respectiv de jos în sus (p_v) și uniform distribuită pe verticală de la stînga la dreapta, respectiv de la dreapta la stînga (p_0), conform figurii 1.

Se introduc secțiuni în A și B, adică se separă un sfert din curbă, cu încărcările exterioare aferente.

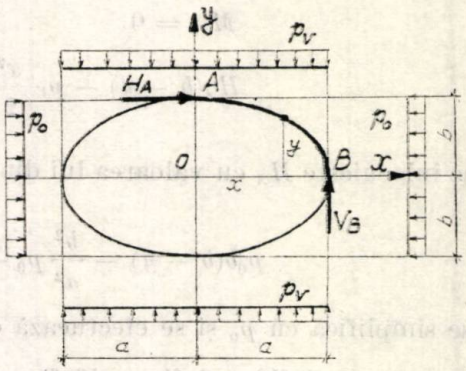


Fig. 1

În secțiunile A și B apar reacțiunile :

$$\begin{aligned} H_A &= p_0 b \quad V_A = 0 \\ H_B &= 0 \quad\quad V_B = p_V \cdot a \end{aligned} \tag{1}$$

care rezultă din ecuațiile de proiecție punîndu-se condiția de echilibru și ținînd seama că s-a impus condiția ca curba să fie curbă de coincidență pentru încărcările date, adică în secțiune să nu apară decît efort axial.

Condiția impusă de efort numai axial în orice secțiune permite să scriem că în punctele A și B momentele sînt nule :

$$M_A = 0$$

$$-V_B \cdot a + p_V \frac{a^2}{2} + p_0 \frac{b^2}{2} = 0$$

$$-p_V a^2 + p_V \frac{a^2}{2} + p_0 \frac{b^2}{2} = 0$$

$$-p_V \frac{a^2}{2} + p_0 \frac{b^2}{2} = 0$$

$$\frac{p_V}{p_0} = \frac{b^2}{a^2} \tag{2}$$

$M_B = 0$ dă același rezultat.

Din (2) rezultă o primă concluzie : curba de coincidență pentru încărcarea uniform distribuită pe orizontală, respectiv pe verticală, trebuie să aibă pătratul raportului axelor egal cu raportul intensității sarcinilor care acționează paralel cu aceste axe.

Scriem condiția de moment nul într-un punct curent al curbei, ținînd seama și de (2) :

$$M_{xy} = 0$$

$$H_A(b - y) - p_V \frac{x^2}{2} - p_0 \frac{(b-y)^2}{2} = 0$$

se înlocuiește H_A cu valoarea lui din (1) și $p_V = \frac{b^2}{a^2} p_0$ din (2)

$$p_0 b(b - y) - \frac{b^2}{a^2} p_0 \frac{x^2}{2} - p_0 \frac{(b-y)^2}{2} = 0$$

se simplifică cu p_0 și se efectuează calculele :

$$2a^2b^2 - 2a^2by - b^2x^2 - a^2b^2 + 2a^2by - a^2y^2 = 0$$

$$a^2b^2 - b^2x^2 - a^2y^2 = 0$$

se împarte cu a^2b^2 și se ordonează, făcîndu-se și schimbare de semn :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3}$$

Din (3) rezultă că pentru sistemul de încărcări date curba de coincidență este o elipsă.

Astfel s-a stabilit :

Elipsa este curba de coincidență pentru un sistem de încărcări uniform distribuite, dirijate după direcția axelor sale principale, raportul intensităților acestor încărcări fiind direct proporțional cu pătratul raportului lungimii axelor elipsei paralel cu care aceste încărcări acționează.

Pentru cerc se regăsește ceea ce era cunoscut, considerîndu-l un caz particular de elipsă cu axe egale : cercul curbă de coincidență pentru un sistem de încărcări uniform distribuite egale, perpendiculare între ele (echivalează cu încărcare uniform distribuită după circumferință).

Primit în redacție la 15 iulie 1989

BIBLIOGRAFIE

1. ȘT. BĂLAN, V. VÎLCOVICI, R. VOINEA, *Mecanică rațională*, Edit. Tehnică, București, 1960.
2. P. P. TEODORESCU, *Sisteme mecanice*, vol. 1, Edit. Tehnică, București, 1988.
3. S. TIMOSHENKO, *History of Strength of Materials*, McGraw-Hill Book Comp., New York, 1953.

J. WIEDERMAN, *Leichtbau. Band.* **2** : *Konstruktion* (Structuri ușoare. Volumul **2** : Construcții), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, London, Paris, Tokio, Hong Kong, 1989, 456 pag., 392 fig.

Proiectarea, privită ca proces de sinteză, cuprinzînd definirea geometriei, alegerea materialului, dimensionarea și optimizarea, constituie tema acestei lucrări, care își propune să aprofundeze bazele teoretice prezentate în primul volum. Deși concepute unitar, ca manual de proiectare a structurilor mecanice ușoare, cele două volume pot fi abordate și separat. Trebuie precizat că termenul de structuri ușoare nu se referă numai la acele construcții realizate din aliaje ușoare sau din materiale nemetalice ci include și structurile din oțel avînd o geometrie corespunzătoare.

Din motive didactice, autorul pune accentul pe modalități de tratare analitice închise, metodele numerice și tehnicile de optimizare fiind exemplificate pe cazuri particulare.

Primele două capitole realizează o introducere în cerințele complexe ale procesului de proiectare, insistînd asupra necesității abordării sistemice și pe importanța unui sistem decizional corect și coerent. Pe lîngă problemele strict tehnice sînt analizate și cerințele de natură economică. Noțiunile prezentate sînt exemplificate în detaliu pe cazul proiectării unei aripi de avion.

Capitolul trei se referă la materialele utilizate în construcțiile ușoare : oțel, aliaje de aluminiu, titan, magneziu și materiale compozite. Pe lîngă prezentarea generală, se dau numeroase valori experimentale pentru proprietățile mecanice ale materialelor respective. De asemenea este descrisă succint comportarea în domeniul plastic, la solicitări dinamice și termice.

O pondere importantă în economia cărții o au capitolele patru și cinci care se ocupă de probleme de optimizare a structurilor din punct de vedere al greutății proprii. Sînt tratate restricțiile ce derivă din asigurarea rezistenței și a rigidității, din fenomenele de pierdere a stabilității structurilor cu pereți subțiri, din influența greutății proprii și din criteriile tehnologice. Sînt prezentate tehnici de optimizare pentru structuri alcătuite din elemente solicitate axial.

Capitolul șase cuprinde probleme legate de concentratorii de tensiuni și de rezistența îmbinărilor. Sînt analizate îmbinările specifice acestui tip de structuri, cele prin nituire și cele prin lipire.

În ultimul capitol se prezintă modalități de stabilire și evaluare a coeficientului de siguranță, a siguranței în exploatare, a duratei de viață. Sînt folosite metodele probabilistice clasice.

Manualul are un caracter introductiv și formativ și nu își propune să furnizeze rețete și rezolvări fixe ci oferă o bază metodologică. Prezentarea este clară și cuprinde multe exemple practice, concrete, de complexitate redusă care contribuie la fixarea cunoștințelor.

C. Beldica

S. KALISZKY, *Plasticity. Theory and engineering application* (Plasticitate. Teorie și aplicații inginerești), Akadémiai Kiadó, Budapest, 1989.

Lucrarea este o ediție revăzută, în limba engleză, a cărții publicate în Ungaria, în 1975 și în R. F. Germania, în 1984. Textul ediției maghiare s-a bazat pe conferințele prezentate de autor, pe parcursul mai multor ani, la Universitatea Tehnică din Budapesta, în cadrul unor cursuri postuniversitare adresate inginerilor de construcții civile.

Lucrarea se adresează în principal inginerilor cercetători, autorul reușind să echilibreze cunoștințele teoretice cu cele aplicative, folosind formulări matematice concise și explicînd fenomenele fizice.

Se tratează pur fenomenologic, corpurile linear elastice — perfect plastice fără incursiuni în microstructură sau în procesul de deformare ireversibil. Se adoptă ipoteza deformațiilor infinitesimale, iar fenomenul de ecruisare este tratat pe scurt. Lucrarea conține de asemenea o prezentare detaliată a rezultatelor analizei numerice și a unor experimentări.

Se prezintă teoremele fundamentale ale teoriei incrementale a corpurilor plastice, metodele de calcul limită, optimizarea în proiectare, tratîndu-se structuri de tip bară, plăci și

membrane. Se prezintă de asemenea calculul elasto-plastic al barelor prismatice solicitate la torsiune ca și cel al cilindrilor și sferelor cu pereți groși solicitați la presiune internă. Se tratează teoria deformării plane și problemele de stare plană de eforturi în domeniul plastic. Ultimul capitol analizează răspunsul dinamic al structurilor plastice.

Lucrarea abordează problemele de calcul plastic într-o manieră modernă, folosind metoda elementelor finite pentru calculul automat.

Prezentarea este clară și concisă, partea grafică este realizată cu multă acuratețe. Lucrarea conține de asemenea o listă bibliografică de aproape 400 titluri.

Lucrarea se adresează atît cercetătorilor cît și inginerilor proiectanți în specialitatea de construcții și mecanică.

Graziella Mateescu

P. L. TIMÁR, *Noise and Vibration of Electrical Machines* (Zgomotul și vibrația mașinilor electrice), Akadémiai Kiadó, Budapest, 1989, 339 p.

Fenomenele de zgomot și vibrații, frecvente în toate industriile și în toate mijloacele de transport, constituie, în prezent, un factor poluant al mediului înconjurător cu efecte negative atît asupra duratei de funcționare a mașinilor cît mai ales asupra sănătății oamenilor și randamentului muncii acestora. De aceea, studierea fenomenelor de zgomot și vibrații împreună cu mijloacele de reducere a acestora, se impune cu mare acuitate în toate domeniile.

Ținînd seama de aceste considerente, lucrarea de față este de mare actualitate și prin conținutul ei de mare importanță științifică și tehnică, întrucît prezintă atît problemele teoretice ale fenomenelor de zgomot și vibrații ale mașinilor electrice cît și mijloacele de investigare a acestor fenomene și posibilitățile practice de reducere a nivelului de zgomot în cazul concret al mașinilor electrice și al mașinilor în general.

Lucrarea, cuprinzînd 18 capitole și 7 anexe, este structurată în trei părți: prima analizează modalitățile de generare și eliminare a fenomenelor de zgomot și vibrații (10 capitole); a doua studiază mijloacele de investigare experimentală a fenomenelor de vibrații și zgomot (6 capitole), iar în partea a treia (2 capitole) se prezintă diferite aplicații ale metodelor vibroacustice în probarea și verificarea mașinilor electrice. În continuare, lucrarea cuprinde un epilog cu considerații economice interesante și 7 anexe cu precizări privind standardele vibroacustice, și diferite metode și formule folosite, în text, cum ar fi transformata Fourier, filtre digitale, analiza digitală și conceptele de bază ale statisticii matematice.

Cartea menționează o bibliografie foarte bogată (168 de titluri), în diferite limbi de circulație internațională, majoritatea titlurilor fiind relativ recente.

În continuare se fac unele precizări privind conținutul capitolelor și unele aprecieri asupra rezultatelor și modului de tratare.

În primul capitol se prezintă termenii de bază folosiți în acustică, caracteristicile cîmpului sonor și expresiile matematice ale nivelurilor pentru puterea, intensitatea, presiunea sunetului etc.

Capitolul 2 analizează procesele de generare a zgomotului, cauzele vibrațiilor și zgomotelor la mașinile electrice, formulînd o clasificare a cauzelor pentru mașini electrice.

Cauzele zgomotului și vibrațiilor electromagnetice (cap. 3) sînt analizate, cu multă rigurozitate și cu exemple, pentru motoare asincrone, mașini sincrone, transformatori și mașini în curent direct.

În capitolul 4 se analizează vibrațiile mașinilor electrice rotative, subliniindu-se importanța frecvențelor proprii ale elementelor în mișcare de rotație. Unele formule aproximative privind rezonanța și unele indicații privind determinarea experimentală a frecvenței mecanice de rezonanță sînt deosebit de utile în practică.

Zgomotul și vibrațiile mașinilor electrice sînt analizate în capitolul 5 în funcție de structurile de susținere, iar în capitolul 6 în funcție de condițiile de funcționare ale mașinilor electrice rotative.

În continuare se prezintă considerații importante pentru reducerea zgomotului și vibrațiilor de origine electromagnetică (cap. 7), de origine mecanică (cap. 8), de origine aerodinamică (cap. 9), în cadrul cărora se propun diferite procedee de reducere interesante și eficiente, între care se includ și unele denumite secundare (cap. 10), cum ar fi elementele de amortizare de diferite tipuri. În partea doua, investigații experimentale a fenomenelor de zgomot și vibrații, se analizează sistemele și senzorii pentru măsurarea nivelurilor de zgomot și vibrații în general (cap. 11), măsurile de vibrații ale mașinilor electrice în condiții de funcționare (cap. 12), măsurările

zgomotului în condiții de exploatare (cap. 13), cu particularizări la multe tipuri de mașini, măsurarea fenomenelor de zgomot tranzitorii (cap. 14), tehnici directe de măsurare a semnalat vibroacustice tranzitorii (cap. 15) și măsurări indirecte a semnalelor vibroacustice tranzitorii (cap. 16).

În partea treia se prezintă unele testări practice de zgomot și vibrații (cap. 17) și unele aplicații ale măsurărilor de vibrații pentru stabilirea condițiilor tehnice privind mentenanța mașinilor electrice rotative (cap. 18). Testările practice se analizează pentru grupuri de mașini care încorporează mașini electrice, pentru motoare electrice în timpul funcționării și pentru motoare asincrone în regim tranzitoriu. Referitor la măsurările de vibrații este de remarcat preocuparea autorului de implementare a rezultatelor în condițiile tehnice de proiectare a mașinilor noi.

Se poate aprecia că lucrarea este valoroasă avînd un conținut bogat teoretic și practic, expus clar și concis, și un înalt nivel științific ; metodele experimentale sînt de mare actualitate și utilitate, atît pentru stabilirea cauzelor fenomenelor de zgomot și vibrații cît și pentru conceperea mijloacelor de combatere, cărora li se acordă o importanță deosebită.

Lucrarea este importantă și utilă pentru inginerii proiectanți de mașini electrice, pentru cercetători și pentru inginerii din exploatare, deoarece reducerea zgomotului și vibrațiilor contribuie la menținerea sănătății oamenilor, la creșterea productivității muncii și la mărirea duratei de funcționare a mașinilor în condiții de siguranță deplină.

N. Posea

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 49, nr. 3 **mai — iunie 1990**

SUMAR

AL. MARINESCU, V. ISTRATIE şi ŞT. STAICU, Aplicaţii ale cuaternionilor în dinamica zborului 229

V. F. POTERAŞU, N. MIHALACHE şi I. ASIMINOAEI, Aplicarea metodei elementelor de frontieră la calculul static al plăcilor plane subţiri 237

AL. D. STAN, Randamentul supapelor la pompele de adîncime 267

S. CHERGUI, Cercetări teoretico-experimentale privind determinarea pulsaţiilor proprii ale oscilaţiilor longitudinale ale garniturii de foraj 281

A. PAVEL, Studii privind evaluarea disponibilităţii de capacitate portantă a mantalei de rezistenţă a unui convertor de amoniac 297

RECENZII 339

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Articolele, originale și de înalt nivel științific, vor fi redactate într-un stil concis, evitîndu-se introducerile foarte lungi. Articolele vor fi dactilografiate la două rînduri, pe hîrtie albă de bună calitate, în două exemplare. Prima pagină trebuie să conțină titlul lucrării, numele autorului (autorilor) și locul de muncă precum și un rezumat de cel mult 150 cuvinte. Toate datele științifice și tehnice prezentate trebuie formulate în unități SI. Formulele trebuie dactilografiate sau scrise cu cerneală, clar și indicîndu-se caracterul literelor (aldine, italice etc.). Indicii inferiori și superiori trebuie indicați clar, pentru evitarea confuziilor. Ca semn zecimal se va utiliza virgula. Tabelele vor fi dactilografiate pe foi separte, cu indicarea titlurilor și cu numerotarea în cifre arabe. Desenele și diagramele trebuie executate în tuș, pe hîrtie de calc, la dimensiuni aproximativ duble față de acelea finale și cu litere scrise cu îngrijire și suficient de mari pentru a fi vizibile după reproducere. Referințele bibliografice vor fi menționate, pe cît posibil, în ordine alfabetică, la sfîrșitul articolului. În text vor fi indicate prin numărul din lista referințelor, în paranteze drepte.

Referințele din reviste vor conține inițiala și numele autorului (autorilor), titlul articolului (subliniat cu o linie), numele revistei (prescurtat conform uzanțelor internaționale), numărul volumului (subliniat dublu), numărul fasciculei și anul de apariție în paranteză, de exmplu :

1. S. AIZICOVICI, C. FETECĂU, Existence of Couette flows in second grade fluids Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., 31, 5 (1986).

Referirea la o carte se face inicînd inițial și numele autorului (autorilor), titlul cărții (subliniat cu o linie), editura, orașul, anul apariției și numerele paginilor, dacă referirea se face la o parte a cărții, de exemplu :

3. W. FLÜGGE, Tensor Analysis and Continuum Mecanics, Springer-Verlag, Berlin, Heldelberg, New York, 1972, p. 93—99.

Manuscrisele vor fi trimise la adresa : 79717 București 22, Calea Victoriei 125.

APLICAȚII ALE CUATERNIONILOR ÎN DINAMICA ZBORULUI

AL. MARINESCU
INCREST București

V. ISTRATIE, ȘT. STAICU
Institutul Politehnic București

În lucrare se deduc cu ajutorul cuaternionilor ecuațiile de orientare ale unui aparat de zbor. Relațiile obținute elimină unele nedeterminări care apar atunci cînd ecuațiile sînt exprimate cu ajutorul unghiurilor lui Euler.

1. NOTAȚII

$Oxyz$ — sistem de axe legat de aparatul de zbor cu originea în centrul de greutate 0 (fig. 1)

$Ox_0y_0z_0$ — sistem de axe cu originea în O, avînd axele paralele cu axele unui referențial inerțial

φ, θ, ψ — unghiurile lui Euler

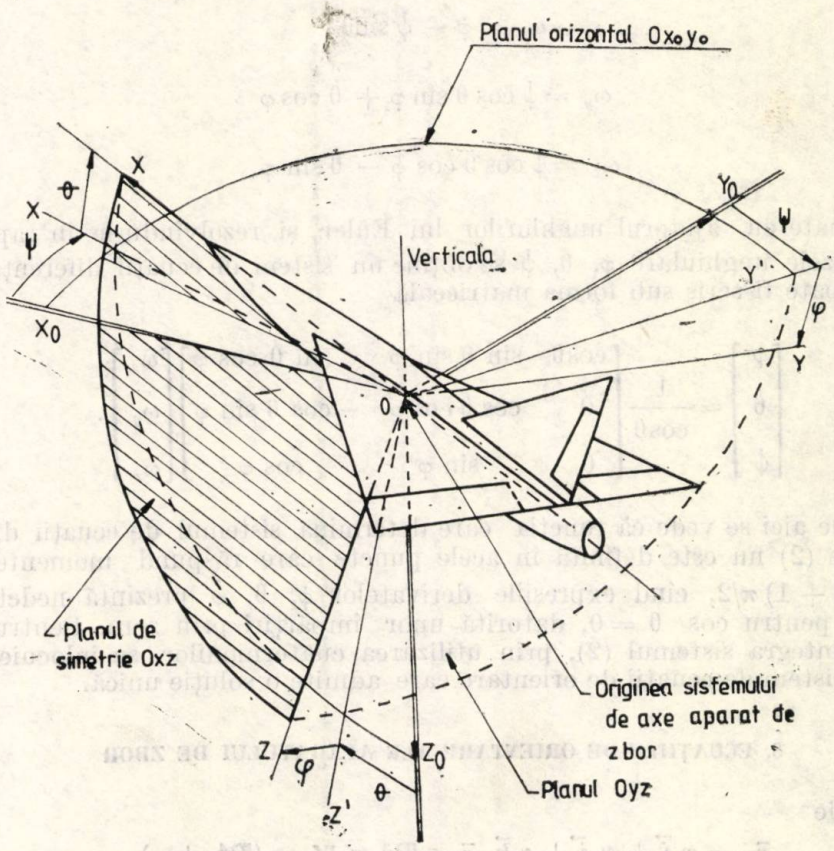


Fig. 1

ST. CERC. MEC APL., TOM 49, NR. 3, 1990, P. 229—235

$\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$ — derivatele în raport cu timpul pentru unghiurile lui Euler
ω_x, ω_y, ω_z — componentele vitezei unghiulare a aparatului de zbor după axele Ox, Oy, Oz.

2. INTRODUCERE

În cadrul integrării ecuaţiilor de mişcare ale dinamicii unui aparat de zbor, determinarea unghiurilor de poziţie apare ca o importantă componentă de calcul.

Precizarea orientării aparatului de zbor cu ajutorul unghiurilor lui Euler conduce, pentru ecuaţiile mişcării laterale, la împărţiri prin zero care pot fi evitate dacă se utilizează ecuaţiile de orientare în cuaternioni. Într-adevăr, exprimarea rotaţiilor cu ajutorul cuaternionilor, sub forma unor funcţii raţionale omogene de gradul doi, este mai simplă decît cu ajutorul unghiurilor lui Euler.

Pornind de la ecuaţiile de orientare ale aparatului de zbor

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\varphi} - \dot{\psi}\sin\theta \\ \omega_y &= \dot{\psi}\cos\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi \\ \omega_z &= \dot{\psi}\cos\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi \end{aligned} \tag{1}$$

exprimate cu ajutorul unghiurilor lui Euler, şi rezolvîndu-le în raport cu vitezele unghiulare $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$ se obţine un sistem de ecuaţii diferenţiale care poate fi scris sub forma matriceală

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \frac{1}{\cos\theta} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi \\ 0 & \cos\theta\cos\varphi & -\cos\theta\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}. \tag{2}$$

De aici se vede că funcţia care determină sistemul de ecuaţii diferenţiale (2) nu este definită în acele puncte care răspund momentelor $t = (2k+1)\,\pi/2$, cînd expresiile derivatelor $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$ prezintă nedeterminări pentru $\cos\theta = 0$, datorită unor împărţiri prin zero. Pentru a putea integra sistemul (2), prin utilizarea cuaternionilor, se înlocuieşte acest sistem de ecuaţii de orientare care admite o soluţie unică.

3. ECUAŢIILE DE ORIENTARE ALE APARATULUI DE ZBOR

Fie

$$\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k},\ \vec{r}_0 \in \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{K} = (\mathbb{R}^4, +, .) \tag{3}$$

un vector şi

$$q = q_0 + q_1\vec{i} + q_2\vec{j} + q_3\vec{k},\ q \in \mathbb{K}, \tag{4}$$

cuaternionul asociat. Se demonstrează că o rotație a vectorului $\vec{r}_0$ în jurul unei axe având versorul $\vec{u}$ al părții vectoriale, se exprimă cu ajutorul cuaternionului q astfel

$$\vec{r} = q\vec{r}_0 q^{-1},$$

unde

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \vec{r} \in \mathbb{R}^3. \tag{6}$$

Rotația inversă se deduce ușor sub forma

$$\vec{r}_0 = q^{-1}\vec{r}q.$$

Dacă se dezvoltă expresia (7) în funcție de coordonatele vectorului rotit și al cuaternionului cu care se face rotația, se obține expresia matriceală

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\|q\|} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \tag{8}$$

unde

$$\|q\| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \tag{9}$$

este norma cuaternionului, iar

$$\begin{aligned}
a_{11} &= q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 \\
a_{12} &= 2(q_1q_2 + q_0q_3) \\
a_{13} &= 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\
a_{21} &= 2(q_1q_2 - q_0q_3) \\
a_{22} &= q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 \\
a_{23} &= 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\
a_{31} &= 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\
a_{32} &= 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\
a_{33} &= q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2.
\end{aligned} \tag{10}$$

În descrierea rotațiilor se folosește în general forma trigonometrică a cuaternionului

$$q = \cos\frac{\alpha}{2} + \vec{u}\sin\frac{\alpha}{2}, \quad \|q\| = 1, \tag{11}$$

pentru o rotaţie de unghi α în jurul axei de versor $\vec{u}$ care este exprimat prin relaţia

$$\vec{u} = \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\cos\psi\vec{j} + \sin\varphi\sin\psi\vec{k}, \tag{12}$$

în funcţie de unghiurile φ şi ψ.

Pentru descrierea rotaţiilor se foloseşte adesea descompunerea rotaţiilor în rotaţii elementare, considerînd un sistem de axe $Ox_0x_1x_2x_3$. Înlocuind în (11) pe rînd $\vec{u}$ prin $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ iar α prin φ, θ, ψ se obţin următoarele rotaţii elementare :

— o rotaţie A de unghi φ în planul Ox_0x_1
— o rotaţie B de unghi θ în planul Ox_0x_2
— o rotaţie C de unghi ψ în planul Ox_0x_3,

exprimate cu ajutorul cuaternionilor elementari a, b, c astfel

$$\begin{aligned} a &= \cos\frac{\varphi}{2} + \vec{i}\sin\frac{\varphi}{2} \\ b &= \cos\frac{\theta}{2} + \vec{j}\sin\frac{\theta}{2} \\ c &= \cos\frac{\psi}{2} + \vec{k}\sin\frac{\psi}{2}. \end{aligned} \tag{13}$$

Formele conjugate ale cuternionilor (13) vor fi

$$\begin{aligned} a^{-1} &= \cos\frac{\varphi}{2} - \vec{i}\sin\frac{\varphi}{2} \\ b^{-1} &= \cos\frac{\theta}{2} - \vec{j}\sin\frac{\theta}{2} \\ c^{-1} &= \cos\frac{\psi}{2} - \vec{k}\sin\frac{\psi}{2}, \end{aligned} \tag{14}$$

unde

$$\|a\| = \|b\| = \|c\| = \|a^{-1}\| = \|b^{-1}\| = \|c^{-1}\| = 1. \tag{15}$$

Relaţiile (14) reprezintă deplasările elementare ale rotaţiei complete a sistemului $Oxyz$ faţă de sistemul $Ox_1x_2x_3$. Cu aceste relaţii se determină ; cuaternionul

$$q = (c\,b\,a)^{-1} = a^{-1}b^{-1}c^{-1} = q_0 + q_1\vec{i} + q_2\vec{j} + q_3\vec{k},\ \|q\| = 1, \tag{16}$$

unde

$$\begin{aligned} q_0 &= \cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} \\ q_1 &= \cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} \end{aligned} \tag{17}$$

$$q_2 = -\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2}$$

$$q_3 = -\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2}.$$

Fie $Ox_0y_0z_0$ sistemul cartezian fix, iar $Oxyz$ un alt sistem de axe, solidar legat cu rigidul, aflat în mișcare față de reperul fix (fig. 1). Presupunînd că originile celor două referențiale coincid, poziția unui punct oarecare al rigidului este dată în raport cu sistemul mobil prin vectorul de poziție $\vec{r}$ sau prin coordonatele constante x, y, z ale punctului în raport cu $Oxyz$. Poziția aceluiași punct față de sistemul fix se determină tot cu ajutorul vectorului $\vec{r}$, care are acum alte coordonate.

Rotația sistemului mobil $Oxyz$ față de sistemul fix $Ox_0y_0z_0$ se obține cu ajutorul relației

$$\vec{r}_0 = q^{-1}\vec{r}q, \tag{18}$$

unde cuaternionul q are expresia (16).

Derivînd această relație în raport cu timpul obținem

$$\dot{\vec{r}}_0 = -q^{-1}\dot{q}q^{-1}\vec{r}q + q^{-1}\vec{r}\dot{q}. \tag{19}$$

Ținînd seama că $\dot{q}\,q^{-1}$ este vector, relația (19) poate fi scrisă sub forma echivalentă

$$\dot{\vec{r}}_0 = q^{-1}(-2\dot{q}q^{-1}\times\vec{r})\,q. \tag{20}$$

Expresia

$$\vec{\omega} = -2\dot{q}q^{-1} \tag{21}$$

care apare în (20), reprezintă viteza unghiulară în rotația sistemului mobil $Oxyz$ față de sistemul fix $Ox_0y_0z_0$, exprimată prin componente în sistemul mobil, în funcție de cuaternionul q și de derivata acestuia $\dot{q}$. Relația (21) poate fi pusă sub forma

$$\dot{q} = -\frac{1}{2}\vec{\omega}q, \tag{22}$$

care constituie ecuația diferențială a rotației sistemului mobil $Oxyz$.

Dacă se notează cu

$$\vec{\omega} = \omega_x\vec{i} + \omega_y\vec{j} + \omega_z\vec{k}, \tag{23}$$

vectorul vitezei unghiulare și cu ω_x, ω_y, ω_z componentele sale pe Ox, Oy, Oz, relația (22) conduce la un sistem de ecuații diferențiale scris sub forma matriceală, care precizează orientarea aparatului de zbor în spațiu:

$$\begin{bmatrix}\dot{q}_0\\ \dot{q}_1\\ \dot{q}_2\\ \dot{q}_3\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & \omega_x & \omega_y & \omega_z\\ -\omega_x & 0 & -\omega_z & \omega_y\\ -\omega_y & \omega_z & 0 & -\omega_x\\ -\omega_z & -\omega_y & \omega_x & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_0\\ q_1\\ q_2\\ q_3\end{bmatrix}, \tag{24}$$

unde componentele q_0, q_1, q_2, q_3 ale cuaternionului sînt date de (17). Aceste componente sînt funcţii derivabile de timpul t, adică

$$q_i = q_i(t), \quad (i = 0,1,2,3),$$

iar sistemul de ecuaţii diferenţiale (24) admite o soluţie unică.

Prin integrarea sistemului (24) rezultă componentele q_0, q_1, q_2, q_3 ale cuaternionului q, necesare în calculul componentelor matricei pătratice din (8). Acestea au următoarele expresii

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \cos\theta \cos\psi \\
a_{12} &= \sin\varphi \sin\theta \cos\psi - \cos\varphi \sin\psi \\
a_{13} &= \cos\varphi \sin\theta \cos\psi + \sin\varphi \sin\psi \\
a_{21} &= \cos\theta \cos\psi \\
a_{22} &= \sin\varphi \sin\theta \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi \\
a_{23} &= \cos\varphi \sin\theta \sin\psi - \sin\varphi \cos\psi \\
a_{31} &= -\sin\theta \\
a_{32} &= \sin\varphi \cos\theta \\
a_{33} &= \cos\varphi \cos\theta,
\end{aligned} \tag{25}$$

din care putem calcula unghiurile φ, θ, ψ. De exemplu din (25) rezultă $\sin\theta = -a_{31}$ şi apoi $\cos\theta = \sqrt{1 - a_{31}^2}$.

APLICAŢII

a) Pentru $|\theta| < 1{,}35$ (radiani), rezultă

$$\sin\varphi = \frac{a_{32}}{\cos\theta}, \quad \cos\varphi = \frac{a_{33}}{\cos\theta}, \quad \sin\psi = \frac{a_{21}}{\cos\theta}, \quad \cos\psi = \frac{a_{11}}{\cos\theta} \tag{26}$$

şi apoi

$$\begin{aligned}
\varphi &= \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right) \\
\psi &= \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\sin\psi}{\cos\psi}\right) \\
\theta &= \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right).
\end{aligned} \tag{27}$$

b) Pentru $|\theta| > 1{,}79$ (rd.) considerăm

$$\cos\theta = -\cos\theta, \tag{28}$$

iar unghiurile φ, θ, ψ rezultă din (26) şi (27).

c) Pentru $|\theta| < 1{,}54$ (rd.), unde $|\theta|$ nu satisface cazul a), rezultă

$$\varphi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{a_{33}}{a_{32}}$$

$$\psi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{a_{21}}{a_{11}} \tag{29}$$

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right),$$

unde $\cos \theta$ este

$$\cos \theta = \sqrt{1 - a_{31}^2}.$$

d) Pentru $|\theta| > 1{,}60$, unde θ nu satisface cazul b), considerăm $\cos \theta = -\cos \theta$

$$a_{11} = -a_{11},\ a_{33} = -a_{33},\ a_{21} = -a_{21},\ a_{32} = -a_{32}, \tag{30}$$

iar unghiurile φ, θ și ψ rezultă din (29).

e) Pentru $|\theta|$ care nu satisface condițiile a), b), c) și d) considerăm egalitatea

$$\lambda = \cos \theta = a_{32} \sin \varphi + a_{33} \cos \varphi, \tag{31}$$

iar dacă $\lambda \geqslant 0$ rezultă că unghiurile φ, θ, și ψ sînt date de (29).

Cazul $\lambda < 0$ corespunde cazului d).

Primit în redacție la 14 aprilie 1989

BIBLIOGRAFIE

1. B. ETKIN, *Dynamics of flight (Stability and Control)*. John Wiley and Sons., Inc., New York, London, Sydney, 1967.
2. AL. MARINESCU, *Probleme optimale în dinamica zborului spațial*. Edit. Academiei, București, 1982.
3. V. VÎLCOVICI, ȘT. BĂLAN, R. VOINEA, *Mecanica teoretică*. Edit. tehnică, București, 1968.
4. ȘT. STAICU, *Aplicații ale calculului matriceal în mecanica solidelor*. Edit. Academiei, București, 1986.
5. C. IACOB, *Mecanica teoretică*. Edit. didactică și pedagogică, București, 1971.
6. P. P. TEODORESCU, *Mecanica teoretică*. Centrul de multiplicare al Universității din București, 1972.
7. M. M. NIȚĂ, *Teoria zborului spațial*. Edit. Academiei, București, 1973.
8. P. POPESCU, N. URSU, *Asupra unor aplicații ale calculului cuaternionic în cimematica solidului rigid*. Buletinul științific al Institutului Politehnic Cluj-Napoca, **12** (1969).

c) Pentru $|\theta| < 1{,}54$ (rd.), unde $|\theta|$ un satisface cazul a), rezulta

$$\begin{aligned} \varphi &= \operatorname{tg}^{-1}\frac{a_{23}}{a_{22}} \\ \psi &= \operatorname{tg}^{-1}\frac{a_{21}}{a_{11}} \\ \theta &= \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right), \end{aligned} \tag{29}$$

unde $\cos\theta$ este

$$\cos\theta = \sqrt{1 - a_{31}^2}.$$

d) Pentru $|\theta| > 1{,}60$, unde θ nu satisface cazul b), consideram $\cos\theta = -\cos\theta$

$$a_{11} = -a_{11},\ a_{12} = -a_{23},\ a_{21} = -a_{21},\ a_{22} = -a_{22},\ a_{31} = -a_{31} \tag{30}$$

iar unghiurile φ, θ şi ψ rezultă din (29).

e) Pentru $|\theta|$ care nu satisface condiţiile a), b), c) şi d) consideram ecuaţiile

$$\lambda = \cos\theta = -a_{31}\sin\varphi + a_{33}\cos\varphi, \tag{31}$$

iar dacă $\lambda \geq 0$ rezultă că unghiurile φ, θ, şi ψ sînt date de (29).
Cazul $\lambda < 0$ corespunde cazului d).

Primit în redacţie la 18 aprilie 1957

BIBLIOGRAFIE

1. R. ETKIN, Dynamics of flight. Stability and Control, John Wiley and Sons, Inc., New York, London, Sydney, 1959.
2. M. MĂRĂŞESCU, Probleme aplicate de dinamica sbornim aplicat. Edit. Academiei, Bucureşti, 1982.
3. V. VLĂDOVICI, ŞT. BĂLĂNĂ, H. VOINEA, Mecanica teoretică. Edit. tehnică, Bucureşti, 1958.
4. ŞT. STĂICU, Aplicaţii ale calculului matricial în mecanica solidelor. Edit. Academiei Bucureşti, 1958.
5. C. IACOB, Mecanica teoretică. Edit. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1971.
6. P. P. TEODORESCU, «Mecanica forţelor. Curs de multiplicare» al Universităţii din Bucureşti, 1972.
7. V. M. NIŢĂ, Teoria sbornim aplicat. Edit. Academiei, Bucureşti, 1973.
8. P. POPESCU, M. UREŞU, «Asupra unor aplicaţii ale calculului cuaternionic în cinematica solidului rigid. Buletinul ştiinţific al Institutului Politehnic (Iaşi)-Seria», 12 (1966).

APLICAREA METODEI ELEMENTELOR DE FRONTIERĂ LA CALCULUL STATIC AL PLĂCILOR PLANE SUBȚIRI

V. F. POTERAȘU
N. MIHALACHE
Institutul Politehnic, Iași

I. ASIMINOAEI
Centrul de Calcul al Universității „Al. I. Cuza", Iași

Lucrarea aplică metoda elementelor de frontieră la studiul plăcilor plane subțiri acționate static. Se prezintă detaliat formularea ecuațiilor integrale pe frontieră cu ajutorul relațiilor lui Green, soluțiile fundamentale, discretizarea în elemente de frontieră a conturului, salturile din punctele singulare și modul de calcul al principalelor caracteristici : săgeata, momente încovoietoare și de torsiune, forțe tăietoare. Pe baza relațiilor demonstrate se arată modul de construcție a unui program de calcul al plăcilor plane subțiri cu metoda elementelor de frontieră. Exemplele numerice ilustrează aplicarea metodei prezentate și demonstrează avantajele ei în raport cu metodele de tip domeniu cum ar fi metoda elementelor finite, în ce privește timpul de calcul, datele de intrare și rezultate.

1. INTRODUCERE

Cele mai multe aplicații ale metodei elementelor de frontieră în problemele de elasticitate se referă la stările plane de tensiuni și deformații. Puține lucrări se ocupă cu studiul plăcilor plane subțiri.

Considerînd avantajele metodei elementelor de frontieră asupra metodelor tip domeniu și amintind dificultățile metodei elementelor finite : continuitatea C^1, elemente neconforme, patch test, acțiuni interne discontinui, rezultă că trebuie intensificate studiile cu această metodă atît a plăcilor plane subțiri cît și a altor elemente componente ale structurilor din construcții, organe de mașini, aviație, nave, vehicule etc.

M. A. Jaswon, M. Maiti, G. T. Symm [1] au propus introducerea ecuațiilor integrale pentru studiul ecuației biarmonice și aplicarea lor în cazul plăcilor. În această lucrare, momentele sînt exprimate prin derivatele a două funcții armonice, la rîndul lor exprimate ca integralele anumitor distribuții sursă pe conturul plăcii. E. B. Hansen [2] a determinat deplasările și momentele încovoietoare în plăci elastice cu goluri cu ajutorul unei ecuații integrale obținute prin aplicarea teoremei de reciprocitate a ecuației biarmonice. G. P. Bézine, D. A. Gamby [3], G. P. Bézine [4,13] au utilizat metoda directă a elementelor de frontieră pentru studiul cazului general al plăcilor acționate static avînd condiții de contur arbitrare. În punctele singulare, însă, autorii nu au introdus puncte de colocație.

G. P. Bézine [5] a propus înlocuirea unei ecuații integrale printr-o altă ecuație folosind principiul similitudinii în scopul micșorării gradului de complexitate și evitării utilizării unor integranzi singulari.

M. Stern [6] a prezentat o descriere completă a ecuațiilor de bază pentru plăci cu contur poligonal. B. C. Wu, N. J. Altiero [7] au utilizat metoda indirectă a elementelor de frontieră, introducînd o placă circulară încastrată pe contur, avînd soluția cunoscută, drept un contur auxiliar.

Van der Weeen [8] a folosit o formulare a elementelor de frontieră pentru plăci bazate pe teoria lui Reissner. F. Paris, S. De Leon [9] au studiat plăci plane subţiri simplu rezemate cu metoda elementelor de frontieră folosind descompunerea în două ecuaţii armonice datorită condiţiilor de contur particulare. F. Hartmann, R. Zotemantel [10] folosesc metoda directă a elementelor de frontieră pentru calculul static al plăcilor utilizînd identitatea Rayleigh-Green şi interpolarea Hermite pentru deplasări. T. Katayama, T. Sekiya, H. Tai [11] studiază plăci perforate folosind analogia între problemele de încovoiere şi întindere, Chen Xiangfu, Qin Rong [12] utilizează funcţiile spline în calculul plăcilor cu metoda elementelor de frontieră.

În lucrare se prezintă rezolvarea generală a plăcilor plane subţiri acţionate static cu metoda elementelor de frontieră, se arată modul de organizare a unui program cu calcul şi se dau exemple practice.

2. FORMULAREA GENERALĂ

În cazul cel mai general, o placă plană subţire se consideră rezolvată dacă se cunosc eforturile secţionale în orice punct al domeniului.

Dacă se cunoaşte expresia algebrică a suprafeţei mediane deformate, prin derivări ale acesteia în mod corespunzător, se obţin relaţiile eforturilor secţionale, de tipul

$$M_x(w) = -D(w_{,xx} + \nu w_{,yy}),$$

$$M_y(w) = -D(\nu w_{,xx} + w_{,yy});\ M_{xy}(w) = -D(1-\nu)\, w_{,xy} \tag{1}$$

$$T_x(w) = -D(w_{,xxx} + w_{,xyy});\ T_y(w) = -D(w_{,xxy} + w_{,yyy})$$

Expresia algebrică a suprafeţei mediane deformate se obţine din ecuaţia diferenţială a plăcilor dată de Lagrange—Sophie Germaine sub forma

$$\Delta\Delta w(x,y) = \frac{p(x,y)}{D}. \tag{2}$$

Se propune obţinerea soluţiei ecuaţiei (2) utilizîndu-se metoda elementelor frontieră, plecînd de la relaţia lui Green [13].

Dacă există două funcţii v şi w continue şi diferenţiabile de patru ori de domeniul Ω şi de trei ori pe conturul S, conform relaţiei a doua a lui Green se poate scrie

$$\int_{\Omega} (v\Delta w - w\Delta v)\, d\Omega = \int_{S} (vw_{,n} - wv_{,n})\, dS \tag{3}$$

Dacă înlocuim pe w cu Δw se obţine identitatea

$$\int_{\Omega} (v\Delta\Delta w - \Delta w\Delta v)\, d\Omega = \int_{S} (v\Delta w_{,n} - \Delta w v_{,n})\, dS \tag{4}$$

Fie expresia biliniară simetrică între v și w

$$p(v, w) = (1 - \nu)\,(v_{,xx}\,w_{,yy} - 2v_{,xy}\,w_{,xy} + v_{,yy}\,w_{,xx}) \tag{5}$$

care poate fi pusă sub forma

$$p(v, w) = (1 - \nu)\left[\frac{\partial}{\partial x}(v_{,x}\,w_{,yy} - v_{,y}\,w_{,xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(v_{,y}\,w_{,xx} - v_{,x}\,w_{,xy})\right] \tag{6}$$

După utilizarea relației lui Green

$$\int_{\Omega} (Q_{,x} - P_{,y})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{S} (P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y) \tag{7}$$

și a relațiilor de transformare dintre coordonatele carteziene și curbilinii

$$\mathrm{d}x = -\sin\alpha\,\mathrm{d}s, \quad \mathrm{d}y = \cos\alpha\,\mathrm{d}s, \quad \sin\alpha = l, \quad \cos\alpha = m$$

în care α este unghiul polar al normalei exterioare și tangenta la conturul S se poate scrie

$$\int_{\Omega} p(v, w)\,\mathrm{d}\Omega = \int_{S} (1 - \nu)\,[(v_{,x}\,w_{,yy} - v_{,y}\,w_{,xy})\,m + (v_{,y}\,w_{,xx} - v_{,x}\,w_{,xy})\,l]\,\mathrm{d}S \tag{8}$$

Ținînd cont că

$$\frac{\partial}{\partial n} = m\frac{\partial}{\partial x} + l\frac{\partial}{\partial y}$$

și

$$\frac{\partial^2}{\partial n^2} = m^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2lm\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} + l^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

se obține

$$\int_{\Omega} p(v, w)\,\mathrm{d}\Omega = \int_{S} (1 - \nu)\,\{v_{,n}\,(w_{,yy}\,m^2 - 2w_{,xy}\,lm + w_{,xx}\,l^2) +$$

$$+ v_{,s}\,[(w_{,xx} - w_{,yy})\,lm - w_{,xy}\,(m^2 - l^2)]\}\,\mathrm{d}S \tag{9}$$

unde $v_{,n}$ este derivata funcției v în raport cu normala, iar $v_{,s}$ este derivata funcției v în raport cu abscisa curbilinie.

Dacă se utilizează relația Rayleigh-Green, folosind (4)...(9) rezultă

$$\int_\Omega [v\Delta\Delta w - \Delta v\Delta w + p(v, w)]\,\mathrm{d}\Omega = \int_S \{v_{,n}[-\Delta w + (1-\nu)(w_{,yy}\,m^2 -$$

$$- 2w_{,xy}\,lm + w_{,xx}\,l^2) + v_{,s}(1-\nu)[(w_{,xx} - w_{,yy})\,lm -$$

$$- w_{,xy}(m^2 - l^2)] + v(\Delta w)_{,n_j}\}\,\mathrm{d}S \tag{10}$$

Se observă că prima paranteză pătrată din integrala pe suprafața S reprezintă momentul încovoietor $M_n(w)/D$ iar cea de a doua paranteză pătrată de sub aceiași integrală reprezintă momentul de torsiune $M_{nt}(w)/D$, astfel încît relația (10) poate fi scrisă

$$\int_\Omega [v\Delta\Delta w - \Delta v\Delta w + p(v, w)]\,\mathrm{d}\Omega = \frac{1}{D}\int_S [v_{,n}\,M_n(w) +$$

$$+ v_{,s}\,M_{nt}(w) + Dv(\Delta w)_{,n}]\,\mathrm{d}S \tag{11}$$

Efectuînd o permutare între variabilele v și w în (11) se obține o relație similară

$$\int_\Omega [w\Delta\Delta v - \Delta w\Delta v + p(w, v)]\,\mathrm{d}\Omega = \frac{1}{D}\int_S [w_{,n}\,M_n(v) +$$

$$+ w_{,s}\,M_{nt}(v) + Dw(\Delta v)_{,n}]\,\mathrm{d}S \tag{12}$$

Știind că $p(v, w) = p(w, v)$ și scăzînd (12) din (11) se ajunge la

$$\int_\Omega [v\Delta\Delta w - w\Delta\Delta v)]\,\mathrm{d}\Omega = \frac{1}{D}\int_S [v_{,n}\,M_n(w) + v_{,s}\,M_{nt}(w) +$$

$$+ Dv(\Delta w)_{,n} - w_{,n}\,M_n(v) - w_{,s}\,M_{nt}(v) - Dw(\Delta v)_{,n}]\,\mathrm{d}S \tag{13}$$

Relația Rayleigh—Green (13) evidențiază condițiile la limită de tip Poisson [22]. Integrînd odată prin părți termenii $v_{,s}$ și $w_{,s}$ din expresia (13) se obțin condițiile la limită de tip Kirchhoff

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}[M_{nt}(w)] = [vM_{nt}(w)]_{,s} - v[M_{nt}(w)]_{,s}, \tag{14}$$

Dacă produsul $vM_{nt}(w)$ este continuu în raport cu variabila s atunci

$$\int_S [vM_{nt}(w)]_{,s}\,\mathrm{d}S = 0 \tag{15}$$

În cazul cînd pe conturul domeniului apar N puncte unghiulare A_i (cazul colțurilor unei plăci rectangulare) în aceste puncte A_i de abscise curbilinii s_i apar salturi exprimate prin

$$\int_S [vM_{nt}(w)]_{,s}\,\mathrm{d}S = -\sum_{i=1}^{N} [vM_{nt}(w)]_{A_i} \tag{16}$$

sau

$$[\cdot]_{A_i} = (\cdot)_{S^+} - (\cdot)_{S^-} \tag{16a}$$

de unde

$$\int_S v_{,s}\, M_{nt}(w)\,\mathrm{d}S = -\sum_{i=1}^{N} [vM_{nt}(w)]_{A_i} - \int_S v[M_{nt}(w)]_{,s}\,\mathrm{d}S \tag{17}$$

Schimbînd pe v cu w rezultă

$$\int_S w_{,s}\, M_{nt}(v)\,\mathrm{d}S = -\sum_{i=1}^{N} [wM_{nt}(v)]_{A_i} - \int_S w[M_{nt}(v)]_{,s}\,\mathrm{d}S \tag{18}$$

Introducînd (17) în (18) și în (13) se obține identitatea Rayleigh—Green generalizată la un contur cu N puncte unghiulare

$$\int_\Omega (v\Delta\Delta w - w\Delta\Delta v)\,\mathrm{d}\Omega = \frac{1}{D}\int_S [v_{,n}\, M_n(w) - v\{(M_{nt}(w))_{,s} - D(\Delta w)_{,n}\} -$$

$$- w_{,n}\, M_n(v) + w\{(M_{nt}(v))_{,s} - D(\Delta v)_{,n}\}]\,\mathrm{d}S -$$

$$- \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{D}[vM_{nt}(w) - wM_{nt}(v)]_{A_i}. \tag{19}$$

Sub integrala din membrul drept al expresiei (19) se regăsesc forțele generalizate ale lui Kirchhoff $R_n(w)$, $R_n(v)$ astfel încît în rezolvarea plăcilor plane cu metoda elementelor de frontieră, expresia teoremei de reciprocitate devine [14]

$$\int_\Omega (v\Delta\Delta w - w\Delta\Delta v)\,\mathrm{d}\Omega = \frac{1}{D}\int_S [-vR_n(w) + v_{,n}\, M_n(w) -$$

$$- M_n(v)\, w_{,n} + R_n(v)\, w]\,\mathrm{d}S - \frac{1}{D}\sum_{i=1}^{N} [vM_{nt}(w) - M_{nt}(v)w]_{A_i} \tag{20}$$

Și în relația (20) funcțiile v și w trebuie să fie continue și diferențiabile pînă la ordinul patru inclusiv, pe domeniul Ω și de trei ori pe frontiera S a domeniului.

Dacă se consideră o soluție pentru funcția v atunci $\Delta\Delta v = 0$ astfel încît $\int_\Omega w\Delta\Delta v \, d\Omega = 0$ rămîne să se determine ecuația algebrică a suprafeței mediane deformate $w(x, y)$ care inițial este necunoscută pe domeniul Ω. Pentru a preciza soluția funcției v se consideră punctul $P(x_p, y_p)$ și un punct curent $Q(x, y) \in \Omega$ astfel încît vectorul de poziție, figura 4.

$$r = \|\overrightarrow{PQ}\| = [(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2]^{1/2} \tag{21}$$

Soluția funcției v trebuie să satisfacă ecuația $\Delta\Delta v = 0$ în orice punct al domeniului Ω cu excepția punctului P iar derivatele sale de ordin superior sau egal cu doi admit în punctul P o singularitate.

O astfel de soluție este denumită soluție elementară sau fundamentală.

Știind că expresia bilaplaceanului în coordonate polare, aplicat funcției v este

$$v_{,r^4} + \frac{2}{r} v_{,r^3} - \frac{1}{r^2} v_{,r^2} + \frac{1}{r^3} v_{,r} = 0 \tag{22}$$

efectuînd o schimbare de variabilă $r = e^{\eta}$ se obține ecuația caracteristică în η

$$\eta^4 - 4\eta^3 + 4\eta^2 = 0 \tag{23}$$

care are două rădăcini duble $\eta = 0$ și $\eta = 2$, rezultînd următoarele soluții [20]

$$v_1 = 1, \; v_2 = \log r, \; v_3 = r^2, \; v_4 = r^2 \log r. \tag{24}$$

Dintre cele patru soluții, doar v_4 admite singularitate pentru derivata de ordinul doi în $r = 0$. Se va lua soluția fundamentală pentru funcția v astfel încît

$$v(P, Q) = \frac{1}{8\pi} r^2 \log r \text{ cu } r = \|\overrightarrow{PQ}\| \tag{25}$$

fracția $\frac{1}{8\pi}$ fiind un factor de normalizare. Derivatele succesive pentru soluția fundamentală (25) sînt

$$v_{,r} = \frac{1}{8\pi}(2r \log r + r), \quad v_{,r^3} = \frac{1}{4\pi r}$$

$$v_{,r^2} = \frac{1}{8\pi}(2 \log r + 3), \quad v_{,r^4} = -\frac{1}{4\pi r^2} \tag{26}$$

Se poate arăta că

$$\Delta v = \frac{1}{2\pi}(\log r + 1) \text{ și } \Delta\Delta v = 0 \text{ pentru } r \neq 0 \tag{27}$$

3. EXPRIMAREA SUB FORMĂ INTEGRALĂ A SĂGEȚII ÎN INTERIORUL DOMENIULUI

Fie $w(Q)$ soluția ecuației diferențiale $\Delta\Delta w = \frac{p}{D}$ și $v(P, Q)$ soluția fundamentală a ecuației omogene $\Delta\Delta w = 0$. Funcția w admite derivate, continui pînă la ordinul patru inclusiv, pe domeniul Ω și cel puțin pînă la ordinul trei pe conturul S în timp ce funcția v admite aceste condiții în punctul Q pentru $r \neq 0$. Se va aplica teorema de reciprocitate (20) celor două funcții v și w diferențiabile pe domeniul $[\Omega - \{P\}]$.

Se consideră un disc Ω' de centru P interior domeniulu Ω de rază ε și contur C, figura 1. Funcția v este suficient de regulată pe domeniul $\Omega - \Omega'$, de contur $S + C$, astfel încît se poate aplica teorema de reciprocitate (20) de unde rezultă

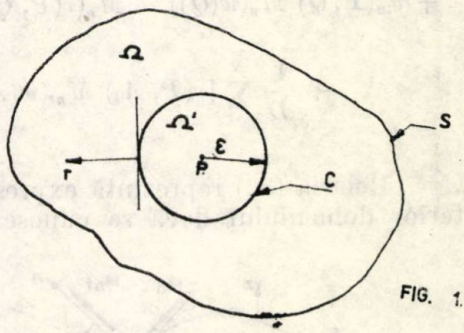


FIG. 1.

Fi . 1

$$\int_{\Omega-\Omega'} v(p, Q)\,\frac{p(Q)}{D}\,\mathrm{d}\Omega_Q = \frac{1}{D}\int_{S+C}[-v(P, Q)\,R_n(w(Q)) +$$

$$+ v_{,n}(PQ)\,M_n(w(Q)) - M_n(v(P, Q))\,w_{,n}(Q) + R_n(v(P, Q))\,w(Q)]\,\mathrm{d}S_Q -$$

$$-\frac{1}{D}\sum_{i=1}^{N}[v(P, A_i)\,M_{nt}(w(A_i)) - M_{nt}(v(P, A_i))\,w(A_i)]_{A_i} \tag{28}$$

Dacă $\varepsilon \to 0$ atunci integralele din relația (28) devin [13]

$$\int_{\Omega} v(P, Q)\,p(Q)\,\mathrm{d}\Omega_Q = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega-\Omega'} v(P, Q)\,p(Q)\,\mathrm{d}\Omega_Q \tag{29}$$

$$\int_S [-v(P, Q)\,R_n(w(Q)) + v_{,n}(P, Q)\,M_n(w(Q)) - M_n(v(P, Q))\,w_{,n}(Q)]\,\mathrm{d}S_Q =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S+C}[-v(P,Q)\,R_n(w(Q)) + v_{,n}(P, Q)\,M_n(w(Q)) - M_n(v(P, Q))\,w_{,n}(Q)]\,\mathrm{d}S_Q \tag{30}$$

$$\int_S R_n(v(P, Q))\, w(Q)\, \mathrm{d}S_Q = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S+C} R_n(v(P, Q))\, w(Q)\, \mathrm{d}S_Q \qquad (31)$$

în care indicele n reprezintă normala la conturul C. Din cele arătate mai sus se poate obține ecuația integrală a săgeții $w(P)$ într-un punct interior domeniului Ω sub forma

$$w(P) = \int_\Omega v(P, Q)\, \frac{p(Q)}{D}\, \mathrm{d}\Omega_Q - \frac{1}{D} \int_S [-v(P, Q)\, R_n(w(Q)) +$$

$$+ v_{,n}(P, Q)\, M_n(w(Q)) - M_n(v(P, Q))\, w_{,n}(Q) + R_n(v(P, Q))\, w(Q)]\, \mathrm{d}S_Q +$$

$$+ \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{N} [v(P, A_i)\, M_{nt}(w(A_i)) - M_{nt}(v(P, A_i))\, w(A_i)]_{A_i} \qquad (32)$$

Relația (32) reprezintă expresia săgeții unei plăci într-un punct interior domeniului dacă se cunosc soluțiile pe conturul S, respectiv: săgeata w, rotirea $w_{,n}$, momentul încovoietor M_n, momentul de răsucire M_{nt}, forța tăietoare a lui Kirchhoff, ceeace asigură o serie de avantaje față de exprimările cunoscute pînă acum, figura 2.

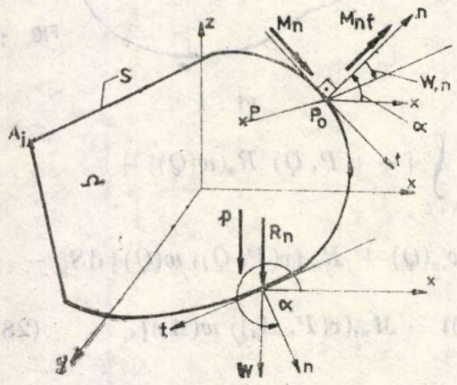


Fig. 2

Relația (32) este aplicabilă la plăci de formă oarecare, deoarece eventualele discontinuități (din rezemare sau încărcare) sînt luate în considerare. Mai mult, expresia săgeții (32) permite obținerea unei soluții fără salturi în punctele de discontinuitate atunci cînd $vM_{nt}(w)$ este continuă pe conturul S.

4. EXPRIMAREA SUB FORMĂ INTEGRALĂ A SĂGEȚII PE CONTURUL DOMENIULUI

Atunci cînd punctul P din interiorul domeniului Ω tinde către un punct $P_0 \in S (P_0 \notin A_i)$, figura 2, nesingular, anumite integrale din (32) devin discontinuie și necesită un studiu separat. Se presupune că $P \to P_0$ iar normala în P_0 trece prin P. Fie un element de frontieră $s(P_0)$ suficient de mic situat de o parte și de cealaltă a lui P_0 și se admite că el poate fi înlocuit cu un element al tangentei la contur în P_0 de lungime 2ε, iar $\vec{a} = \| \overrightarrow{P_0 P} \|$, figura 4. Integrala pe conturul S limitată la primii

trei termeni, redusă la elementul de frontieră $s(P_0)$ este convergentă atunci cînd $P \to P_0 \in S$, ceea ce permite definirea integralelor generalizate [15]

$$\int_{s(P_0)} v(P_0, Q)\, R_n(w(Q))\, \mathrm{d}S_Q = \lim_{a\to 0} \int_{s(P_0)} v(P, Q)\, R_n(w(Q))\, \mathrm{d}S_Q \tag{33}$$

$$\int_{s(P_0)} v_{,n}(P_0, Q)\, M_n(w(Q))\, \mathrm{d}S_Q = \lim_{a\to 0} \int_{s(P_0)} v_{,n}(P, Q)\, M_n(w(Q))\, \mathrm{d}S_Q \tag{34}$$

$$\int_{s(P_0)} M_n(v(P_0, Q))\, w_{,n}(Q)\, \mathrm{d}S_Q = \lim_{a\to 0} \int_{s(P_0)} M_n(v(P, Q))\, w_{,n}(Q)\, \mathrm{d}S_Q. \tag{35}$$

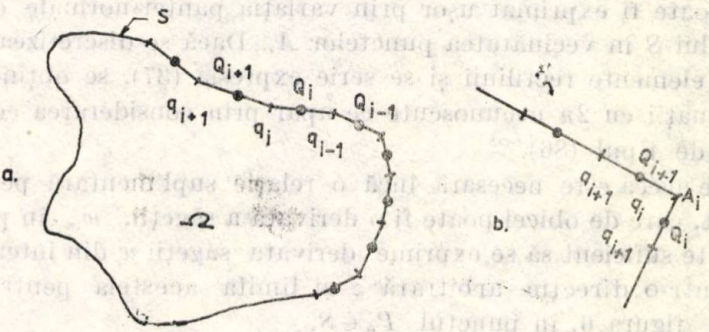


Fig. 3

Ultimul termen al integralei pe contur din (32) converge deasemeni către

$$\lim_{a\to 0} \int_{s(P_0)} \frac{1}{D}\, R_n(v(P, Q))\, w(Q)\, \mathrm{d}S_Q =$$

$$= -\frac{1}{2}\, w(P_0) +$$

$$+ \int_{s(P_0)} \frac{1}{D}\, R_n(v(P_0, Q))\, w(Q)\, \mathrm{d}S_Q$$

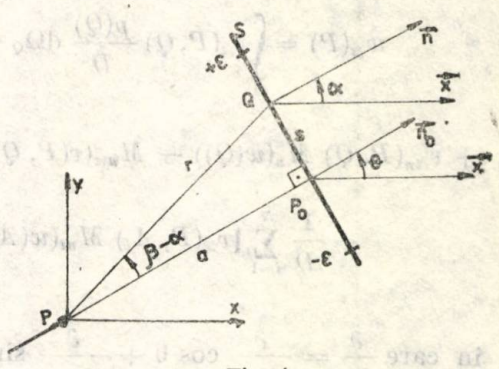


Fig. 4

(36)

deși există o singularitate pentru $1/r$ în expresia funcției forței generalizate a lui Kirchhoff $R_n(v)$. Cu precizările din (33) — (36) se obține expresia săgeții sub formă integrală într-un punct P_0 de pe

conturul S dată prin [14]

$$\frac{1}{2} w(P_0) = \int_\Omega v(P_0, Q) \frac{p(Q)}{D} \, d\Omega_Q - \frac{1}{D} \int_S [- v(P_0, Q) \, R_n(w(Q)) +$$

$$+ v_{,n}(P_0, Q) \, M_n(w(Q)) - M_n(v(P_0, Q)) \, w_{,n}(Q) + R_n(v(P_0, Q)) \, w(Q)] \, dS_Q +$$

$$+ \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{N} [v(P_0, A_i) \, M_{nt}(w(A_i)) - M_{nt}(v(P_0, A_i)) \, w(A_i)]_{A_i} \qquad (37$$

Relația (37) exprimă legătura dintre săgeata w, panta $w_{,n}$, momentul încovoietor $M_n(w)$, forța tăietoare generalizată a lui Kirchhoff $R_n(w)$ de pe conturul domeniului și momentul de torsiune $M_{nt}(w)$ din colțurile A_i ce poate fi exprimat ușor prin variația pantei normale de-a lungul conturului S în vecinătatea punctelor A_i. Dacă se discretizează conturul S în n elemente rectilinii și se scrie expresia (37), se obține un sistem de n ecuații cu $2n$ necunoscute ce apar prin considerarea condițiilor de contur de tipul (86).

De aceea este necesară încă o relație suplimentară pentru fiecare segment, care de obicei poate fi o derivată a săgeții, $w_{,n}$ în punctul $P_0 \in S$. Este suficient să se exprime derivata săgeții w din interiorul domeniului într-o direcție arbitrară $\vec{z}$ și limita acesteia pentru $P \to P_0$ și $\vec{z} \to \vec{M}$, figura 6, în punctul $P_0 \in S$.

Derivata în raport cu variabila $\vec{z}$ a expresiei (32) este [15].

$$w_{,z}(P) = \int_\Omega v_{,z}(P, Q) \frac{p(Q)}{D} \, d\Omega_Q - \frac{1}{D} \int_S [- v_{,z}(P, Q) \, R_n(w(Q)) +$$

$$+ v_{,zn}(P, Q) \, M_n(w(Q)) - M_{n,z}(v(P, Q)) \, w_{,n}(Q) + R_{n,z}(v(P, Q)) \, w(Q)] \, dS_Q +$$

$$+ \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{N} [v_{,z}(P, A_i) \, M_{nt}(w(A_i)) - M_{nt,z}(v(P, A_i)) \, w(A_i)]_{A_i} \qquad (38)$$

în care $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x_p} \cos \theta + \frac{\partial}{\partial y_p} \sin \theta$ și $(\vec{x}, \vec{z}) = \theta$ (fig. 4). Această expresie (38) este valabilă cînd punctul $P \in \Omega$. Din condiția ca $P \to P_0$ se obține expresia $w_{,z}$ într-un punct al conturului S. Exprimarea acestor limite se va face pentru cazul cînd variabila z coincide cu normala exterioară $\vec{n}_0$ în punctul $P_0 \in S$.

5. EXPRIMAREA SUB FORMĂ INTEGRALĂ A PANTEI PE CONTURUL DOMENIULUI

Studiul limitei pantei pentru $P \to P_0$ este asemănător cu cel expus în paragraful 4. Pentru $\|\overrightarrow{PP_0}\| = (\vec{a} \to 0)$ se pot defini următoarele integrale generalizate

$$\int_{s(P_0)} v_{,n_0}(P_0, Q)\, R_n(w(Q))\, \mathrm{d}S_Q = \lim_{a\to 0} \int_{s(P_0)} v_{,n_0}(P, Q)\, R_n(w(Q))\, \mathrm{d}S_Q \tag{39}$$

$$\int_{s(P_0)} v_{,n_0 n}(P_0\, Q)\, M_n(w(Q))\, \mathrm{d}S_Q = \lim_{a\to 0} \int_{s(P_0)} v_{,n_0 n}(P, Q)\, M_n(w(Q))\, \mathrm{d}S_Q \tag{40}$$

în care $\dfrac{\partial}{\partial \vec{n}_0} = \dfrac{\partial}{\partial x_p}\cos\theta + \dfrac{\partial}{\partial y_p}\sin\theta$ cu $\theta = (\vec{x}, \vec{n}_0)$.

Un studiu similar privind influența termenului $1/r$ în expresia $M_{n,n_0}(v(P, Q))$ arată că următoarea integrală tinde spre o limită nenulă

$$\lim_{a\to 0} \frac{1}{D} \int_{s(P_0)} M_{n,n_0}(v(P, Q))\, w_{,n}(Q)\, \mathrm{d}S_Q = \frac{1}{2} w_{,n}(P_0) +$$

$$+ \frac{1}{D} \int_{s(P_0)} M_{n,n_0}(v(P_0, Q))\, w_{,n}(Q)\, \mathrm{d}S_Q \tag{41}$$

Existența integralei din membrul al doilea al relației (41) precum și limita acesteia, deoarece forța generalizată a lui Kirchhoff $R_n(v(P, Q)$ conține funcția $1/r^2$, necesită un studiu mai aprofundat. Studiul se poate efectua relativ ușor dacă se utilizează condițiile lui Liapunov [22] pentru derivata în raport cu normala la contur a unui potențial de dublu strat în probleme de elasticitate tridimensională care permit stabilirea existenței integralei

$$\int_S R_{n,n_0}(v(P_0, Q))\, w(Q)\, \mathrm{d}S_Q \tag{42}$$

și se poate arăta că

$$\lim_{a\to 0} \frac{1}{D} \int_{s(P_0)} R_{n,n_0}(v(P, Q))\, w(Q)\, \mathrm{d}S_Q = 0 \tag{43}$$

Cu precizarea condițiilor de tip Liapunov (42) și (43) [22] se obține o expresie sub formă integrală asociată derivatei în raport cu normala săgeții w într-un punct al conturului S sub forma

$$\frac{1}{2} w_{,n_0}(P_0) = \int_\Omega v_{,n_0}(P_0, Q) \frac{p(Q)}{D} \, d\Omega_Q - \frac{1}{D} \int_S [- v_{,n_0}(P_0, Q) R_n(w(Q)) +$$

$$+ v_{,n_0 n}(P_0, Q) M_n(w(Q)) - M_{n,n_0}(v(P_0, Q)) w_{,n}(Q) +$$

$$+ R_{n,n_0}(v(P_0, Q)) w(Q)] \, dS_Q + \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{N} [v_{,n_0}(P_0, A_i) M_{nt}(w(A_i)) -$$

$$+ M_{nt,n_0}(v(P_0, A_i)) w(A_i)]_{A_i} \qquad (44)$$

Relațiile (37) și (44) leagă săgeata w, panta $w_{,n}$ momentul M_n și forța tăietoare T_n definite pe conturul plăcii astfel încît salturile momentului de torsiune în punctele singulare A_i să se poată exprima în raport cu derivata la normală, efectuată în punctele vecine fiecărui colț A_i. Expresia săgeții (237) și a derivatei acesteia (44) pe contur vor permite determinarea tuturor necunoscutelor pe frontieră, precum și în orice punct $Q \in \Omega$. Derivînd succesiv expresia (38) pînă la ordinul doi inclusiv, se vor obține expresiile momentelor încovoietoare M_x, M_y a momentelor de torsiune $M_{xy} = M_{yx}$ în orice punct al domeniului Ω. În continuare, cunoscînd Laplaceanul Δw, prin derivarea acestuia în mod corespunzător se obțin forțele tăietoare T_x, T_y, [10].

6. FORMULAREA NUMERICĂ

Determinarea pe cale analitică a soluțiilor ecuațiilor integrale (37) sau (44) este dificilă, de aceea se utilizează rezolvarea numerică. În acest sens conturul plăcii se discretizează într-o serie de elemente (segmente) rectilinii numerotate de la 1 la q (fig. 3a). În centrul fiecărui element este fixat nodul Q_i. În cazul conturului curb, acesta se aproximează cu un poligon cu $q - 1$ laturi înscris sau circumscris conturului. Dacă conturul conține puncte singulare (fig. 3b), atunci punctele A_i, prin discretizarea conturului vor delimita două elemente adiacente. În cazul forțelor repartizate pe suprafața plăcii, aceasta este discretizată într-o serie de celule de arie A_j cu centrul G_j. În fiecare punct Q_i se determină săgeata $w(Q_i)$, panta $w_{,n}(Q_i)$, momentele încovoietoare $M_n(w(Q_i))$, forțele tăietoare tip Kirchhoff $R_n(w(Q_i))$. Determinarea valorilor w, $w_{,n}$, M_n și R_n în punctele de intersecție a două segmente se determină prin interpolarea valorilor din punctele Q_i.

Pentru a determina deplasările și eforturile secționale pe contur, trebuie rezolvate integrale care apar în relația (37). Forma explicită a integralelor din (37) dată în continuare, permite rezolvarea numerică a acestora [10], [13]. Se presupune că punctul $P \to P_0 \in S$(fig. 4), unde $\vec{n}$ este normala exterioară la tangenta într-un punct Q pe frontiera S, $\alpha = (\vec{x}, \vec{n})$, $r = \|\overrightarrow{PQ}\|$, $s = \overrightarrow{P_0Q}$, $\beta - \alpha = (n_0, \overrightarrow{PQ})$.

Cu $\vec{n}_0$ s-a notat normala exterioară în punctul P_0 iar $\theta = (\vec{x}, \vec{n}_0)$. Se consideră integrala

$$I_1 = \int_{s(P_0)} \frac{1}{D} R_n (v(P, Q))\, w(Q)\, ds_Q \tag{45}$$

sub forma explicită

$$I_1 = -\frac{1}{8\pi} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \left[\frac{4}{(s^2 + a^2)^{1/2}} \cos(\beta - \alpha) + \right.$$

$$\left. + (1 - \nu) \frac{2}{(s^2 + a^2)^{1/2}} \cos(2\beta - 2\alpha) \cos(\beta - \alpha) \right] w(Q)\, ds_Q \tag{46}$$

unde

$$\cos(\beta - \alpha) = \frac{a}{(s^2 + a^2)^{1/2}}, \quad \sin(\beta - \alpha) = \frac{s}{(s^2 + a^2)^{1/2}}$$

Dacă ε este suficient de mic se poate determina săgeata în punctul Q cu relația

$$w(Q) = w(P_0) + s w_{,s}(P_0) + O(s^2) \tag{47}$$

Revenind la (46) se obține

$$I_1 \approx -\frac{1}{8\pi} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \left[\frac{4a}{s^2 + a^2} + \frac{(1 - \nu)\, 2a}{(s^2 + a^2)^2} (a^2 - s^2) \right] [w(P_0) + s w_{,s}(P_0)]\, ds_Q \tag{48}$$

sau

$$I_1 \approx -\frac{1}{8\pi} \left[4 \operatorname{arctg} \frac{s}{a} + 2a(1 - \nu) \frac{s}{s^2 + a^2} \right]_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} w(P_0) +$$

$$+ \left[2a \log(s^2 + a^2) - (1 - \nu) \frac{2a^3}{s^2 + a^2} + a \log(s^2 + a^2) \right]_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} w_{,s}(P_0) \tag{49}$$

Dacă $a \to 0$ deci $P \to P_0$ atunci $\operatorname{arctg} \frac{\pm\varepsilon}{a} \to \pm \frac{\pi}{2}$ și

$$\lim_{a \to 0} I_1 = -\frac{1}{2} w(P_0) + \int_{s(P_0)} \frac{1}{D} R_n(v(P_0, Q))\, w(Q)\, ds_Q \tag{50}$$

Se procedează în mod asemănător pentru integrala

$$I_2 = \int_{s(P_0)} \frac{1}{D} M_{n,z}(v(P,Q))\, w_{,n}(Q)\, \mathrm{d}s_Q \tag{51}$$

care poate fi scrisă astfel

$$I_2 = \frac{1}{8\pi} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} [2(1+\nu)\cos(\beta-\alpha) + 2(1-\nu)\sin(2\beta-2\alpha)\sin(\beta-\alpha)] \times$$

$$\times \frac{1}{(s^2+a^2)^{1/2}} w_{,n}(Q)\, \mathrm{d}s_Q \tag{52}$$

Pentru un ε suficient de mic se poate dezvolta $w_{,n}(Q)$ în raport cu $P_0 \in s$ și $-\varepsilon \leqslant s \leqslant \varepsilon$ astfel încît

$$w_{,n}(Q) = w_{,n_0}(P_0) + s w_{,ns}(P_0) + O(s^2) \tag{53}$$

și se deduce că

$$I_2 \approx \frac{1}{8\pi} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \left\{ w_{,n}(P_0) \left[2(1+\nu) \frac{a}{s^2+a^2} + \right.\right.$$

$$\left. + 4(1-\nu) \frac{s^2 a}{(s^2+a^2)^2} \right] + w_{,ns}(P_0) \left[(1+\nu) \frac{2as}{s^2+a^2} + \right.$$

$$\left.\left. + 4(1-\nu) \frac{s^3 a}{(s^2+a^2)^2} \right] \right\} \mathrm{d}s \tag{54}$$

sau

$$I_2 \approx \frac{1}{8\pi} \left\{ w_{,n}(P_0) \left[2(1+\nu)\ \operatorname{arctg} \frac{s}{a} + 2(1-\nu) \left(\operatorname{arctg}\ \frac{s}{a} - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \frac{sa}{(s^2+a^2)^2} \right) \right]_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} + w_{,ns}(P_0) \left[(1+\nu)\, a \log(s^2+a^2) + 2(1-\nu)\, a \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left(\frac{a^2}{s^2+a^2} + \log(s^2+a^2) \right) \right]_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \right\} \tag{55}$$

și

$$\lim_{a\to 0} I_2 = \frac{1}{2} w_{,n}(P_0) + \int_{s(P_0)} \frac{1}{D} M_{n,z}(v(P_0, Q))\, w_{,n}(Q)\, ds_Q$$

Integrala $I_3 = \frac{1}{D} \int_{s(P_0)} R_{n,z}(v(P, Q))\, w(Q)\, ds_Q$ din (38) prezintă o singularitate ce va fi studiată în continuare. Dacă se consideră $w(Q) = \text{const.}$; $w_{,n}(Q) = 0$; $M_n(w(Q)) = 0$ și $R_n((w(Q)) = 0$ atunci integrala din (38) se poate scrie

$$I_3 = \int_S \frac{1}{D} R_{n,z}(v(P, Q))\, ds_Q + \sum_{i=1}^{N} [M_{nt,z}(v(P, A_i))]_{A_i} = 0 \tag{56}$$

de unde

$$I_3 = \int_S \frac{1}{D} R_{n,z}(v(P, Q))\, w(Q)\, ds_Q =$$

$$= \int_S \frac{1}{D} R_{n,z}(v(P, Q))\, (w(Q) - w(P_0))\, ds_Q - \sum_{i=1}^{N} [M_{nt,z}(v(P, A_i))\, w(P_0)]_{A_i}$$

există numai dacă există ultima integrală. Cînd variabila $\vec{z}$ coincide cu $\vec{n}_0$ integrala I_3 devine

$$I_3 = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \left[\frac{a^2 - s^2}{(a^2 + s^2)^2} \left(2 + (1 - \nu) \frac{a^2 - s^2}{a^2 + s^2} \right) - \right.$$

$$\left. - 4(1 - \nu) \frac{s^2 a^2}{(s^2 + a^2)^3} \right] (w(Q) - w(P_0))\, ds_Q \tag{57}$$

iar dacă ε este suficient de mic, atunci conform (47)

$$I_3 = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} s \left[\frac{a^2 - s^2}{(a^2 + s^2)^2} \left(2 + (1 - \nu) \frac{a^2 - s^2}{a^2 + s^2} \right) - \right.$$

$$\left. - 4(1 - \nu) \frac{s^2 a^2}{(s^2 + a^2)^3} \right] ds_Q\, w_{,s}(P_0) \tag{58}$$

Se poate arăta că

$$\lim_{a\to 0} \int_{s(P_0)} \frac{1}{D} R_{n,z}(v(P, Q))\,(w(Q) - w(P_0))\,ds_Q =$$

$$= \int_{s(P_0)} \frac{1}{D} R_{n,z}(v(P_0, Q))\,(w(Q) - w(P_0))\,ds_Q \qquad (59)$$

pentru că integrala

$$I_3' = \frac{1}{4\pi} \int_{s(P_0)} \frac{1}{s} (1 + \nu)\,ds_Q\, w_{,s}(P_0) \qquad (60)$$

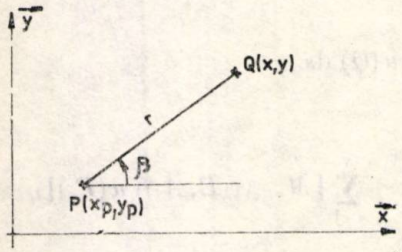


Fig. 5

este nulă în sensul valorilor Cauchy între limitele $-\varepsilon$ și $+\varepsilon$.

Se observă că expresiile eforturilor secționale pe conturul și în interiorul plăcii depind de funcția v (25) considerată ca o soluție fundamentală. Pentru a preciza derivatele acestei funcții în raport cu variabilele x și y, se consideră punctele $P(x_P, y_P) \in \Omega$ și $Q(x, y) \in S$ (fig. 5), unde $r = \|\overrightarrow{PQ}\|$, $\beta = (\vec{x}, \overrightarrow{PQ})$. Se poate scrie

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\beta \frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin\beta \frac{\partial}{\partial r}.$$

Cunoscînd că $v(P, Q) = \frac{1}{8\pi} r^2 \log r$ atunci

$$v_{,x} = \frac{1}{8\pi}(2r\log r + r)\cos\beta, \quad v_{,y} = \frac{1}{8\pi}(2r\log r + r)\sin\beta \qquad (61)$$

$$v_{,xx} = \frac{1}{8\pi}(2\log r + 1 + 2\cos^2\beta); \quad v_{,xy} = \frac{1}{4\pi}\cos\beta\sin\beta;$$

$$v_{,yy} = \frac{1}{8\pi}(2\log r + 1 + 2\sin^2\beta)$$

Derivatele în raport cu coordonatele punctului P într-o direcție $\vec{z}$ fixă, definită de unghiul $\theta = (\vec{x}, \vec{z})$, figura 6, conduc la

$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial x_p} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y_p} \tag{62}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_p} = -\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y_p} = -\frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = -\cos(\beta - \theta)\frac{\partial}{\partial r}.$$

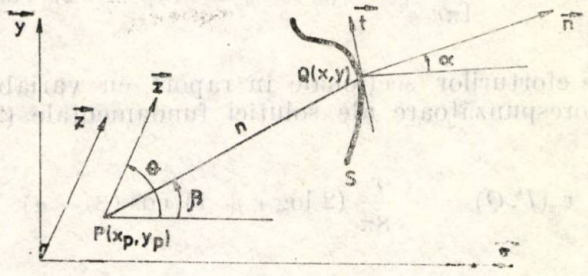


Fig. 6

Relațiile (62) permit calculul eforturilor secționale în raport cu funcția v conform figurii 6 și

$$v_{,n}(P, Q) = \frac{r}{8\pi}(2\log r + 1)\cos(\beta - \theta)$$

Momentul încovoietor $M_n(v(P, Q))$ se obține cu ajutorul relațiilor (61) [9]

$$M_n v(P, Q)) = -\frac{D}{8\pi}\{(1 - \nu)[(2\log r + 1) + 2\cos^2(\beta - \alpha)] + \\ + 4\nu(\log r + 1)\} \tag{63}$$

Momentul de torsiune $M_{nt}(v(P, Q))$ va avea forma

$$M_{nt}(v(P, Q)) = -\frac{-D(1 - \nu)}{8\pi}\sin(2\alpha - 2\beta) \tag{64}$$

iar forța generalizată a lui Kirchhoff

$$R_n(v(P, Q)) = -\frac{D}{8\pi}\left[\frac{4}{r}\cos(\beta - \alpha) + (1 - \nu)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\sin(2\beta - 2\alpha)\right] \tag{65}$$

În cazul cînd conturul este rectiliniu pe anumite porţiuni, unghiul α este constant pe această zonă, curbura conturului este nulă, $\mathrm{d}/\mathrm{d}s$ se confundă cu $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$, astfel încît

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \sin(2\beta - 2\alpha) = \frac{2}{r} \cos(2\beta - 2\alpha) \cos(\beta - \alpha) \tag{66}$$

şi

$$R_n(v(P, Q)) = -\frac{D}{4\pi r} [2 + (1 - \nu) \cos(2\beta - 2\alpha)] \cos(\beta - \alpha)$$

Expresiile eforturilor secţionale în raport cu variabila $\vec{z}$ depind de derivatele corespunzătoare ale soluţiei fundamentale (25)

$$v_{,z}(P, Q) = -\frac{r}{8\pi} (2 \log r + 1) \cos(\beta - \alpha)$$

$$v_{,zr}(P, Q) = -\frac{1}{8\pi} [(2 \log r + 3) \cos(\beta - \alpha) \cos(\beta - \theta) +$$

$$+ 2 (\log r + 1) \sin(\beta - \alpha) \sin(\beta - \theta)] \tag{67}$$

Derivata momentului încovoietor $M_{n,z}(v(P, Q))$ devine

$$M_{n,z}(v(P, Q)) = +\frac{D}{8\pi} \left[\frac{2(1 + \nu)}{r} \cos(\beta - \theta) + \right.$$

$$\left. + \frac{2(1 - \nu)}{r} \sin(2\beta - 2\alpha) \sin(\beta - \theta) \right] \tag{68}$$

Derivata momentului de torsiune $M_{nt,z}(v(P, Q))$ este

$$M_{nt,z}(v(P, Q)) = -\frac{D(1 - \nu)}{4\pi r} \sin(\beta - \theta) \cos(2\beta - 2\alpha) \sin(\beta - \alpha) \tag{69}$$

Derivata forţei generalizate a lui Kirchhoff va avea forma

$$R_{n,z}(v(P, Q)) = -\frac{D}{4\pi r^2} \{[2 + (1 - \nu) \cos(2\beta - 2\alpha)] \cos(2\beta - \theta - \alpha) -$$

$$- 2(1 - \nu) \cos(\beta - \alpha) \sin(2\beta - 2\alpha) \sin(\beta - \theta)\} \tag{70}$$

Toate aceste expresii permit rezolvarea numerică a săgeții $w(P)$, (32), a pantei acesteia $w_{,i}(P)$, (38), într-un punct curent $P \in \Omega$, precum și a săgeții $w(P_0)$, (37), sau pantei $w_{,n_0}(P_0)$ (44) într-un punct de pe contur $P_0 \in S$. În cazul cînd unele din aceste integrale conțin singularități de tipul $1/r$ sau $1/r^2$ (pentru $r \to 0$) ele pot fi calculate respectînd condițiile mișcării de corp rigid. Dacă se consideră o mișcare de ansamblu a plăcii astfel încît

$$p(Q) = 0, \quad w_{,n}(Q) = 0, \quad M_n(w(Q)) = 0 \tag{71}$$

$$M_{nt}(w(Q)) = 0, \quad R_n(w(Q)) = 0, \quad w(Q) = w_0$$

atunci (37) și (44) permit o exprimare sub forma

$$\frac{1}{2} w_0 + \frac{1}{D} w_0 \int_S R_n(v(P_0, Q))\, \mathrm{d}S + \frac{1}{D} w_0 \sum_{i=1}^{N} [M_{nt}(v(P_0, A_i))]_{A_i} = 0 \tag{72}$$

și

$$\frac{w_0}{D} \int_S R_{n,n_0}(v(P_0, Q))\, \mathrm{d}S + \frac{1}{D} w_0 \sum_{i=1}^{N} [M_{nt,n_0}(v(P_0, A_i))]_{A_i} = 0$$

Ambele integrale pentru $R_n(v)$ și $R_{n,n_0}(v)$ pot fi calculate numeric pe toate segmentele de integrare q_i pentru $P_0 \notin q_i$. Integralele

$$\int_{q_j} R_n(v(P_0, Q))\, \mathrm{d}S \quad \text{pentru} \quad P_0 \in q_j$$

$$\int_{q_j} R_{n,n_0}(v(P_0, Q))\, \mathrm{d}S \text{ pentru } P_0 \in q_j \tag{73}$$

pot fi calculate utilizînd relațiile (72) ceeace demonstrează existența integralei (42) în sens Liapunov [22].

Calculul integralelor de suprafață. În acest caz se evaluează integralele

$$\int_\Omega \frac{1}{D} p(Q)\, v(P_0, Q)\, \mathrm{d}\Omega, \quad \int_\Omega \frac{1}{D} p(Q)\, v_{,n_0}(P_0, Q)\, \mathrm{d}\Omega \tag{74}$$

Dacă forța unitară este concentrată în punctul $Q \in \Omega$ apare condiția $p(Q) = \delta(Q_0)$ și integralele se reduc la

$$\frac{1}{D} v(P_0, Q_0); \quad \frac{1}{D} v_{,n_0}(P_0, Q_0) \tag{75}$$

În cazul în care forța este uniform distribuită pe toată suprafața plăcii, cele două integrale din (74) se calculează numeric, astfel încît integrala de tipul

$$I = \int_{\Omega} \frac{1}{D}\, p(Q)\, \varphi(P_0, Q)\, \mathrm{d}\Omega \tag{76}$$

(unde $\varphi(P_0, Q)$ este o funcție cunoscută dată explicit), se aproximează prin

$$I \simeq \sum_{j=1}^{R} \frac{1}{D}\, \varphi(P_0, G_j)\, p(G_j)\, A_j \tag{77}$$

Calculul salturilor în punctele singulare. Trebuie calculate salturile de tipul

$$[\varphi(P_0, A_i)\, w(A_i)]_{A_i} \tag{78}$$

Se presupune că joncțiunea segmentelor q_i și q_{i+1} este un punct unghiular A_i fig. 3b. Fie A_i^+ punctul A_i considerat ca limită a unui punct al segmentului q_{i+1} și A_i^- un punct identic cu A_i^+ dar considerat ca limită a unui punct al segmentului q_i. Salturile definite de (16a) permit ca (78) să fie scrisă sub forma

$$[\varphi(P_0, A_i)\, w(A_i)]_{A_i} = \varphi(P_0, A_i^+)\, w(A_i^+) - \varphi(P_0, A_i^-)\, w(A_i^-) \tag{79}$$

Dacă sînt cunoscute săgețile în Q_i și Q_{i+1} atunci salturile pot fi aproximate cu relația

$$[\varphi(P_0, A_i)\, w(A_i)]_{A_i} = \varphi(P_0, A_i^+)\, w(Q_{i+1}) - \varphi(P_0, A_i^-)\, w(Q_i) \tag{80}$$

Cînd intervine și momentul de torsiune trebuie evaluați termenii de tipul

$$[\varphi(P_0, A_i)\, M_{nt}(w(A_i))]_{A_i}$$

și ținînd cont de (16a) această expresie se poate scrie astfel

$$[\varphi(P_0, A_i)\, M_{nt}(w(A_i))]_{A_i} = \varphi(P_0, A_i^+)\, M_{nt}(w(A_i^+)) - \varphi(P_0, A_i^-)\, M_{nt}(w(A_i^-)) \tag{81}$$

mărimile $M_{nt}(w(A_i^+))$ și $M_{nt}(w(A_i^-))$ pot fi exprimate în raport cu panta în q_i

$$M_{nt}(w(A_i)) = -D(1-\nu)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(w_{,n}(A_i)) \tag{82}$$

Folosind o formulă de interpolare se poate arăta că

$M_{nt}(w(A_i^+))$ este în funcție de $w_{,n}(Q_{i+1}), w_{,n}(Q_{i+2}), \ldots$

$M_{nt}(w(A_i^-))$ este în funcție de $w_{,n}(Q_i), w_{,n}(Q_{i-1}) \ldots$

În literatura de specialitate, pentru calculul momentului de torsiune într-un punct unghiular, se utilizează de obicei formula de interpolare de tipul

$$w_{,n}(Q) = a_0 + a_1 \frac{s}{h} + a_2 \frac{s^2}{h^2} + \ldots + a_n \frac{s^n}{h^n} \tag{83}$$

Dacă se ia ca origine colțul A (fig. 3b) și se utilizează segmente (elemente de frontieră) de lungime h centrate în Q_1, Q_2, Q_3, ... atunci

$$w_{,n}(A) = a_0, \quad w_{,n}(Q_1) = a_0 + \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{4} a_2 + \ldots + \frac{1}{2^n} a_n \tag{84}$$

$$w_{,n}(Q_2) = a_0 + \frac{3}{2} a_1 + \frac{9}{4} a_2 + \ldots + \left(\frac{3}{2}\right)^n a_n$$

Scriind $(k+1)$ relații de tipul (84) se obține un sistem de ecuații algebrice cu necunoscutele a_i ce pot fi determinate în funcție de pantele $w_{,n}(Q_i)$, astfel încît expresia (82) poate fi scrisă sub forma

$$M_{nt}(w(Q)) = -D(1-\nu)\left(\frac{a_1}{h} + 2\frac{a_2 s}{h^2} + \ldots + n\frac{a_n s^{n-1}}{h^n}\right) \tag{85}$$

Se consideră că punctul A are abscisa curbilinie $s = 0$, atunci

$$M_{nt}(w(A)) = -D(1-\nu)\frac{a_1}{h}$$

Pentru un polinom de gradul întîi se obține

$$a_1 = \frac{2}{h}(w_{,n}(Q_1) - w_{,n}(A))$$

pentru unul de gradul doi

$$a_1 = [w_{,n}(Q_2) - 9w_{,n}(Q_1) + 8w_{,n}(A)]\frac{1}{3h}$$

iar pentru unul de gradul trei

$$a_1 = [9\, w_{,n}(Q_3) - 50\, w_{,n}(Q_2) + 225\, w_{,n}(Q_1) - 184\, w_{,n}(A)]\,\frac{1}{60\,h}$$

7. ETAPELE REZOLVĂRII PLĂCILOR CU METODA ELEMENTELOR DE FRONTIERĂ

a) *Discretizarea conturului.* După stabilirea schemei statice, a forțelor exterioare, conturul se discretizează în segmente egale. În punctele centrale Q_i ale segmentelor q_i trebuie definite săgeata $w(Q_i)$, panta $w_{,n}(Q_i)$, momentul încovoietor $M_n(w(Q_i))$, și $R_n(w(Q_i))$, două dintre acestea fiind date prin condițiile de contur iar două fiind necunoscute. Se obține astfel un sistem de $2q$ ecuații cu $2q$ necunoscute. În această etapă se poate construi o matrice de poziție cu q linii și patru coloane $(x_Q,\ y_Q,\ \alpha,\ \Delta l)$; în care $x_Q,\ y_Q$ sînt coordonatele punctelor Q_i, α unghiul dintre axa x și normala în Q_i, $\Delta l = L/q$ lungimea unui element de frontieră.

b) *Calculul integralelor pe contur.* Pentru determinarea necunoscutelor pe contur trebuie rezolvate integralele de tipul (45), (51). Pot să apară două situații: $P_0 \notin q_i$ și $P_0 \in q_i$.

Cînd $P_0 \notin q_i$ fiecare din integralele (45), (51) pot fi calculate cu relațiile (49) și (55). Dacă $P_0 \in q_i$ calculul se face plecînd de la expresiile (37), (44) obținîndu-se o matrice cu q linii și $4q$ coloane.

c) *Calculul membrului drept.* Integralele de tipul (74) se pot reduce la (75) sau (77) după caz.

Valorile numerice obținute sînt date sub forma unui vector $\vec{P}$ cu $2q$ linii și reprezintă tocmai termenul liber al membrului drept al sistemului de ecuații.

d) *Introducerea condițiilor de contur.* Din cele patru necunoscute pe contur, în funcție de tipul de rezemare, două sînt cunoscute, astfel încît

— latură încastrată	$w(Q) = 0,\quad w_{,n}(Q) = 0$	
— latură liberă	$M_n(Q) = 0;\quad R_n(Q) = 0$	(86)
— latură simplu rezemată	$w(Q) = 0;\quad M_n(Q) = 0$	

După introducerea condițiilor de contur, în matricea formată de coeficienții necunoscutelor apar o serie de zerouri aceasta reducîndu-se la o matrice cu două linii și $2q$ coloane.

c) *Rezolvarea sistemului de ecuații liniare.* Sistemul rezultat se poate rezolva cu una din metodele clasice cunoscute, obținîndu-se săgeata, panta, momentul încovoietor și forța tăietoare în punctele unde este necesar.

f) Calculul săgeții și eforturilor secționale în punctele interioare.

Cu valorile necunoscutelor pe contur calculate și prin intermediul relației (32) se pot calcula direct valorile săgeților în punctele interi-

care ale domeniului Ω. Cunoscînd valorile săgeților în punctele interioare se pot calcula, conform relațiilor (1) valorile eforturilor secționale, se trasează diagramele de variație a acestora și se efectuează calculele de rezistență cerute. Pe baza teoriei prezentate se poate întocmi un program pentru calculatoarele din dotare a cărui organigramă este dată în figura 7.

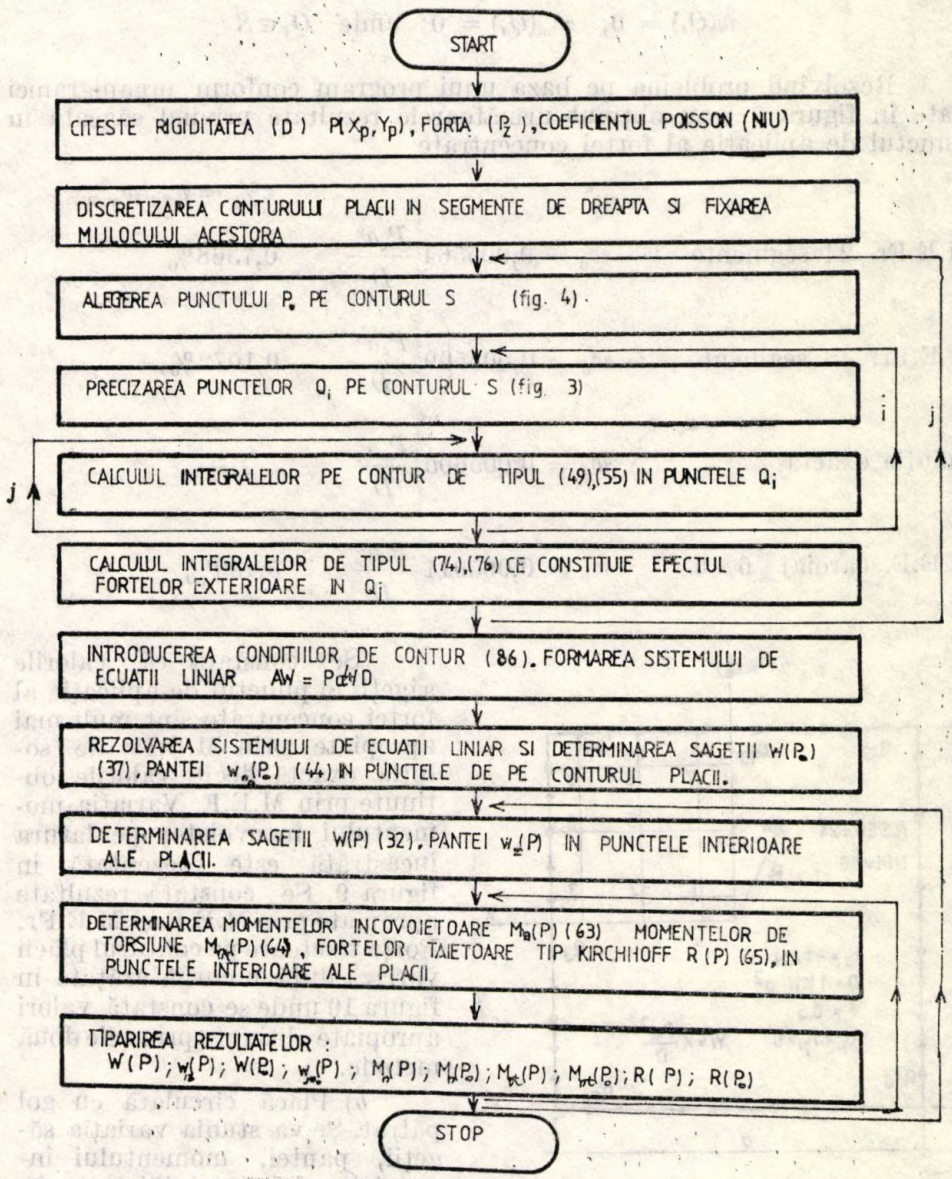


Fig. 7

8. EXEMPLE NUMERICE

a) Placă pătrată încastrată pe contur acţionată de o forţă concentrată.

Se vor determina săgeţile şi eforturile secţionale într-o placă pătrată, încastrată pe toate laturile şi acţionată de o forţă concentrată în centrul său figura 8, [13]. Condiţiile de contur în acest caz sînt

$$w(Q_i) = 0, \quad w_{,n}(Q_i) = 0 \quad \text{unde} \quad Q_i \in S$$

Rezolvînd problema pe baza unui program conform organigramei date în figura 7 s-au obţinut următoarele rezultate privind săgeata în punctul de aplicaţie al forţei concentrate

		$\varepsilon\% = w_{ex}/w_{num}$
M.E.Fr. 24 segmente	$w_0 = 0{,}005564 \dfrac{P_z a^2}{D}$	0,7368%
M.E.Fr. 48 segmente	$w_0 = 0{,}005599 \dfrac{P_z a^2}{D}$	0,1072%
Soluţia exactă	$w_0 = 0{,}005605 \dfrac{P_z a^2}{D}$	—
M.E.F. caroiaj 6×6	$w_0 = 0{,}005911 \dfrac{P_z a^2}{D}$	5,459%

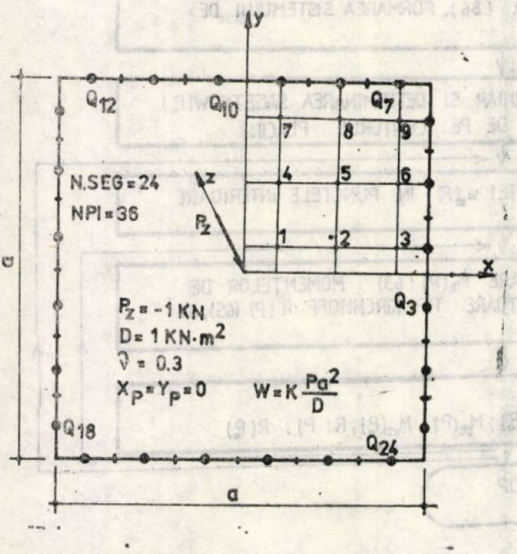


Fig. 8

Se constată că valorile săgeţii în punctul de aplicaţie al forţei concentrate sînt mult mai apropiate prin M.E.Fr de soluţia exactă decît valorile obţinute prin M.E.F. Variaţia momentului încovoietor pe latura încastrată este prezentată în figura 9. Se constată rezultate apropiate prin M.E.F. şi M.E.Fr. Forţa tăietoare pe conturul plăcii variază după o curbă arătată în figura 10 unde se constată valori apropiate obţinute prin cele două metode.

b) Placă circulară cu gol pătrat. Se va studia variaţia săgeţii, pantei, momentului încovoietor şi a forţei tăietoare în cazul unei plăci circulare, cu un

gol pătrat central, încastrată și acționată de o forță uniform distribuită, (fig. 11) [16]. In tabelul 1 sînt prezentate valorile deplasărilor, rotirilor și eforturilor secționale în punctele discretizării plăcii.

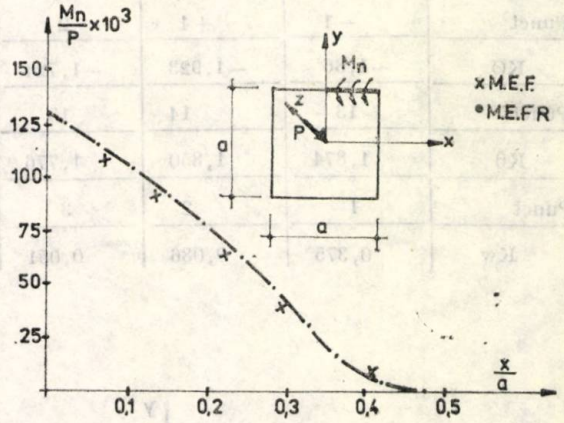


Fig. 9

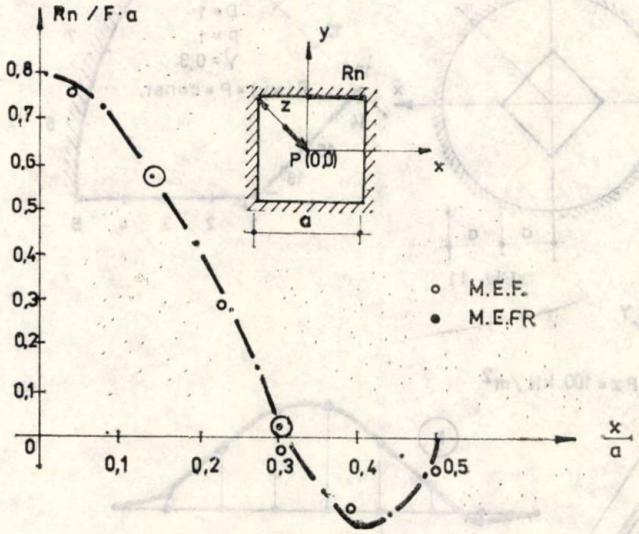


Fig. 10

Se constată numărul mic necesar de date de intrare (16 puncte nodale) suficiente pentru determinarea deplasărilor și a eforturilor secționale.

c) *Placă în consolă.* Se tratează unele probleme particulare (problema singularităților) în cazul unei plăci rectangulare simplu rezemată pe o anumită porțiune și liberă pe cealaltă (fig. 12a). Placa este acționată de o forță uniform distribuită $p_z(x, y) = 100$ kN/m² [10]. S-a studiat convergența soluțiilor prin metoda elementelor de frontieră pentru o discretizare a conturului în 8,10 și 12 elemente (fig. 12b) constatîndu-se o convergență rapidă a momentului încovoietor $M_x(y = 1$ m.) S-au

Tabelul

Punct	1	2	3	4	5–9	10
Kw	1,273	0,819	0,419	0,121	0,000	0,629
Punct	−1	+1	2	3	4	5–9
KØ	−1,36	−1,923	−1,724	−1,439	−0,898	0,0
Punct	13+	14	15	16	1−	
Kθ	1,874	1,850	1,776	1,639	1,36	Kv
Punct	1−	2	3	4	5−	5+
Kw	0,375	0,086	0,051	−0,031	−0,122	−0,406

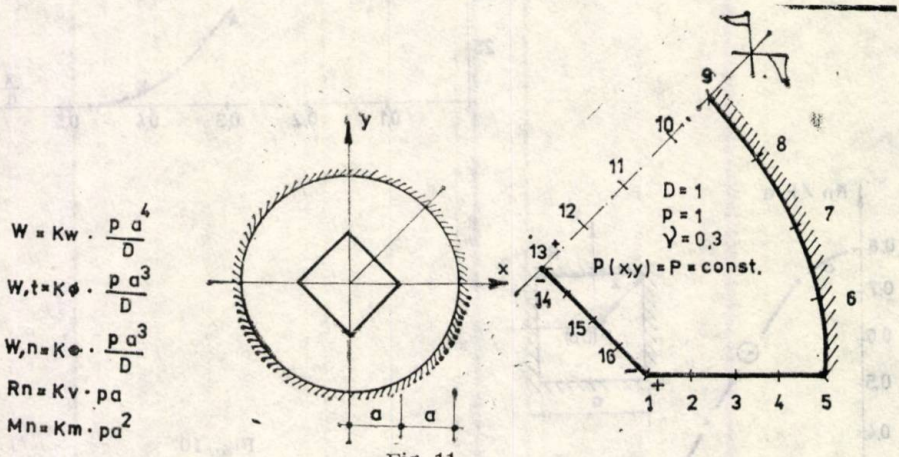


Fig. 11

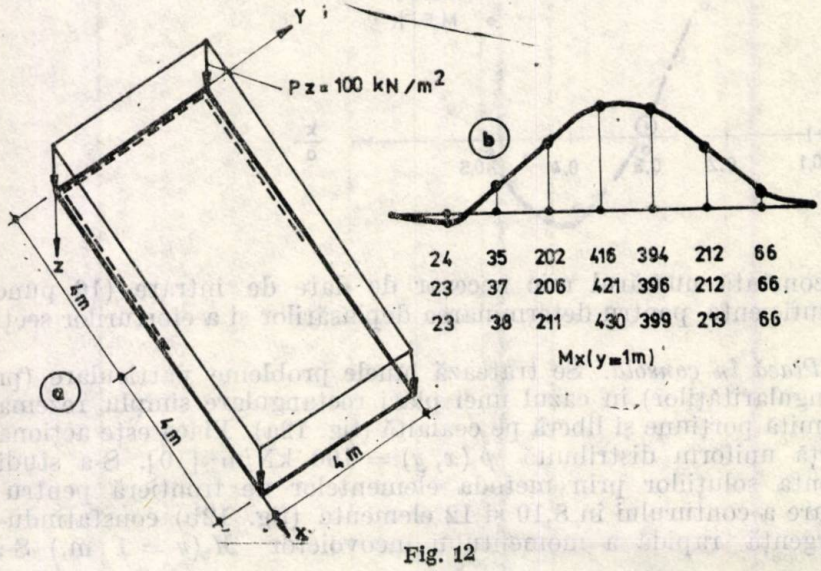


Fig. 12

1

11	12	13	14	15	16	
0,629	1.175	1,759	1,728	1,636	1,483	
10	11	12	−13	13+	14	15
1,064	1,581	1,760	−1,874	0,0	−0,351	−0,694
5+	6	7	8	9−		
−0,853	−0,853	−0,839	−0,831	−0,826		
7	8	9−	9+	10	11	
−0,404	−0,4	−0,396	−0,396	−0,119	−0,007	

determinat valorile forțelor tăietoare pentru latura de ecuații $y = 0$ și $0 \leqslant x \leqslant 8$ m. prin metoda elementelor de frontieră și metoda elementelor finite (64 elemente de placă) figura 13. Se constată că pentru latura $y = 0$ și $0 \leqslant x \leqslant 8$ m. forța tăietoare prezintă o perturbare pentru latura simplu rezemată, pentru porțiunea liberă aceasta este nulă prin M. E. Fr. și prezintă valori mari (470 kN) prin M.E.F. care nu se justifică. S-au calculat apoi valorile săgeților și momentelor încovoietoare pe linia dată de ecuațiile $y = 2$ m. și $0 \leqslant x \leqslant 8$ m., prezentate în figura 14. În această zonă de cîmp se constată o bună concordanță a rezultatelor prin cele două metode. De asemenea au fost trasate diagramele momentelor încovoietoare M ($x = 4$ m.) prin cele două metode constatîndu-se valori diferențiate în punctele singulare de coordonate $M(x = 4$ m., $y = 0)$ și $M_1(x = 4$ m., $y = 4$ m.), (fig. 15).

9. CONCLUZII

Din prezentarea teoretică a metodei elementelor de frontieră se desprinde ideea clară că pe baza unui program de calculator simplu se pot rezolva plăci de formă, rezemare și încărcare complexe. Discretizarea

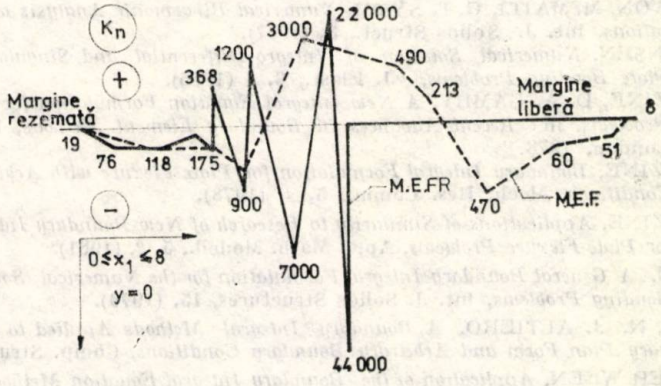


Fig. 13

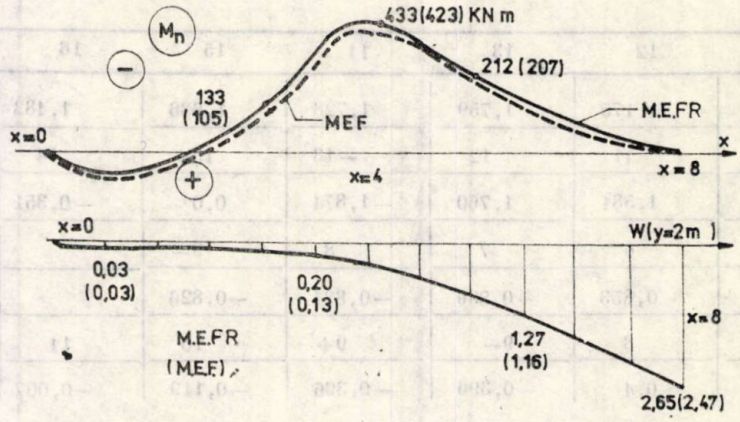


Fig. 14

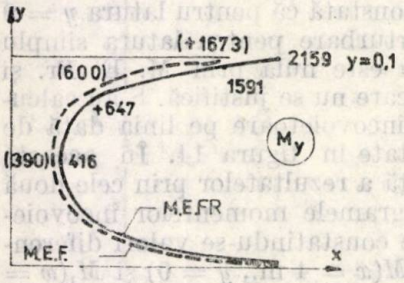


Fig. 15

simplă (doar a conturului), număr mic de segmente pe contur, fac din această metodă un instrument simplu eficient și rapid de lucru pentru rezolvarea celor mai diverse probleme din mecanica inginerească, construcții sau alte domenii [25]. Mai mult, metoda poate fi extinsă și în analiza dinamică a plăcilor [24] pe baza unei teorii adecvate. Există programe BE-PLATEBENDING [10], BIEP autor F. Van der Weeen din Belgia, BEMPLACA [13] și altele care pe baza teoriei rezolvă plăci plane acționate de forțe normale pe planul median.

Primit în redacție la 20 februarie 1989

BIBLIOGRAFIE

1. M. A. JASWON, M. MAITI, G. T. SYMM, *Numerical Biharmonic Analysis and some Applications*, Int. J. Solids Struct., **3**, (1967).
2. E. B. HANSEN, *Numerical Solution of Integro-Differential and Singular Equations for Plate Bending Problems*, J. Elast., **6**, *1* (1976).
3. G. P. BÉZINE, D. A. GAMBY, *A New Integral Equation Formulation for Plate Bending Problems*, în : *Recent Advances in Boundary Element Methods*, Pentech Press, London, 1978.
4. G. P. BÉZINE, *Boundary Integral Formulation for Plate Flexure with Arbitrary Boundary Conditions*, Mech. Res. Comm., **5**, *4*, (1978).
5. G. P. BÉZINE, *Applications of Similarity to Research of New Boundary Integral Equations for Plate Flexure Problems*, Appl. Math. Modell., **5**, *2*, (1981).
6. M. STERN, *A General Boundary Integral Formulation for the Numerical Solution of Plate Bending Problems*, Int. J. Solids Structures, **15**, (1979).
7. B. C. WU, N. J. ALTIERO, *A Boundary Integral Methods Applied to Plates of Arbitrary Plan Form and Arbitrary Boundary Conditions*, Comp. Struct., **10**, (1979)
8. F. VAN DER WEEN, *Application of the Boundary Integral Equation Method to Reissner's Plate Model*, *Int. J.* Numer. Methods Eng., **18**, (1982).

9. F. PARIS, S. DE LEON, *Simply Supported Plates by the Boundary Integral Equation Method*, Int. J. Numer. Methods Eng., **23**, (1986).
10. F. HARTMANN, R. ZOTEMANTEL, *The Direct Boundary Element Method in Plate Bending*. Int. J. Number. Methods Eng., **23**, (1986).
11. T. KATAYAMA, T. SEKIYA, H. TAI, *Bending Analysis of Perforated Plates with Unsupported or Clamped Edges, by BEM*, in : *Boundary Elements, Proc. 5-th Int. Conf. Hiroshima, Japan, Nov. 1983* (Eds. C. A. Brebbia, T. Futagami, M. Tanaka), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1983, p. 517—527.
12. C. XIANGFU, Q. RONG, *Spline Function Used in Boundary Element Methods*, in : *Boundary Elements, Proc. 5—th Int. Conf. Hiroshima, Japan, nov.1983* (Eds. C. A. Brebbia, T. Futagami, M. Tanaka), Springer—Verlag, Berlin, Heidelberg, 1983, p. 539—551.
13. G. P. BÉZINE, *Application de la méthode des équations integrales à la résolution des problèmes statiques et dynamiques stationnaires ou transitoires de flexion de plaques minces*, Teză de doctorat, Universitatea din Poitiers, 1982.
14. Y. NIWA, S. KOBAYASHI, T. FUKUI, *An Application of the Integral Equation Method to Plate—Bending Problems*, Memoirs of the Fac. Eng., Kyoto Univ., **XXXVI**, part 2. (1974).
15. QINGHUA DU, ZHENHAN YAO, S. GUOSHU, *Solution of Some Plate Bending Problems Using the Boundary Element Method*, Appl. Math. Modelling, **8**, (1984).
16. S. GUOSHU, S. MUKHERJEE, *Boundary Element Method Analysis of Bending of Elastic Plates of Arbitrary Shape with General Boundary Conditions*, Engineering Analysis, **3**, *1*, (1986).
17. M. TANAKA, *Integral Equation Approach to Small and Large Displacements of Thin Elastic Plates*, Proc. 4-th Int. Conf. on BEM in Eng., Southampton, 1982.
18. T. Q. Ye, Y. Liu, *Finite Deflection Analysis of Elastic Plates by BEM*, Appl. Math. Modeling, **9**, (1985).
19. C. P. BÉZINE, *A Boundary Integral Equation Method for Plate Flexure with Conditions Inside the Domain*, Int. J. Numer, Meth. Eng., **17**, (1981).
20. C. BIA, V. ILLE, M. V. SOARE, *Rezistența materialelor și teoria elasticității*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1983.
21. P. DE SIMONE, *The DBEM in Elastostatics Using Green's Generalized Theorem, in* : *Boundary Elements, Proc. 5-th Int. Conf. Hiroshima* (Eds. C. A. Brebbia, T. Futagami, M. Tanaka), Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg, 1983, p. 449—460.
22. V. Z. PARTON, P. I. PERLIN, *Integral Equations in Elasticity*, Mir Publishers, Moscow, 1982.
23. V. F. POTERAȘU, *Boundary Element Techniques*, ETS Inginieros Industriales, Madrid, Spania, 1985 (curs post universitar).
24. V. F. POTERAȘU, N. MIHALACHE, *Tensiuni și deplasări în elementele plane elastice cu metoda elementelor de frontieră. I. Analiza statică*, St. cerc. mec. apl., **44**, 5 (1985) ; *II. Analiza dinamică*, St. cerc. mec. apl., **47**, *5* (1988).
25. M. GAFIȚANU, V. F. POTERAȘU, N. MIHALACHE, *Elemente finite și de frontieră cu aplicații la calculul organelor de mașini*, Edit. tehnică, București, 1987.
26. N. MIHALACHE, *Contribuții privind comportarea diafragmelor de beton armat monolit la efectul forțelor tăietoare*. Teză de doctorat, Institutul Politehnic, Iași, 1988.

RANDAMENTUL SUPAPELOR LA POMPELE DE ADÎNCIME

de AL. D. STAN

Institutul de Petrol și Gaze, Ploiești

În lucrare se stabilesc randamentele la închiderea și deschiderea supapelor de la pompele de adîncime utilizate la extracția petrolului. Rezultatele obținute se pot aplica cu ușurință în practică și, în același timp, tot în lucrare, sînt indicate posibilitățile de mărire a eficienței pompajului prin alegerea unor supape potrivite. Alegerea supapelor depinde, în afară de geometria acestora, și de caracteristicile fizice ale fluidului pompat.

Extracția petrolului prin pompaj de adîncime utilizează pompele de fund al căror randament depinde de mai mulți parametri. Supapele pompei joacă un rol însemnat la eficiența pompajului de adîncime. De altfel, acestea se uzează destul de frecvent mai ales atunci cînd petrolul pompat conține suspensii mecanice. Alegerea unor supape potrivite duce la mărirea randamentului de pompare și la prelungirea funcționării pompei.

1. SISTEMUL DE FORȚE ASUPRA SUPAPEI PISTONULUI ȘI POMPEI

Randamentul pompei de adîncime depinde de modul cum cad și se ridică supapele de pe scaune. Căderea și ridicarea supapelor depind de forțele ce acționează la cursa descendentă și, respectiv, ascendentă a unității de pompare (UP). În literatură [1], fenomenul este prezentat calitativ considerînd că la căderea unei supape pe scaun se produc ciocniri succesive ale celor două piese. Fără a nega un asemenea fenomen, apreciem că sistemul de forțe ce acționează asupra supapei imprimă închiderea și deschiderea acesteia de pe scaun.

Se poate considera că asupra unei supape acționează forțele : greutatea proprie G, rezistența la înaintare C, forța lui Arhimede A și forța de inerție F_a datorată accelerației supapei.

În cazul în care axul pompei nu este vertical mai apare și o forță de frecare între supapă și corpul pompei. În cele ce urmează această forță va fi neglijată.

Greutatea proprie a supapei are valoarea

$$G = \frac{4\pi R^3}{3} g \rho_m \tag{1}$$

unde R este raza sferei iar ρ_m densitatea materialului din care s-a realizat supapa.

Forța datorată mișcării fluidului peste sferă, denumită în literatură rezistența la înaintare, apare ca urmare a vitezei relative existentă între petrol și sferă. Această forță apare deci numai atunci cînd există o mișcare a petrolului peste sferă. Din acest motiv este de așteptat ca

în perioada de timp în care supapa cade pe scaun cît și în timpul deschiderii acesteia să apară asemenea forțe deoarece în ambele situații între fluid și supapă are loc o deplasare relativă.

Rezistența la înaintare C se calculează cu formula

$$C = \rho \frac{v^2}{2} \pi R^2 C_R \tag{2}$$

unde ρ reprezintă densitatea petrolului, C_R — coeficientul de rezistență la înaintare care se determină cu una dintre relațiile

$$C_R = \frac{24}{\mathrm{Re}} \text{ pentru } \mathrm{Re} \leqslant 1 \tag{3'}$$

$$C_R = \frac{18{,}5}{\mathrm{Re}^{0{,}6}} \text{ pentru } 1 < \mathrm{Re} \leqslant 10^3 \tag{3''}$$

$$C_R = 0{,}44 \text{ pentru } \mathrm{Re} > 10^3 \tag{3'''}$$

Re este numărul lui Reynolds definit cu diametrul sferei ($2R$) și viteza relativă v a petrolului față de supapă.

$$\mathrm{Re} = \frac{(2R)v}{\nu} \tag{4}$$

ν este viscozitatea cinematică a petrolului.

Apare evident că în timpul fiecărei curse a pistonului rezistența la înaintare are valori variabile datorită variației vitezei relative dintre petrol și sferă, precum și valorilor diferite pe care la ia rezistența la înaintare.

Forța lui Arhimede trebuie calculată în două situații distincte și anume :

— supapa este în mișcare ascendentă sau descendentă față de scaun sau, între cele două piese nefiind un contact direct ;

— supapa este așezată pe scaun.

La terminarea cursei ascendente a supapei viteza devine nulă și începe căderea acesteia. Probabil, că perioada de timp între cele două curse este extrem de redusă, deoarece în acel moment asupra supapei acționează greutatea proprie și rezistența la înaintare a fluidului ; ambele forțe fiind îndreptate descendent.

În prima situație semnalată, supapa execută o mișcare independentă de scaun, forța lui Arhimede are expresia

$$A = \frac{4\pi R^3}{3} g\rho \,. \tag{5}$$

În cea de a doua situație cînd supapa este așezată pe scaun, pentru calculul forței de presiune pe supapă este necesar de observat că între

aceste piese există un contact pe o anumită suprafață (fig. 1). Dacă se notează cu H coloana de petrol măsurată de la nivelul scaunului pînă la suprafață, presiunea relativă la nivelul scaunului va fi

$$p = \rho g H. \tag{6}$$

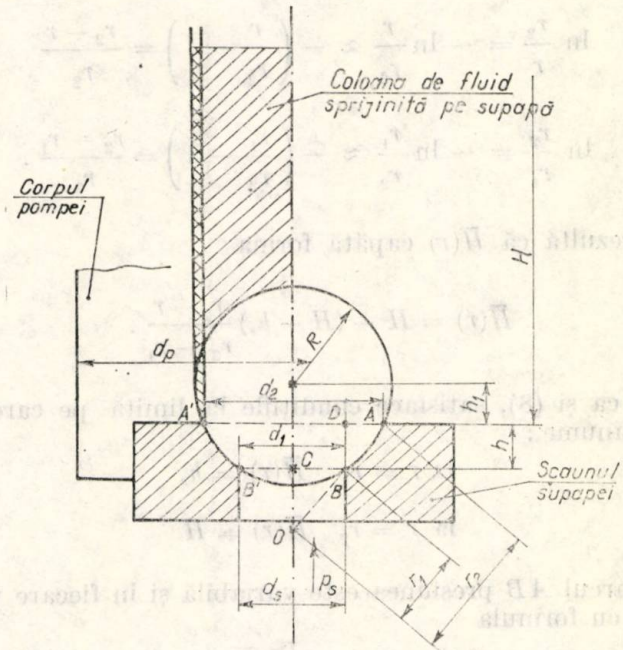


Fig. 1

Dacă mai jos de supapă este presiunea p_s, aceasta poate fi echivalentă unei coloane de petrol cu înălțimea h_s

$$h_s = \frac{p_s}{\rho g} \tag{7}$$

Rezultă că pe arcul AB presiunea variază continuu de la valoarea p la p_s.

Asimilînd scurgerea fluidului pe arcul AB cu o mișcare laminară între două discuri circulare, se poate scrie variația presiunii, exprimată n coloană petrol, în funcție de razele r_1, r_2 și r potrivit formulei

$$\bar{H}(r) = H - \frac{H - h_s}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{r_2}{r}. \tag{8}$$

Pentru obținerea unei relații mai comode de calcul decît cea precedentă sînt necesare unele aproximații. În acest scop se știe că pentru

un argument x mic există egalitatea aproximativă

$$\ln (1 + x) \approx x. \tag{9}$$

Datorită acesteia, se scriu pe rînd aproximațiile

$$\ln \frac{r_2}{r} = -\ln \frac{r}{r_2} \approx -\left(\frac{r}{r_2} - 1\right) = \frac{r_2 - r}{r_2} \tag{10'}$$

$$\ln \frac{r_2}{r_1} = -\ln \frac{r_1}{r_2} \approx -\left(\frac{r_1}{r_2} - 1\right) = \frac{r_2 - r_1}{r_2}. \tag{10''}$$

Cu acestea, rezultă că $\bar{H}(r)$ capătă forma

$$\bar{H}(r) = H - (H - h_s)\frac{r_2 - r}{r_2 - r_1}. \tag{11}$$

Relația (11), ca și (8), satisface condițiile la limită pe care le admite problema și anume:

$$\begin{aligned} &\text{la } r = r_1 \quad \bar{H}(r) = h_s \\ &\text{la } r = r_2 \quad \bar{H}(r) = H \end{aligned} \tag{12}$$

Deoarece pe arcul AB presiunea este variabilă și în fiecare punct al său se determină cu formula

$$p = \rho g \bar{H}(r), \tag{13}$$

unde $\bar{H}(r)$ este dată de (11), se determină forța elementară pe un element de suprafață. Această forță are, datorită simetriei supapei față de axul vertical al său, numai componenta verticală (figura 2), a cărei mărime este

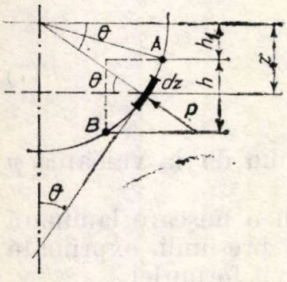


Fig. 2

$$\mathrm{d}F_v = 2\pi r p \,\mathrm{d}r \sin\theta = 2\pi\rho g r \bar{H}(r) \sin\theta \,\mathrm{d}r \tag{14}$$

Deoarece se scrie imediat

$$\sin\theta = \frac{r_2 - r_1}{h} = \frac{d_2 - d_1}{2h}$$

rezultă că forța verticală F_v va fi

$$F_v = \int_{r_1}^{r_2} \mathrm{d}F_v = \frac{\pi\rho g(d_2 - d_1)}{h} \int_{r_1}^{r_2} r\left[H - (H - h_s)\frac{r_2 - r}{r_2 - r_1}\right]\mathrm{d}r \tag{15}$$

unde d_1 și d_2 sînt diametrele cercurilor observate pe figura 1.

Efectuarea integralei din expresia forței F_v se face cu ușurință și se găsește

$$F_v = \frac{\pi \rho g}{6h}(d_2 - d_1)\,[H(2r_2^2 - r_1 r_1 - r_1^2) + h_s(r_2^2 + r_1 r_2 - 2r_1^2)]. \quad (16)$$

La această forță care apare pe arcul AB se adaugă forța de presiune pe calota sferică deasupra scaunului supapei care are mărimea

$$F_s = \left[\frac{\pi}{3}(2R^3 + 3R^2 h_1 - h_1^3) - \frac{\pi d_2^2}{4} H\right] \rho g. \quad (17)$$

Datorită acestora, rezultă că în momentul în care supapa este așezată pe scaun asupra acesteia se exercită forța totală F_t ca sumă între F_v și F_s

$$\frac{F_t}{\rho g} = \frac{d_2 - d_1}{6h}[H(2r_2^2 - r_1 r_2 - r_1^2) + h_s(r_2^2 + r_1 r_2 - 2r_1^2)] + \\ + \frac{2R^3 + 3R^2 h_1 - h_1^3}{3} - \frac{d_2^2}{4} H. \quad (18)$$

Componentele forțelor ce li s-au atribuit semnul plus sînt îndreptate ascendent pe verticala locului iar cele negative sînt îndreptate descendent.

2. RANDAMENTUL PISTONULUI LA CURSA ASCENDENTĂ A UP

La cursa ascendentă a pistonului, supapa acestuia cade pe scaun ceea ce face ca petrolul să fie antrenat la suprafață Dacă închiderea supapei se realizează exact în momentul începerii cursei ascendente a pistonului, randamentul de închiderea pompei este foarte bun, adică egal cu unitatea

$$\eta_t = 1. \quad (19)$$

Este posibil ca din momentul începerii cursei ascendente pînă la închiderea completă a orificiului dintre supapă și piston să existe o perioadă de timp t_a. În acest interval de timp are loc scurgerea unei părți din petrolul situat deasupra pompei. Cantitatea de petrol scursă depinde de înălțimea coloanei pînă la suprafață, de coeficientul de debit al secțiunii de scurgere, de mărimea secțiunii transversale scurgerii precum și de caracteristicile fizice ale petrolului.

Unele experimente efectuate de către noi au arătat pentru orificiile simple dependența coeficientului de debit de forma orificiului și de numărul lui Reynolds al orificiului [3].

Coeficientul de debit la pompele de extracție reprezintă o problemă interesantă și nu constituie obiectul prezentei lucrări. Probabil că ana-

liza scurgerii fluidelor printre piston și cilindrul său duce la unele aspecte [5, 6, 7, 8] interesante practici de șantier.

La cursa ascendentă a UP, supapa pistonului se află la partea superioară a coliviei a cărei lungime este l_c. Dacă se admite supapa ca un punct material, ecuația mișcării se scrie

$$\ddot{x}\frac{4\pi R^3}{3}\rho_m g = G + C - A \tag{20}$$

care se mai pune și sub forma

$$\ddot{x} = g\left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right) + \frac{3}{4}C_R\varphi_v^2\frac{H}{R}\frac{\rho}{\rho_m}g = gB \tag{21}$$

H reprezintă adîncimea de fixare a pompei, φ_v coeficientul de viteză al orificiului supapei iar

$$B = 1 - \frac{\rho}{\rho_m} + \frac{3}{4}C_R\varphi_v^2\frac{H}{R}\frac{\rho}{\rho_m}.$$

Coeficientul de viteză are valori subunitare și este dependent de rezistențele locale precum și de geometria sistemului de deschidere al supapei.

Condițiile la limită pe care le satisface ecuația (21) sînt

$$\begin{aligned} &\text{la } t = 0 \quad x = l_c \\ &\text{la } t = 0 \quad x = 0 \end{aligned} \tag{22}$$

În cazul în care parametrul B se admite constant ecuația (21) se integrează cu ușurință și se obține

$$x = l_c - \frac{1}{2}gBt^2. \tag{23}$$

Durata de timp t_a care trece din momentul în care începe cursa ascendentă a garniturii pînă ce supapa atinge scaunul poate fi calculată punînd condiția ca distanța ce o parcurge supapa $\left(l_c - \frac{1}{2}gBt^2\right)$ să fie egală cu lungimea cursei de fund S a UP care are expresia [1, 2]

$$S = Kkr\left(1 - \cos\varphi + \frac{r}{2l}\sin^2\varphi\right) \tag{24}$$

unde K este factorul de supracursă, raportul $\frac{r}{l}$ depinde de UP aleasă iar φ reprezintă unghiul efectuat de butonul manivelei; k este egal cu raportul a/b (fig. 3).

Ipoteza de calcul admisă duce la scrierea egalității

$$l_c - \frac{1}{2} gBt_a^2 = \\ = Kkr\left(1 - \cos \varphi_a + \frac{r}{2l} \sin^2 \varphi_a\right). \quad (25)$$

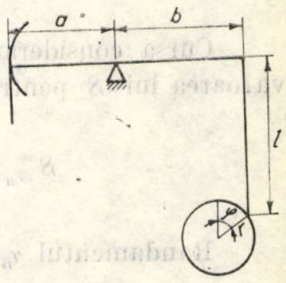


Fig. 3

φ_a este unghiul parcurs de butonul manivelei în perioada de timp t_a. Dacă se admit aproximațiile

$$\cos \varphi_a \approx 1 \\ \sin \varphi_a \approx \varphi_a \quad (26)$$

și se ia raportul $\frac{r}{l}$ cu valoarea constantă și anume 0,4 rezultă că ecuația (25) se scrie

$$l_c - 0{,}5\, gBt_a^2 = 0{,}2\, \varphi_a^2 Kkr. \quad (27)$$

Pe altă parte, între unghiul φ_a și viteza unghiulară ω a UP există relația

$$\varphi_a = \omega l_c \quad (28)$$

Din cauza acestora, rezultă imediat

$$l_c = \left((0{,}2\, Kkr + \frac{0{,}5\, gB}{\omega^2}\right) \varphi_a^2 \quad (29)$$

de unde se deduce

$$\varphi_a = \omega \sqrt{\frac{l_c}{0{,}2\, Kkr\omega^2 + 0{,}5\, gB}}. \quad (30)$$

Apare evident că pe măsură ce unghiul φ_a este mai mare închiderea supapei se efectuează mai încet ceea ce duce la o diminuare a randamentului η_i la închiderea supapei. Randamentul η_i la închiderea supapei se definește potrivit formulei

$$\eta_i = \frac{S|_{\varphi_a}^{\pi}}{S|_0^{\pi}} \quad (31)$$

unde $S|_0^{\pi}$ reprezintă cursa de fund a UP iar $S|_{\varphi_a}^{\pi}$ cursa efectivă în care petrolul este antrenat la suprafață.

Cursa „consumată" la nivelul pompei $S|_0^{\pi}$ se determină cu ușurință dacă se face diferența dintre expresia lui S dată de (24) pentru $\varphi = \pi$ și S calculează tot cu (24) pentru unghiul φ egal cu zero.

În urma acestui calcul se obține

$$S|_0^{\pi} = 2kr \tag{32}$$

Cursa considerată „utilă", $S|_{\varphi_a}^{\pi}$, se determină ca diferența între valoarea lui S pentru $\varphi = \pi$ și S pentru $\varphi = \varphi_a$. Astfel, se găsește

$$S|_{\varphi_a}^{\pi} = Kkr\left(1 + \cos\varphi_a - \frac{r}{2l}\sin^2\varphi_a\right). \tag{33}$$

Randamentul η_i va avea expresia

$$\eta_i = \frac{1 + \cos\varphi_a - \frac{r}{2l}\sin^2\varphi_a}{2}. \tag{34}$$

Dacă și acum se alege $\frac{r}{l} \approx 0{,}4$ și se admit aproximațiile (26) randamentul η_i va avea expresia

$$\eta_i = 1 - 0{,}1\varphi_a^2 \tag{35}$$

în care unghiul φ_a este dat de către (30).

La calculul randamentului η_i nu s-a avut în vedere scurgerea fluidului prin spațiul inelar dintre piston și cilindru [5, 6, 7].

3. RANDAMENTUL LA DESCHIDEREA SUPAPEI

Deschiderea supapei ar trebui să se facă în momentul în care începe cursa descendentă a UP. Aceasta teoretic ar trebui deci să se realizeze în momentul în care unghiul de la butonul manivelei atinge valoarea $\varphi = \pi$; supapa fiind deschisă pînă ce unghiul φ ajunge egal cu 2π.

În realitate apare o întîrziere la deschiderea supapei care este datorată compresibilității fluidului situat sub pompă.

Se poate admite că supapa se ridică în momentul în care se îndeplinește condiția

$$F_c + \frac{\pi d_s^2}{4} p_s \geqslant F_t. \tag{36}$$

Forța datorită compresibilității fluidului F_c se determină din definiția coeficientului de compresibilitate β al fluidului de sub pompă.

Astfel, se știe că [4]

$$\beta = \frac{1}{V} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta p} \tag{37}$$

V este volumul fluidului comprimat, Δp creșterea de presiune ce duce la scăderea lui V cu valoarea ΔV.

Dacă se are în vedere că volumul V se calculează cu formula

$$V = \frac{\pi d_p^2}{4}(KS - \lambda) \tag{38}$$

se găsește

$$\beta = \frac{\Delta h}{KS - \lambda} \cdot \frac{1}{\Delta p}. \tag{39}$$

În ultimele relații cu d_p s-a notat diametrul pistonului, cu λ alungirea sistemului de prăjini de pompare — coloana țevilor de extracție iar Δh reprezintă deplasarea pistonului pînă în momentul deschiderii supapei. Datorită acestor formule, rezultă că

$$F_c = \frac{\pi d_s^2}{4}\Delta p = \frac{\pi d_s^2}{4} \cdot \frac{\Delta h}{\beta(KS - \lambda)}. \tag{40}$$

Se poate admite că Δh se determină ca diferența între cursa pistonului pentru unghiul $\varphi = \pi$, moment în care ar trebui să se deschidă supapa, și valoarea aceleași curse pentru $\varphi = \varphi_d$; φ_d este unghiul executat de către butonul manivelei cînd se ridică supapa

$$\Delta h = S|_{\varphi=\pi} - S|_{\varphi=\varphi_d} = Kkr\left(1 + \cos\varphi_d - \frac{r}{2l}\sin^2\varphi_d\right). \tag{41}$$

Dacă se are în vedere și formula (39) se găsește imediat

$$Kkr\left(1 + \cos\varphi_d - \frac{r}{2l}\sin^2\varphi_d\right) \geqslant \left(\frac{4F_t}{\pi d_s^2} - p_s\right)\beta(2\,Kkr - \lambda) \tag{42}$$

În situația că se admite $\lambda \ll 2Kkr$ și se notează

$$p_c = 2\left(\frac{4F_t}{\pi d_s^2} - p_s\right)$$

inecuația (36) se scrie

$$1 + \cos\varphi_d - \frac{r}{2l}\sin^2\varphi_d \geqslant p_c \cdot \beta. \tag{43}$$

Tot pentru cazul $\frac{r}{l} \approx 0{,}4$, valoarea frecvent întîlnită la UP, ultima relație se pune

$$2\cos^2\frac{\varphi_d}{2} - 0{,}8\left(1 - \cos^2\frac{\varphi_d}{2}\right)\cos^2\frac{\varphi_d}{2} \geqslant \beta \cdot p_c \tag{44}$$

Prin introducerea notației

$$y = \cos^2\frac{\varphi_d}{2}$$

ecuația obținută din (44) devine

$$0{,}8y^2 + 1{,}2y - p_c\beta = 0 \tag{45}$$

ale cărei soluții sînt

$$y_1 = \frac{-0{,}6 + \sqrt{0{,}36 + 0{,}8p_c\beta}}{0{,}8}; \qquad y_2 = \frac{-0{,}6 - \sqrt{0{,}36 + 0{,}8p_c\beta}}{0{,}8} \tag{46}$$

Apare evident că singura soluție cu sens fizic este y_1. La aceasta se poate aplica o formulă simplificată pentru radicalul din expresia lui y_1. Astfel, se știe că pentru un argument x mic se scrie

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}. \tag{47}$$

Cu această aproximație rezultă expresia lui y_1

$$y_1 = 0{,}5\beta p_c \tag{48}$$

ceea ce înseamnă că

$$\cos\frac{\varphi_d}{2} = \pm\sqrt{0{,}5\beta \cdot p_c} \tag{49}$$

unghiul φ_d are în acest fel expresia

$$\varphi_d = -2\arccos\sqrt{0{,}5\beta \cdot p_c}. \tag{50}$$

Se observă cu ușurință că pentru un petrol incompresibil, $\beta = 0$, se obține $\varphi_d = \frac{\pi}{2} \cdot 2 = \pi$ ceea ce înseamnă că ridicarea supapei se face imediat ce începe cursa descendentă a UP.

La celălalt caz limită, și anume cînd sub pompă se află gaz, acesta se poate considera că are pe rînd o evoluție izotermă ceea ce face să se scrie

$$\beta \cdot p_c = 1 \tag{51}$$

sau o evoluție adiabată pentru care relația anterioară devine

$$\varkappa \beta p_c = 1 \tag{52}$$

$\varkappa$ este exponentul adiabatic al gazului. Exponenții adiabatici au valorile: 1,32 pentru metan, 1,18 pentru etan, 1,12 pentru propan, etc.

Pentru o evoluție izotermă a gazului, rezultă

$$\varphi_d = -2 \arccos \sqrt{0{,}5} = \frac{3}{2}\pi \tag{53}$$

ceea ce face ca randamentul la deschiderea supapei să fie

$$\eta_d = \frac{S\big|_{2\pi}^{\varphi_d}}{S\big|_{2\pi}^{\pi}} \tag{54}$$

$S\big|_{2\pi}^{\pi}$ este diferența dintre cursa pistonului pentru $\varphi = \pi$ și cursa cînd unghiul efectuat de butonul manivelei este 2π, iar $S\big|_{2\pi}^{\varphi}$ este diferența dintre cursele pistonului la unghiul φ_d și, respectiv, 2π.

Pentru $\varphi_d = \frac{3}{2}\pi$ rezultă imediat

$$S\big|_{2\pi}^{\varphi_d} = kr\left[\left(1 - \cos\frac{3}{2}\pi + \frac{r}{2l}\sin^2\frac{3}{2}\pi\right) - \right.$$

$$\left. - \left(1 - \cos 2\pi + \frac{r}{2l}\sin^2 2\pi\right)\right] = kr\left(1 + \frac{r}{2l}\right) \tag{55}$$

și în mod similar se găsește

$$S\big|_{2\pi}^{\pi} = 2kr \tag{56}$$

ceea ce înseamnă că pentru o evoluție izotermă a gazului randamentul la deschiderea supapei este

$$\eta_d = \frac{kr\left(1 + \frac{r}{2l}\right)}{2kr} = \frac{1 + \frac{r}{2l}}{2} = 0{,}6. \tag{57}$$

La obținerea acestui rezultat și acum s-a considerat $\frac{r}{l} = 0{,}4$. Dacă evoluția gazului este adiabată și se admite că sub supapă se află metan, pentru care se ia exponentul adiabatic $\varkappa = 1{,}32$, rezultă că

$$\beta p_c = \frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{1{,}32} = 0{,}7575 \tag{58}$$

ceea ce face ca unghiul φ_d să aibă acum valoarea

$$\varphi_d = -2 \arccos \sqrt{0{,}5 \times 0{,}7575} = -2 \arccos \sqrt{0{,}37875} = 255{,}96^\circ \tag{59}$$

Cu această valoare a unghiului φ_d rezultă

$$S\Big|_{2\pi}^{\varphi_d} = kr\left[\left(1 - \cos\varphi_d + \frac{r}{2l}\sin^2\varphi_d\right) - \right.$$

$$\left. - \left(1 - \cos 2\pi + \frac{r}{2l}\sin^2 2\pi\right)\right] = kr\left(1{,}2426 + 0{,}4706\frac{r}{l}\right). \tag{60}$$

Utilizînd și de această dată $\frac{r}{l} = 0{,}4$, pentru cursa consumată $S\Big|_{2\pi}^{\pi} = 2kr$ rezultă că la o evoluție adiabată a gazului de sub pompă, supapa va avea randamentul

$$\eta_{id} = \frac{1{,}4308 \cdot kr}{2kr} = 0{,}7154 \tag{61}$$

valoare care este suficient de apropiată de aceea pentru o evoluție izotermă a gazului. Cu toate că randamentele la deschiderea supapei sînt pozitive la cele două evoluții ale gazului, în realitate debitele de petrol sînt nule deoarece sub supapa pompei se află doar gaz.

Pentru un petrol cu un coeficient de compresibiltate $\beta = 1{,}6 \cdot 10^{-8}$ m²/N și o valoare a presiunii în care F_t, calculată cu formula (18), și se ia p_s din expresia presiunii p_c egală cu zero, rezultă valoarea acesteia

$$p_d = 2\frac{4 \times 233{,}4445}{\pi \cdot 0{,}025^2} = 9{,}5114 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

Forța F_t s-a obținut egală cu 233,4445 N deoarece s-a ales o pompă de 2 7/8″ ale cărei elemente geometrice sînt:

$r_1 = 0{,}021$; $r_2 = 0{,}025$, $h = 0{,}017$; $d_s = 0{,}016$ și $R = 0{,}0214$ m

4. CONCLUZII

Randamentele supapelor la închiderea şi deschiderea acestora depind de mai mulţi parametri.

Astfel, randamentul la închiderea supapei depinde de lungimea cursei executată de către supapă, de caracteristicile UP, precum şi de parametrul complex B. Acesta din urmă este dependent de flotabilitatea supapei, adică raportul ρ/ρ_m, de adîncimea de fixare a pompei, de raza supapei precum şi de coeficientul de viteză şi acela de rezistenţă la înaintare.

Randamentul la deschiderea supapei depinde cel mai mult de compresibilitatea petrolului situat sub pompă. Este posibil ca scurgerea petrolului, mai ales a aceluia cu particule solide, pe lîngă piesele componente ale pompei să explice gradele diferite de comportare ale pompelor descrise în lucrarea [8].

Primit în redacţie la 20 ianuarie 1989

BIBLIOGRAFIE

1. GR. IOACHIM, *Extracţia petrolului şi gazelor*, Editura tehnică, Bucureşti, 1965, p. 266—272.
2. N. PETRE, C. CHIŢU-MILITARU, *Extracţia ţiţeiului prin pompaj cu prăjini*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1986, p. 344—357.
3. T. OROVEANU, S. POPOVICIU, AL. D. STAN, *Pierderile de gaze din reţeaua de distribuţie*. St. cerc. mec. apl., **40**, *3* (1981).
4. T. OROVEANU, AL. D. STAN, V. TALLE, *Transportul petrolului*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1985, p. 32—35.
5. AL. D. STAN, *Curgerea laminară a fluidelor prin spaţii inelare*, St. cerc. mec. apl., **36**, *5* (1979).
6. AL. D. STAN, *Mişcări turbulente prin spaţii inelare*. St. cerc. mec. apl., **36**, *6* (1979).
7. AL. D. STAN, I. TUDOR, D. STOIANOVICI, *Alunecarea exactă la pompele de adîncime*, Mine, Petrol şi Gaze, **39**, *3* (1988).
8. C. ŞERBAN, *Considerente constructive în fabricaţia noilor tipuri de pompe de extracţie cu cilindru lung şi piston metalizat*, Mine, Petrol şi Gaze, **37**, *11* 1986).

CERCETĂRI TEORETICO-EXPERIMENTALE PRIVIND DETERMINAREA PULSAȚIILOR PROPRII ALE OSCILAȚIILOR LONGITUDINALE ALE GARNITURII DE FORAJ

de S. CHERGUI
ENTP, NASSI MESSAOUD *)

Lucrarea analizează, teoretic și experimental, problema determinării pulsațiilor proprii axiale ale ansamblului format din mast, geamblac, macara-cîrlig, garnitura de prăjini. Pentru acest ansamblu se stabilește un model dinamic adecvat, pe baza căruia se elaborează un algoritm general pentru determinarea pulsațiilor proprii, care a fost transpus într-un program pentru calculatoare electronice cifrice. Cu acest program s-au determinat pulsațiile proprii pentru situații de alcătuire ale garniturilor de foraj. Determinările experimentale s-au efectuat la o sondă de mare adîncime, prin înregistrări de eforturi dinamice care se dezvoltă în timpul operațiilor de manevră, foarte frecvente în exploatarea sondelor.
Folosind rezultatele experimentale și cele teoretice, între care există o bună concordanță, sînt evidențiate influențele asupra dinamicii ansamblului a unor factori, cum ar fi racordurile speciale, fluidul de foraj, rigiditatea mastului etc.

1. INTRODUCERE

Pentru optimizarea proceselor de manevră la instalațiile de foraj în scopul desfășurării acestora cu viteze economice și fără apariția unor accidente de foraj sau a unor avarii la instalația de suprafață, este necesară cercetarea dinamicii ansamblului alcătuit din mast, geamblac, cablu, macara-cîrlig, garnitura de foraj și fluidul de foraj (luat ca masă).

În cadrul cercetărilor dinamice este necesară determinarea pulsațiilor proprii ale oscilațiilor longitudinale ale ansamblului sus menționat, în vederea stabilirii deplasărilor și eforturilor în diferite secțiuni ale acestuia în timpul proceselor tranzitorii.

Prin cercetarea experimentală, în condiții de șantier, se urmărește confirmarea, infirmarea sau corectarea aproximațiilor luate în considerare în cadrul cercetărilor teoretice.

2. MODELUL DINAMIC AL ANSAMBLULUI

În literatura tehnică de specialitate, se întîlnesc multe lucrări privind cercetările vibrațiilor longitudinale ale garniturilor de foraj [2], [3], [4], [5], [7], [8], [9], [10], [11], [13], [19], atît în timpul forajului cît și la operațiile de manevră. În legătură cu modelele dinamice utilizate în lucrările respective se fac următoarele observații:

a) în unele lucrări, de exemplu [6], se consideră o singură masă rigidă a ansamblului studiat, obținută prin neglijarea proprietăților elastice ale tuturor elementelor componente;

*) Algeria

b) alte lucrări [8], [9], [10] consideră mai multe mase concentrate, reunite cu legături elastice fără masă;

c) lucrările [11], [18] consideră numai partea prăjinilor de foraj cu caracteristici distribuite, dar cu neglijarea racordurilor speciale și a fluidului de foraj;

d) lucrările [5], [7], [19] utilizează modelele dinamice în care unele elemente ale ansamblului (prăjini de foraj și prăjini grele) au caracteristici distribuite, dar se neglijează influența racordurilor speciale ale prăjinilor de foraj și a fluidului de foraj;

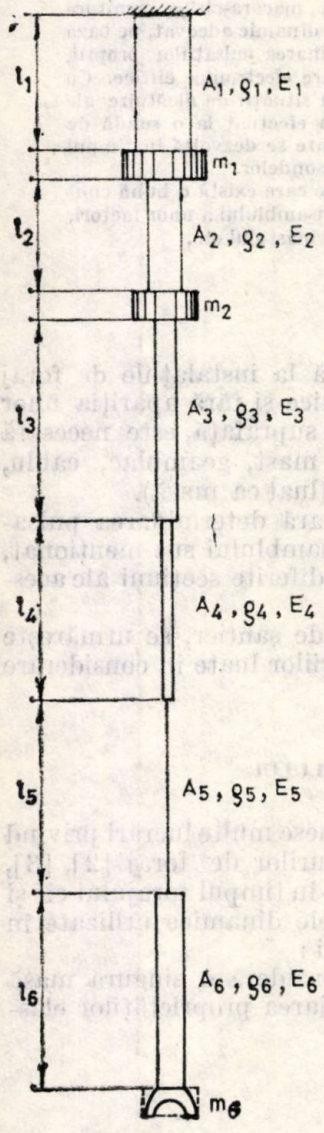


Fig. 1

e) lucrarea [13], consideră atît caracteristici distribuite a prăjinilor de foraj și prăjinilor lor grele cît și influența racordurilor speciale, dar neglijează influența fluidului de foraj;

f) lucrările [2], [3], [4] utilizează un model dinamic alcătuit din elementele ansamblului cercetat cu caracteristici distribuite și ia în considerare existența racordurilor speciale ale prăjinilor de foraj, influența fluidului de foraj în sondă și disipărilor energetice interne ale elementelor componente;

g) majoritatea lucrărilor analizate prezintă cercetări teoretice fără confirmări experimentale.

În prezenta lucrare se consideră caracteristici distribuite (masa și elasticitatea) pentru elementele ansamblului cercetat (mast, cablu, prăjini de foraj și prăjini grele). Rezultă modelul dinamic (al ansamblului) prezentat în figura 1, în care notațiile au următoarele semnificații: l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 și l_6 sînt lungimile mastului, cablului, tronsonului prăjinilor de foraj de diametrul nominal 5 în (127 mm), tronsonul prăjinilor de foraj de diametrul nominal 4 in (101,6 mm), tronsonului prăjinilor de foraj de diametrul nominal 3 1/2 in (88,9 mm) și a tronsonului prăjinilor grele de diametru nominal 4 3/4 in (120,65 mm); A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 și A_6 — aria echivalentă a secțiunii transversale a tronsoanelor prăjinilor de foraj și cele grele; ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, ρ_5 și ρ_6 — masa specifică echivalentă a mastului, a cablului și masa specifică a tronsoanelor prăjinilor de foraj și cele grele; $E_1 = E_3 = E_4 = E_5 = E_6 = 2{,}1 \times 10^{11}$Pa modulul de elasticitate longitudinală a mastului respectiv a tronsoanelor prăjinilor de foraj și cele grele; E_2 — modulul de elasticitate longitudinală al cablului; m_1, m_2 și m_6 — masele geamblacului, a sarcinii moarte la manevră (macara-cîrlig, chiolbași și elevator) respectiv a sapei.

Se menționează că la elaborarea modelului dinamic (figura 1) au fost acceptate următoarele aproximații :

a) s-au neglijat proprietățile elastice ale geamblacului, ale macaralei-cîrlig și ale sapei ;

b) nu s-au luat în considerare proprietățile elastice ale substructurii ;

c) existența racordurilor speciale și ale fluidului de foraj s-au introdus prin mărirea masei distribuite a prăjinilor, considerate ca un mediu continuu avînd legea constitutivă :

$$\sigma = E\varepsilon \tag{1}$$

în care σ este tensiunea normală ; E — modul de elasticitate longitudinală ; ε — deformația specifică.

3. ALGORITM ȘI PROGRAM PENTRU DETERMINAREA PULSAȚIILOR PROPRII

Pulsațiile proprii longitudinale ale ansamblului mast, geamblac, cablu, macara-cîrlig, garnitura de foraj se determină fără luarea în considerare a fenomenelor de amortizare, întrucît influența acestora asupra valorilor pulsațiilor proprii este neglijabilă [16].

3.1. STABILIREA ECUAȚIEI DE MIȘCARE PENTRU O BARĂ CU MASĂ CONTINUĂ

Se izolează un element dx (pe orice tronson de lungime l_i al modelului dinamic) și se introduc (figura 2) forțele de legătură, forțele de inerție și forțele perturbatoare $f(x, t)$.

Din ecuația de proiecții pe axa x, rezultă ecuația :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \overline{m}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x, t) \tag{2}$$

în care $\overline{m} = \rho A$ este masa pe unitatea de lungime, uniform distribuită pe lungimea l_i. Alegînd semnul pozitiv al efortului N_x ca în figura 2, relația între efortul axial N_x și deplasarea u va fi

$$N_x = -EA\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{3}$$

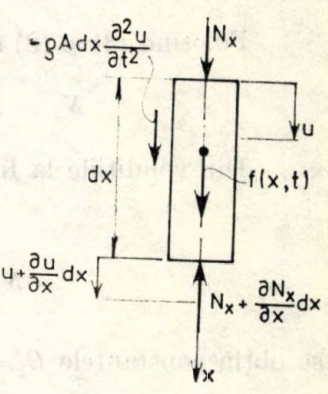


Fig. 2

Introducînd (3) în (2) rezultă ecuația

$$EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -f(x, t) \tag{4}$$

care descrie mișcarea unui punct oarecare.

3.2. STUDIUL VIBRAȚIILOR LIBERE ALE UNEI BARE CU MASĂ CONTINUĂ

Dacă $f(x, t) = 0$, ecuația (4) devine :

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{5}$$

și descrie vibrațiile axiale (longitudinale) libere ale modelului dinamic.

Soluția ecuației (5) se alege sub forma :

$$u(x, t) = u(x) \cos (pt - \nu),$$

ceea ce conduce la ecuația diferențială a deformatei maxime în vibrația liberă :

$$u_x'' + \frac{\bar{m} p^2}{EA} u_x = 0 \tag{6}$$

Notînd

$$K^2 = \frac{\bar{m} p^2}{EA}; \quad K = p \sqrt{\frac{\bar{m}}{EA}} \tag{7}$$

unde p este pulsația proprie, ecuația (6) devine

$$u_x'' + K^2 u_x = 0 \tag{6'}$$

și are soluția sub forma :

$$u_x = C_1 \cos Kx + C_2 \sin Kx. \tag{8}$$

Folosind (3) și (8) se obține expresia efortului axial :

$$N_x = K\, EA\, (C_1 \sin Kx - C_2 \cos Kx) \tag{9}$$

Din condițiile la limită

$$u_x|_{x=0} = u_1 = C_1;$$

$$N_x|_{x=0} = N_1 = - K\, EA\, C_2$$

se obțin constantele $C_1 = u_1$: $C_2 = - \frac{N_1}{K\, EA}$, care introduse în (8) și (9) conduc la amplitudinile

$$u_x = u_1 \cos Kx - \frac{N_1}{K\, EA} \sin Kx; \tag{10}$$

$$N_x = K\, EA\, u_1 \sin Kx + N_1 \cos Kx \tag{11}$$

Expresiile deplasării și efortului în vibrația liberă stabilizată sînt :

$$u(x, t) = \left(u_1 \cos Kx - \frac{N_1}{KEA} \sin Kx\right) \cos (pt - \nu) \tag{12}$$

$$N(x, t) = KEA \left(u_1 \sin Kx + \frac{N_1}{KEA} \cos Kx\right) \times$$

$$\times \cos (pt - \nu) \tag{13}$$

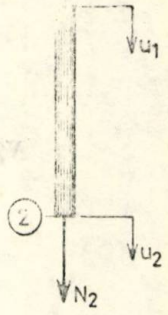


Fig. 3

Expresiile u_2 și N_2, funcție de u_1 și N_1, (figura 3) vor fi :

$$u_2 = \left(u_1 \cos Kl - \frac{N_1}{KEA} \sin Kl\right) \cos (pt - \nu) \tag{14}$$

$$N_2 = \left[KEA \left(u_1 \sin Kl + \frac{N_1}{KEA} \cos Kl\right)\right] \cos (pt - \nu) \tag{15}$$

3.3. PROCEDEU ITERATIV PENTRU DETERMINAREA PULSAȚIILOR ȘI FORMELOR PROPRII DE OSCILAȚIE

Folosind notațiile

$$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}; \quad b = EAK \tag{16}$$

unde a reprezintă viteza axială de propagare a undelor axiale, mărimea K precizată de (7) se exprimă sub forma

$$K = p \sqrt{\frac{\overline{m}}{EA}} = p \sqrt{\frac{\rho}{E}} = \frac{p}{a} \tag{17}$$

în care p reprezintă pulsația proprie a ansamblului.

Se consideră tronsoanele $(i - 1, i)$ și $(i, i + 1)$ cu masă continuă avînd la legătura dintre ele masa concentrată m_i (figura 4, a).

Se izolează nodul i (figura 4 ,b) și se introduc forțele de legătură și forța de inerție. Aplicînd relațiile (14) și (15) se obțin expresiile :

$$u_i^{st} = u_i = u_{i-1} \cos \frac{p}{a} l_{i-1} - \frac{N_{i-1}^{dr}}{b_{i-1}} \sin \frac{p}{a} l_{i-1} \tag{18}$$

$$N_i^{st} = u_{i-1} b_{i-1} \sin \frac{p}{a} l_{i-1} + N_{i-1}^{dr} \cos \frac{p}{a} l_{i-1} \tag{19}$$

Pentru partea dreaptă a nodului i, folosind (18), (19) și echilibrul nodului rezultă:

$$u_i^{dr} = u_i = u_{i-1} \cos \frac{p}{a} l_{i-1} - \frac{N_{i-1}^{dr}}{b_{i-1}} \sin \frac{p}{a} l_{i-1} \tag{20}$$

$$N_i^{dr} = u_{i-1} b_{i-1} \sin \frac{p}{a} l_{i-1} + N_{i-1}^{dr} \cos \frac{p}{a} l_{i-1} + m_i p^2 u_i \tag{21}$$

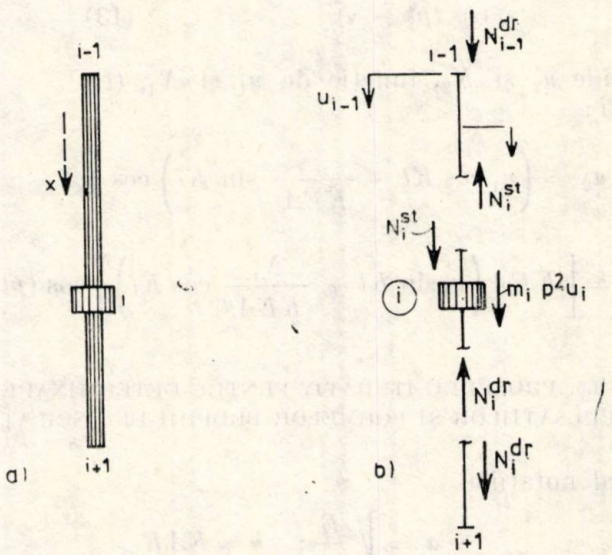


Fig. 4

Cu aceste relații (18), (19), (20), (21) se pot calcula deplasările și eforturile la capetele oricărui tronson al modelului dinamic (figura 1).

Întrucît la fiecare din capetele modelului este cunoscut unul din parametri u sau N, calculul se desfășoară astfel: se adoptă o valoare pentru parametrul necunoscut din origine și o valoare pentru pulsația p și se determină parametrii u și N, cu relațiile (20), (21), pînă la extremitatea ultimului tronson; la această extremitate trebuie îndeplinită condiția limită corespunzătoare parametrului cunoscut; se dau diferite valori pulsației p pînă cînd condiția limită este îndeplinită. Valorile p care conduc la îndeplinirea condiției limită sînt pulsațiile proprii ale sistemului, iar ordonatele u corespunzătoare precizează forma proprie de oscilație.

Acest procedeu de calcul a fost transpus într-un program denumit CPAGF (Calculul pulsațiilor axiale ale garniturii de foraj) cu ajutorul căruia s-au determinat pulsațiile proprii și modurile de oscilație pentru ansamblul unei instalații de foraj compus din mast, geamblac, cablu, macara-cîrlig, garnitura de foraj.

4. INSTALAȚIA DE FORAJ FOLOSITĂ LA EXPERIMENTE

Cercetările experimentale au fost efectuate la o instalație de foraj, F 400--EC, în condiții de lucru, la o sondă cu adîncime de 6766 m, din care 6484 m a fost tubată în felul următor :

a) Coloana de burlane de diametru exterior 9 5/8 in (244, 475 mm) cu diametrul interior de 216,8 mm de la suprafață pînă la adîncimea de 5080 m ;

b) Coloana pierdută de diametrul exterior 7 in (177,8 mm) cu diametrul interior de 150,36 mm de la 4930 m pînă la adîncimea de 6484 m.

Sonda conținea fluidul de foraj cu următoarele caracteristici : $\rho_f = 1450$ kg/m^3, masa specifică ; $\eta_p = 34$ mPa, vîscozitatea plastică ; $\tau_0 = 16$ Pa, tensiunea dinamică.

Garnitura de foraj manevrată a fost alcătuită din patru tronsoane din care trei tronsoane ale prăjinilor de foraj cu unele caracteristici (după API Sped. 5 A și 5 AX și API — RP. 7 G — 1980) indicate în tabelul 1 și un tronson de prăjini grele cu unele caracteristici (după STAS 1898/71) din tabelul 2.

Tabelul 1

Prăjini de foraj		Grosimea peretelui [mm]	Racorduri speciale	Numărul total de pași	Lungimea totală [m]	Pași manevrate
$\Phi_{nominal}$ [in]	$\Phi_{nominal}$ [mm]					
5	127	9,19	NC 50(41/2 IF)	113	3143	1 ; 9 ; 37 ; 43 și 45
4	101,6	8,38	NC 46(4 IF)	52	1483,36	1 ; 11 ; 21 ; 36 ; 40 și 47
3 1/2	88,9	11,4	NC 38(31/2 IF)	70	2005,72	41 și 61

Tabelul 2

Prăjini grele		Grosimea peretelui [mm]	Numărul total de bucăți	Lungimea totală [m]
$\Phi_{nominal}$ [in]	$\Phi_{nominal}$ [mm]			
4 3/4	120,65	31,75	15	125,56

De remarcat faptul că prăjinile de foraj și prăjinile grele sînt confecționate din material API — S 135.

4.1. DETERMINĂRI EXPERIMENTALE

La efectuarea măsurătorilor a fost utilizată metoda tensometriei electrice rezistive [1], [20]. Au fost utilizate traductoare (mărci tensometrice) monoaxiale, mărimile măsurate experimental fiind :

a) forța dinamică axială la partea de jos a piciorului mastului (într-un montant), cu traductoare montate în semipunte ;

b) forța dinamică axială și momentul încovoietor în montanții mastului, deasupra platformei de lucru, cu traductoare montate în punte completă;

c) forța dinamică axială, sub podul podarului, într-un montant, cu traductoare montate în semipunte;

d) forța dinamică axială la un chiolbaș, cu traductoare montate în semipunte.

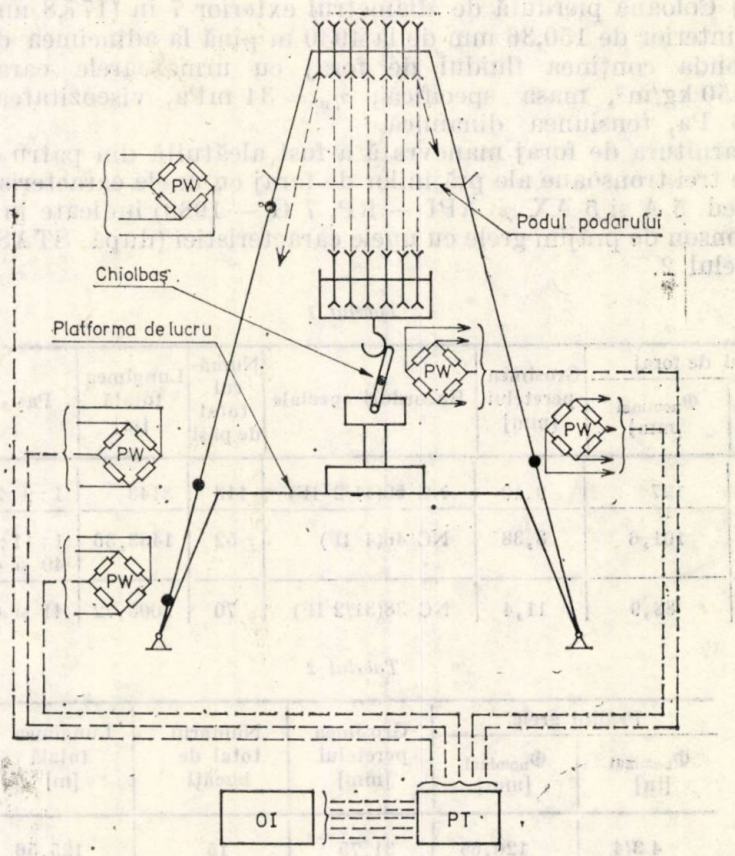


Fig. 5

Figura 5 arată schematic mastul instalației, punctele unde au fost amplasate traductoarele și modul în care acestea au fost montate.

Experiențele au constat din înregistrări ale deformațiilor specifice în punctele menționate pentru anumite manevre specifice cum ar fi smulgerea din pene, începutul ridicării sau coborîrii, regim stabilizat de coborîre sau ridicare a garniturii, operații de frînare și prinderea în pene.

4.2. DETERMINAREA PULSAȚIILOR PROPRII DIN ANALIZA OSCILOGRAMELOR EXPERIMENTALE

Oscilogramele înregistrate reprezintă variația parametrilor măsurați în funcție de timp. La desprinderea din pene se observă o oscilație liberă generală corespunzătoare pulsației fundamentale (figura 6, a), peste care se suprapune unele armonice superioare. Ținînd seama de viteza hîrtiei de 25 mm/s și de distanța corespunzătoare unei perioade rezultă pulsația proprie $p = 1{,}963$ rad/s.

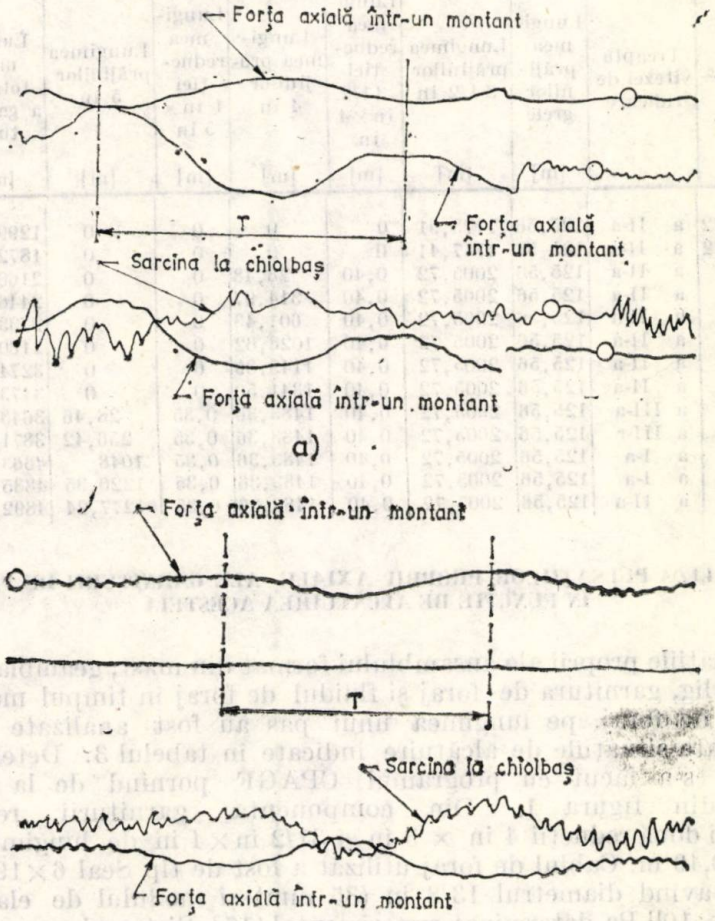


Fig. 6

În figura 6,b se reprezintă oscilograma unui sfîrșit de ridicare în care se observă, de asemenea, o oscilație generală cu pulsația fundamentală egală cu 2,181 rad/s.

În oscilogramele date sînt indicate oscilațiile axiale a trei montanți ai mastului și a chiolbașului. Se observă că chiolbașul are o mișcare compusă din mai multe armonice.

Garnitura de foraj a fost manevrată în alcătuiri diferite și pulsațiile proprii fundamentale deduse din înregistrări sînt trecute în tabelul 3. Modul de alcătuire al garniturii pentru fiecare situație este indicat în tabelul 3 folosind notațiile din figura 1.

Tabelul 3

Pasul manevrat		Treapta vitezei de ridicare	Lungimea prăjinilor grele	Lungimea prăjinilor 3 1/2 in	Lungimea reducției 3 1/2 in × 4 in	Lungimea prăjinilor 4 in	Lungimea reducției 4 in × 5 in	Lungimea prăjinilor 5 in	Lungimea totală a garniturii	Pulsația proprie fundamentală a ansamblului
Număr	Prăjini		[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[rad/s]
41	3 1/2	a II-a	125,56	1173,91	0	0	0	0	1299,47	4,243
61	3 1/2	a II-a	125,56	1747,41	0	0	0	0	1872,97	3,140
1	4	a II-a	125,56	2005,72	0,40	28,48	0	0	2160,36	2,706
11	4	a II-a	125,56	2005,72	0,40	314,97	0	0	2446,65	2,347
21	4	a II-a	125,56	2005,72	0,40	601,43	0	0	2733,11	2,181
36	4	a II-a	125,56	2005,72	0,40	1028,62	0	0	2160,30	2,093
40	4	a II-a	125,56	2005,72	0,40	1143,09	0	0	3274,77	1,963
47	4	a II-a	125,56	2005,72	0,40	1341,50	0	0	3473,18	1,745
1	5	a III-a	125,56	2005,72	0,40	1483,36	0,35	28,46	3643,85	1,602
9	5	a III-r	125,56	2005,72	0,40	1483,36	0,35	256,42	3871,81	1,554
37	5	a I-a	125,56	2005,72	0,40	1483,36	0,35	1048	4663,39	1,414
43	5	a I-a	125,56	2005,72	0,40	1483,36	0,35	1220,35	4835,74	1,377
45	5	a II-a	125,56	2005,72	0,40	1483,36	0,35	1277,24	4892,63	1,353

5. ANALIZA PULSAȚIILOR PROPRII AXIALE ALE GARNITURII DE FORAJ ÎN FUNCȚIE DE ALCĂTUIREA ACESTEIA

Oscilațiile proprii ale ansamblului format din mast, geamblac, cablu, macara-cîrlig, garnitura de foraj și fluidul de foraj în timpul manevrării garniturii de foraj, pe lungimea unui pas au fost analizate teoretic pentru toate situațiile de alcătuire indicate în tabelul 3. Determinarea pulsațiilor s-a făcut cu programul CPAGF pornind de la modelul dinamic din figura 1. Din componenta garniturii respective fac parte și două reducții 4 in × 5 in și 31/2 in × 4 in de lungimi 0,35 m, respectiv 0,40 m. Cablul de foraj utilizat a fost de tip Seal 6 × 19, STAS 1689—80, avînd diametrul 13/8 in (35 mm) și modulul de elasticitate $E_C = 1{,}42 \times 10^{11}$ Pa determinat experimental [17]. Sistemul macara-geamblac a fost alcătuit din 6 × 7 role. Instalația de foraj a fost echipată cu mast, MA 400—2, tip A (din țevi) cu înălțimea totală 49,53 m și înălțimea liberă (de la platforma de lucru pînă la geamblac) 44 m.

În modelul dinamic (figura 1), mastul a fost aproximat cu o bară de secțiune constantă, avînd aria secțiunii transversale și lungimea astfel încît rigiditatea axială $K = \frac{EA}{l}$ să corespundă rigidității reale a mastului

$K = 1{,}61749 \times 10^8$ N/m determinată cu ajutorul programului SAP 05, ca pentru o structură spațială cu noduri rigide.

Masele indicate pe modelul dinamic au valorile $m_1 = 7272$ kg; $m_2 = 11570$ kg și $m_6 = 13{,}5$ kg. Sapa are lungimea de 0,20 m, lungimea cablului corespunzătoare poziției inferioare a macaralei-cîrlig este 35 m, iar pentru cea superioară este 8 m.

5.1. DETERMINAREA PULSAȚIILOR PROPRII PENTRU DIFERITE ALCĂTUIRI ALE GARNITURII DE FORAJ

Pe baza algoritmului și programului menționate în capitolul 3, au fost determinate pulsațiile proprii și oscilațiile longitudinale ale ansamblului, prezentate în tabelul 4. Sînt indicate pentru fiecare situație primele patru pulsații proprii.

În coloana A sînt prezentate pulsațiile proprii ale ansamblului neglijînd racordurile speciale a prăjinilor de foraj și prezența fluidului de foraj; coloana B cuprinde pulsațiile proprii luînd în considerare racordurile speciale dar neglijînd fluidul de foraj; coloana C reprezintă pulsațiile respective cu neglijarea racordurilor speciale și luarea în considerare a fluidului de foraj; coloana D indică pulsațiile proprii cu luarea în considerare a racordurilor speciale și a fluidului de foraj.

Luînd în considerare racordurile speciale ale prăjinilor de foraj, vitezele de propagare ale undelor axiale în transoanele 3, 4 și 5 ale modelului dinamic din figura 1 se determină cu formula cunoscută:

$$a = \sqrt{\frac{E}{\rho_e}} \tag{22}$$

în care ρ_e este masa specifică echivalentă a prăjinilor de foraj împreună cu racordurile speciale.

Luînd în considerare fluidul de foraj atît în interiorul prăjinilor cît și în spațiul inelar; viteza de propagare a undelor axiale se determină tot cu formula (22), unde ρ_e se înlocuiește cu $\rho_e^* = \rho + \rho_{ef}$. Densitatea ρ este a materialului iar ρ_{ef} — a fluidului de foraj; aceasta se determină pentru tronsoanele garniturii de foraj, cu formula:

$$\rho_{ef} = \frac{d^2}{D^2 - d^2} \rho_f \cdot \beta \tag{23}$$

în care d este diametrul interior al prăjinilor; D — diametrul exterior al acesteia; $\rho_f = 1459$ kg/m^3 — densitatea specifică a fluidului de foraj; β — coeficient ce ține seama de masa fluidului adăugată care oscilează împreună cu elementele garniturii de foraj.

În lucrarea [14] se analizează oscilațiile transversale și torsionale ale barelor în lichid în funcție de lungimea lor, de forma secțiunilor transversale și de adîncimea de scufundare. În toate cazurile ecuațiile de mi-

Tabelul 4

Pasul manevrat	A ω [rad/s]	B ω [rad/s]	C ω [rad/s]	D ω [rad/s]
41/(31/2 in)	5,119	4,950	4,675	4,544
	16,221	15,510	14,560	14,059
	28,055	26,707	25,031	24,078
	38,006	36,680	34,841	33,662
61/(31/2 in)	3,747	3,602	3,389	3,280
	11,542	11,026	10,341	9,974
	19,782	18,803	17,590	16,909
	28,136	26,706	24,976	23,973
1/(4 in)	3,300	3,166	2,975	2,875
	10,094	9,637	9,034	8,708
	17,210	16,358	15,299	14,706
	24,494	23,229	21,703	20,825
11/4(in)	2,915	2,791	2,619	2,528
	8,902	8,492	7,947	7,655
	15,201	14,441	13,464	12,939
	21,741	20,595	19,142	18,363
21/(4 in)	2,616	2,500	2,343	2,259
	8,037	7,658	7,140	6,874
	13,790	13,085	12,127	11,649
	19,651	18,590	17,173	16,468
36/(4 in)	2,273	2,158	2,028	1,952
	7,081	6,734	6,236	5,997
	12,071	11,433	10,525	10,102
	16,892	15,974	14,737	14,129
40/(4 in)	2,196	2,095	1,957	1,884
	6,868	6,528	6,033	5,800
	11,655	11,035	10,150	9,741
	16,288	15,404	14,209	13,624
47/(4 in)	2,076	1,979	1,847	1,777
	6,527	6,198	5,712	5,489
	10,982	10,393	9,552	9,166
	15,379	14,545	13,404	12,852
1/(5 in)	1,988	1,893	1,766	1,698
	6,270	5,950	5,471	5,256
	10,476	9,913	9,110	8,740
	14,735	13,934	12,823	12,294
9/(5 in)	1,906	1,815	1,691	1,626
	6,023	5,711	5,241	5,033
	9,981	9,443	8,678	8,432
	14,077	13,307	12,219	11,713
37/(5 in)	1,665	1,582	1,470	1,412
	5,134	4,855	4,427	4,246
	8,117	7,680	7,041	6,753
	11,469	10,832	9,896	9,485
43/(5 in)	1,620	1,539	1,428	1,371
	4,935	4,665	4,249	4,075
	7,786	7,368	6,753	6,477
	11,104	10,488	9,585	9,187
45/(5 in)	1,605	1,524	1,415	1,358
	4,870	4,603	4,192	4,019
	7,688	7,276	6,667	6,395
	10,996	10,386	9,492	9,098

care, față de vibrația aceleași bare în aer, se stabilesc prin introducerea unei mase suplimentare:

$$\bar{m}' = \varphi \cdot m' \tag{24}$$

unde m' reprezintă o masă stabilită din condiții hidrodinamice, iar φ un coeficient dependent de numărul armonicii de oscilație și de raportul l/d, cu l lungimea barei și d dimensiunea barei în sensul normalei la planul de oscilație.

Determinările experimentale ale pulsațiilor proprii în aer și lichid au condus la exprimarea masei suplimentare sub forma:

$$m' = \rho A \left(\frac{p_0^2}{p^2} - 1 \right) \tag{25}$$

unde ρ este densitatea materialului; A — aria secțiunii transversale; p_0 — pulsația barei în aer; p — pulsația proprie în fluid.

Lucrarea cuprinde și unele formule de tipul:

$$\bar{m}' = \varkappa \cdot \rho_f \cdot d^2 \tag{26}$$

unde $\varkappa$ este stabilit în funcție de forma secțiunii transversale. Aici ρ_f este densitatea fluidului și d dimensiunea barei normală pe planul de oscilație.

În cazul vibrațiilor axiale ale garniturii de foraj, masa suplimentară care se adaugă masei efective a garniturii se consideră compusă din masa fluidului din interiorul prăjinilor în procent de 60% și masa fluidului aflat în spațiul inelar dintre coloana de burlane și garnitura de foraj în procent de 8%. La aceste valori s-a ajuns prin aplicarea formulei (25) adoptînd pentru raportul $\frac{p_0}{p}$ valori aproximative rezultate din determinări experimentale [14].

Folosind valorile de mai sus se ajunge la

$$\beta = 0{,}6 + 0{,}08 \left(\frac{D_i^2}{d^2} - \frac{D^2}{d^2} \right) \tag{27}$$

unde D_i este diametrul interior al burlanului.

5.2. ANALIZA COMPARATIVĂ A REZULTATELOR TEORETICE ȘI EXPERIMENTALE

Din examinarea tabelelor 3 și 4 se poate remarca faptul că rezultatele teoretice sînt destul de apropiate de cele experimentale, mai ales în cazul în care se ține seama de racordurile speciale și de fluidul de foraj (coloana D din tabelul 4).

Introducerea în calcul a racordurilor speciale și a fluidului de foraj conduce la micșorarea pulsațiilor proprii, influență mai mare avînd fluidul de foraj. Se observă că influența acestor factori crește odată cu ordinul pulsației.

6. OBSERVAȚII ȘI CONCLUZII

Manevrarea în condiții optime a unei instalații de foraj necesită cunoașterea caracteristicilor dinamice ale elementelor componente ținînd seama de legăturile reale dintre ele. Dintre aceste caracteristici pulsațiile proprii axiale ale ansamblului mast, geamblac, cablu, macara-cîrlig, garnitura de foraj și fluid de foraj sînt de mare importanță.

Ca principale rezultate se menționează următoarele :

1. Stabilirea unui model dinamic cît mai riguros al ansamblului mast, geamblac, cablu, macara-cîrlig, garnitura de foraj și fluidul de foraj.

2. Elaborarea unui algoritm general și a programului corespunzător pentru calculul oscilațiilor proprii longitudinale ale ansamblului :

3. Determinările experimentale s-au efectuat pe o instalație existentă de mare adîncime și au urmărit în special stabilirea răspunsului dinamic al mastului la diferite operații de manevră. Din oscilogramele înregistrate s-au determinat pulsațiile fundamentale care confirmă rezultatele teoretice.

4. S-au determinat teoretic, cu ajutorul programului stabilit, pulsațiile proprii ale ansamblului considerat, în diferite situații de alcătuire ale garniturii de foraj și s-a evidențiat influența racordurilor speciale ale prăjinilor de foraj și a fluidului de foraj.

Primit în redacție la 10 ianuarie 1990

BIBLIOGRAFIE

1. GH. BUZDUGAN, M. BLUMENFELD, *Tensometria electrică rezistivă*. Edit. tehnică, București, 1966.
2. N. CALOTĂ, *Cercetarea mișcării elastodinamice a sistemului IS—MT—S în timpul proceselor de manevră (I)*, Mine, Petrol și Gaze, **34**, *3* (1983).
3. N. CALOTĂ, *Cercetarea mișcării elastodinamice a sistemului IS—MT—S în timpul proceselor de manevră (II)*, Mine, Petrol și Gaze, **34**, *4* (1983).
4. N. CALOTĂ, *Cercetarea mișcării elastodinamice a sistemului IS—MT—S în timpul proceselor de manevră (III)*, Mine, Petrol și Gaze, **34**, *6* (1983).
5. D. W. DAREING, B. J. LIVESAY, *Longitudinal and angular drillstring vibrations with damping*, Journal of engineering for industry, November (1968).
6. S. I. EFIMCENKO, V. V. BABARYKIN, *Metodika ocenki proizvoditel'nosti spuskopod „Emny h kompleksov po cummarnomu masinnomu vremeni pod „Ema buril'noj kolonny za cikl provodki skvaziny*. Izvestija vyssih ucebnyh zavedenij, neft'i gaz" No. 12, 1988, pg. 33—38.
7. G. V. GRICULECKIJ, *Dinamiceskoe vzaimodejstvie buril'noj kolonny s zaboem vertikl'noj skvaziny*. Izvestija vyssih ucebnyh zavedenij, *Neft'i gaz*, *3* (1978).
8. V. G. JURTAEV, *Uprugie kolebatel'nye nagruzki pri pod „Eme instrumenta s podhvatom*. Izvestija Vyssih ucebnyh zavedenij, „NEFL'I GAZ", *8* (1976), pg. 18—24.
9. V. G. JURTAEV, *Rascet vertical'nyh dinamiceskih nagruzok deistvujuscin v konstrukcii Vyski. Izvestija vyssih ucebnyh zavedenij „neft'i gaz", 6* (1978), pg. 19—22.

10. V. G. JURTAEV, *K rascetu gidrodinamiceskogo davlenija v skvazine pri spusko-Pod „Emny. operacijah. Izvestija vyssih ucebnih zavedenij, „neft'i gaz", 7* (1979), pg. 14—18*h*
11. Z. G. KERIMOV, SADYHOV, M. A.. *Issledovanie prodol'Nyh kolebanij kolonny buril'Nyh trub pri burenii. Investija vyssih ucebnyh zavedenij, „Neft'i gaz", 9* (1971), pg. 33—36.
12. L. LIVOVSKI, *Bazele informaticii.* Edit. Albastros, București, 1979.
13. A. LUBINSKI, *Dynamic loading of drillipipe during tripping.* Journal of *Petroleum Technology, August* 1988, pg. 975—983.
14. V. A. PALIUNAS, PALIUNENE, *Oscilațiile libere ale barelor în lichid.* Vilnus, MOKSLAS 1978.
15. N. POSEA, *Rezistența materialelor.* Edit. Didactică și Pedagogică, București , 1979.
16. N. POSEA, *Vibrațiile mecanice.* Litografia Institutului de Petrol și Gaze, Ploiești, 1980.
17. I. PREDA, *Cercetarea oscilațiilor torsionale din sistemul de antrenare al instalațiilor de foraj,* Teză de doctorat, I.P.G. Ploiești, 1974.
18. RADZABOV, S.A., SALAME AHMED *Ocenka vlijanija uprugo-prodol'nyh kolebanij buril'noj kolonny narabotu burovogo rotora. Izvestija vissih ucebnih zavedenij „Neft'i gaz", 3,* (1989), pg. 17—22.
19. ROSCUPKIN, V. I., VLJUSIN, B. G. SMOLINA, A. K. *Issledovanie kolebanij voznikajuscin v kolonne buril'nyh trub i talevom kanate v processe rotornogo burenija. Izvestija vyssih ucebnih zavedenij „Neft'i gaz", 3* (1974), pg. 1723.
20. P. S. THEOCARIS, ș.a., *Analiza experimentală a tensiunilor; bazele teoretice ale metodelor tensometrice și indicații practice privind utilizarea acestora,* vol. 1, Edit. tehnică, București, 1976.

STUDII PRIVIND EVALUAREA DISPONIBILITĂȚII DE CAPACITATE PORTANTĂ A MANTALEI DE REZISTENȚĂ A UNUI CONVERTOR DE AMONIAC

de A. PAVEL

Institutul de Petrol și Gaze Ploiești

Disponibilitatea de capacitate portantă a mantalei cilindrice de rezistență cu defecte în suduri (nepătrunderi, lipsă de topire, fisuri eliminate prin remediere), a unui convertor de amoniac se studiază — analitic și experimental (tensometric) — în condiții de presurizare hidraulică statică sau oligociclic variabilă, defectele respective considerîndu-se fie staționare, fie evolutive în timp.

1. DATELE DE BAZĂ ȘI FORMULAREA PROBLEMEI

Pentru o colană de sinteză a amoniacului, denumită de asemenea reactor sau convertor, starea constructiv-dimensională a mantalei cilindrice este cea din figura 1, iar starea de defecte (de tip LP și LT) a sudurii longitudinale S a virolei V (prima virolă de sub capac), evidențiată prin examinare US, este cea redată ilustrativ în figura 2. Așadar:

- diametrul interior al mantalei (virolei) cilindrice este $D_i = 2\,200$ mm, lungimea de calcul a virolei cilindrice este $L_0 = 2871{,}6$ mm, iar grosimea nominală a peretelui mantalei (virolei) cilindrice are valoarea: minimă proiectată (nominală) $s_0 = 170$ mm și minimă (efectiv) măsurată $s_0 = 176$ mm; prin urmare, diametrul mediu (de calcul) al peretelui cilindric al virolelor mantalei este $D_m = D_i + s_0 = 2370$ mm (nominal) sau 2376 mm (efectiv);
- fluidul de lucru constă din hidrogen (80%) și azot (20 %), parametrii nominali de lucru ai convertorului fiind următorii: presiunea nominală de lucru (regim) $p_{nom} = 320$ bar și temperatura nominală de lucru (regim) $t_{nom} = 250°C$; ceilalți parametrii caracteristici ai converorului — respectiv cei de calcul (proiectare), de încercare (test hidrostatic), reduși de lucru (regim) și maximi constanți în exploatare — se regăsesc centralizați în tabelul 2;
- referitor la condițiile și circumstanțele exploatării reactorului s-au mai comunicat următoarele: durata însumată de funcționare efectivă $\tau_s = 76\,723$ h, durata maximă de serviciu nefiind nominalizată ca atare prin documentația de proiectare aflată la Cartea recipientului; viteza de presurizare este $v_p = 10$ bar/min, iar viteza de depresurizare este $v_{dp} = 52$ bar/min între nivelurile barice de 320 bar sau 230 (240) bar și cel de 75 bar, după care v_{dp} scade sensibil; viteza maximă de creștere a temperaturii peretelui mantalei este $v_t = 10°C/h$, iar viteza v_{dt}, de diminuare (răcire) a temperaturii peretelui mantalei, este lent variabilă, fiind dependentă de temperatura mediului ambiant; temperatura maximă, constatată (atinsă) la peretele mantalei (virolei), a fost $t_{max} = 300°C$; nu s-au constatat efecte ale atacului prin hidrogen sau prin azot (de speța blistering);

ST. CERC. MEC. APL., TOM 49, NR. 3, 1990, P. 297—337

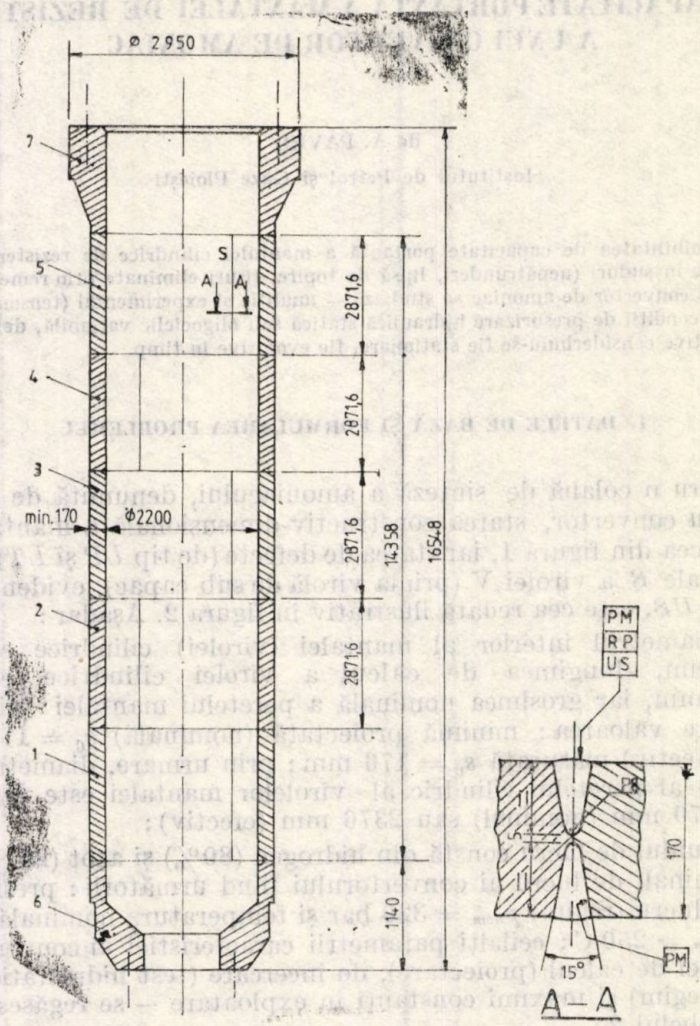


Fig. 1. — Mantaua convertorului : 1,...,5 — virolele mantalei cilindrice (în ordine, numerotate cu I, II,..., V); 6 — fundul mantalei cilindrice; 7 — capacul mantalei cilindrice; S — sudura (longitudinală) cu defecte (v. fig. 2). *Observații.* 1. Sudurile dintre virole sînt suduri cap la cap în „U" cu completare la rădăcină. 2. Examinările nedistructive, la constructor, s-au efectuat — conform detaliului în secțiunea A-A — cu : $US \rightarrow$ ultrasunete ; $RP \rightarrow$ radiații penetrante și $PM \rightarrow$ pulberi magnetice.

● materialul de bază al virolelor mantalei cilindrice a convertorului este oțelul nordamerican ASTM A 533, Gr. C, Cl.2, caracteristicile sale elastomecanice — care interesează — fiind centralizate și comparate în tabelul 3 ; prin urmare, rezultă : σ_r = min. 657,05 N/mm^2, σ_c = min. 480,53 N/mm^2, deci $\sigma_c/\sigma_r = 0{,}73$ — pentru temperatura metalului $t_m = 20°C$; σ_r = min. 574,67 N/mm^2, σ_c = min. 411,88 N/mm^2, deci $\sigma_c/\sigma_r = 0{,}72$, pentru $t_m = 250°C$, cînd $\sigma_a = 274{,}59\ N/mm^2$; σ_r = min. 555,48 N/mm^2,

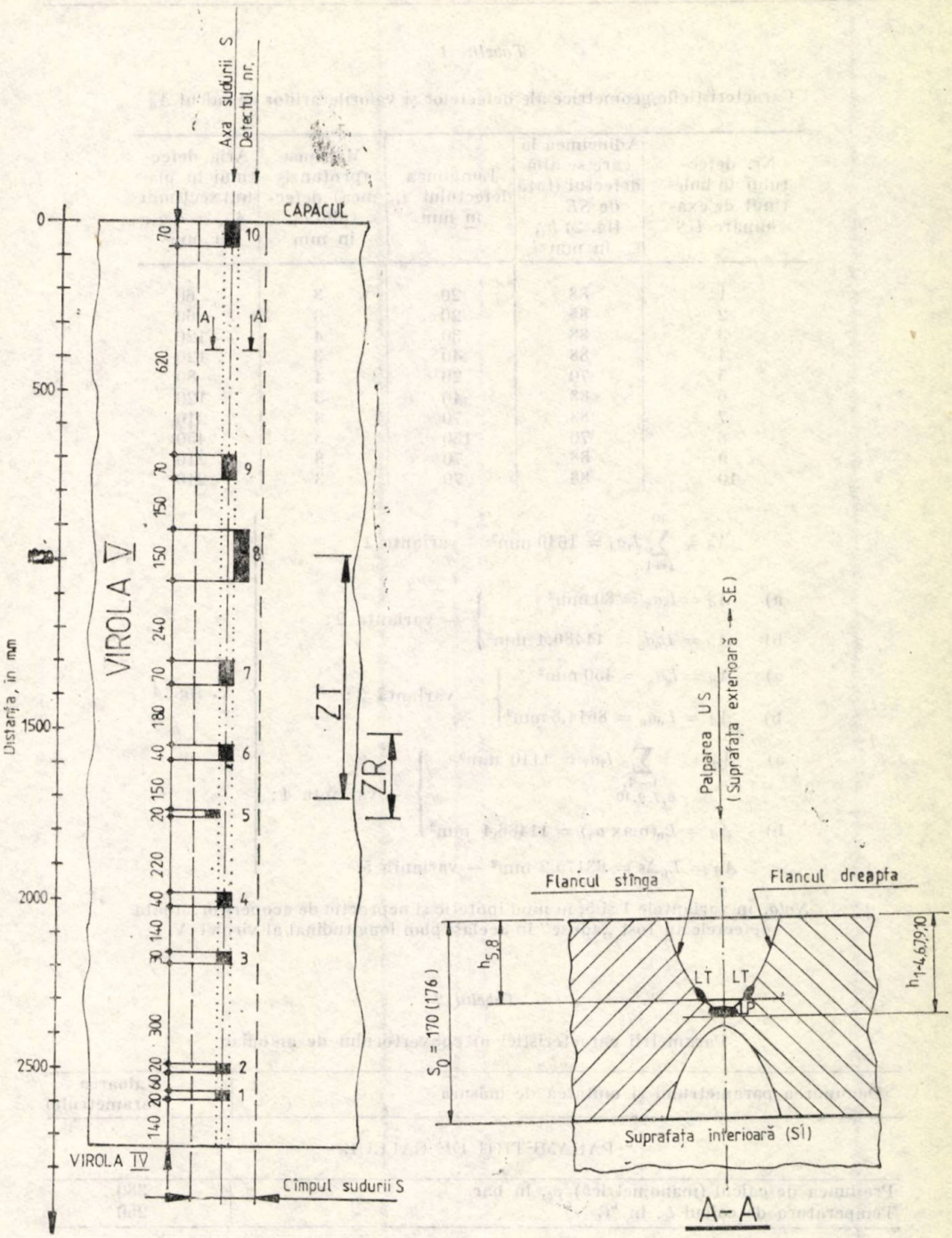


Fig. 2. — Defectele sudurii longitudinale S a virolei 5 (V → fig. 1), detectate prin examinare nedistructivă *US*: *LT* — lipsă de topire; *LP* — lipsă de pătrundere; $h_{i(i=1,2,..,10)}$ — adîncimea defectelor $i = 1,2,\ldots,10$ față de suprafața exterioară, la nivelul căruia s-a efectuat palparea *US* (v. secțiunea *A-A*); *ZR* — zona remediată; *ZT* — zona tensometrată (prin metoda tensometriei electrorezistive → *TER*). *Notă.* Caracteristicile geometrice ale defectelor se redau în tabelul 1, conform buletinului oficial de examinare *US*.

Tabelul 1

Caracteristicile geometrice ale defectelor și valorile ariilor de calcul A_d

Nr. defectului în buletinul de examinare *US*	Adîncimea la care se află defectul (față de *SE* — fig. 2) h_i, în mm	Lungimea defectului l_i, în mm	Mărimea (profunzimea) defectului a_i, în mm	Aria defectului în planul secțiunii $A_{di} = l_i a_i$, în mm²
1	88	20	3	60
2	88	20	3	60
3	88	30	4	120
4	88	40	3	120
5	70	20	4	80
6	88	40	3	120
7	88	70	3	210
8	70	150	3	450
9	88	70	3	210
10	88	70	3	210

$A_d = \sum_{i=1}^{10} l_i a_i = 1640$ mm² — varianta 1;

a) $A_d = l_5 a_5 = 80$ mm²
b) $A_d = L_0 a_5 = 11486{,}4$ mm² } — varianta 2;

a) $A_d = l_8 a_8 = 450$ mm²
b) $A_d = L_0 a_8 = 8614{,}8$ mm² } — varianta 3;

a) $A_d = \sum_{\substack{1-4,\\6,7,9,10}} l_i a_i = 1110$ mm²
b) $A_d = L_0(\max a_i) = 11486{,}4$ mm² } — varianta 4;

$A_d = L_0 \Delta s = 63175{,}2$ mm² — varianta 5.

} V. fig. 4

Notă. În variantele 1 și 5, în mod ipotetic și nepractic de acoperitor, toate defectele au fost „aduse" în același plan longitudinal al virolei V.

Tabelul 2

Parametrii caracteristici ai convertorului de amoniac

Denumirea parametrului și unitatea de măsură	Valoarea parametrului
PARAMETRII DE CALCUL	
Presiunea de calcul (manometrică) p_c, în bar	380
Temperatura de calcul t_c, în °C	250
PARAMETRII NOMINALI DE LUCRU (REGIM)	
Presiunea nominală de lucru p_{nom}, în bar	320
Temperatura nominală de lucru t_{nom}, în °C	250

Tabelul 2 (continuare)

PARAMETRII DE ÎNCERCARE (TEST HIDROSTATIC)

Presiunea de încercare hidraulică p_h, în bar	576
Temperatura (standard normală) de încercare hidraulică $t_h = t_n$, în °C	20

PARAMETRII REDUȘI DE LUCRU (REGIM)

Presiunea de lucru maxim admisibilă p_a, în bar	240
Temperatura de lucru maxim admisibilă t_a, în °C	Neprecizată
Temperatura maximă constatată (atinsă) la peretele mantalei (virolei) cilindrice t_{max}, în °C	300

PARAMETRII MAXIMI CONSTATAȚI ÎN EXPLOATARE

Presiunea maximă constatată (atinsă) în exploatare p_{max}, în bar	Neprecizată
Temperatura maximă constatată (atinsă) la peretele mantalei (virolei) în exploatare t_{max}, în °C	300
Presiunea maximă care se admite (constatîndu-se ca atare) în exploatare $p_{max} = p_{nom}$, în bar	320

Tabelul 3

Caracteristicile elastomecanice ale materialului de bază al virolelor mantalei convertorului de amoniac (Oțel ASTM A 533, Gr. C, Cl. 2)

Documentul tehnic de referință	Caracteristica elastomecanică standard							
	Rezistența de rupere σ_r, în N/mm^2			Limita tehnică de curgere σ_c, în N/mm^2			Lungirea la rupere δ, în %	Rezistența admisibil σ_a, în N/mm^2
	La temperatura, în °C, de							
	20	250	300	20	250	300	20	250
Breviarul de calcul din Cartea recipientului	—	—	—	480,53	411,88	—	—	274,59
Fișa de material nr. 1	657,05	574,67	—	502,10	437,38	—	23,8	—
Fișa de material nr. 2	662,93	574,67	—	503,08	437,38	—	24,0	—
Fișa de material nr. 3	677,64	593,30	—	511,91	446,20	—	23,2	—
Interpolarea liniară	—	—	555,48 574,97	—	—	396,96 431,92	—	—
Standardul ASTM A 553, Gr. C, Cl. 2	620,76 793,36	539,37	—	482,49	411,88	—	—	—

Observații. 1. Temperatura de 250°C este temperatura de calcul.

2. Temperatura de 300°C este temperatura maximă a mantalei, constatată în exploatare

↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
min.	min.	min.	min.	min.	min.	max.
657,05	574,67	555,48	480,53	411,88	396,96	24,0

σ_c = min. 396,96 N/mm^2, deci $\sigma_c/\sigma_r = 0{,}71$, pentru $t_m = 300°C$; δ = max. 24%, pentru $t_m = 20°C$; așadar, cu creșterea temperaturii t_m, simplexul σ_c/σ_r își diminuează ușor valoarea, aceasta constituind o con-

firmare a unei oarecare ameliorări a tenacității materialului de bază;

● înainte de sudare, flancurile sudurilor longitudinale ale virolelor s-au examinat nedistructiv cu pulberi magnetice (*PM*); după sudare, sudurile longitudinale ale virolelor s-au examinat nedistructiv *PM*, cu radiații penetrante (*RP*) și cu ultrasunete (*US*); prin proiect, coeficientul de rezistență al sudurilor s-a impus ca fiind $\varphi = 1{,}000$;

● prin examinarea *US*, efectuată conform unui buletin oficial, în sudura longitudinală *S* a virolei V s-au pus în evidență defectele de tip *LP* și *LT* având caracteristicile geometrice din tabelul 1; defectele nr. 1,...,4,6,7,9 și 10 sînt în același plan longitudinal, toate de tip *LP* → lipsă de pătrundere axială; defectele nr. 5 și 8 sînt de tip *LT* → lipsă de topire pe flanc, sînt plasate pe flancurile sudurii — stînga și, respectiv, dreapta — și, deci, se află în afara planului longitudinal principal al sudurii *S* (în care sînt localizate toate defectele de tip *LP*); evident, defectele în discuție (fig. 2) sînt defecte primare de execuție (defecte de sudare), care, în mod normal, sînt staționare în timp.

Dată fiind starea mecanofizică și tehnologică generală a mantalei cilindrice a convertorului și starea de defecte a virolei V a aceleiași mantale, s-a impus efectuarea unor studii privind disponibilitatea corespunzătoare de capacitate portantă în următoarele trei ipostaze caracteristice;

1) presurizarea interioară este *statică*, starea de defecte fiind *staționară* în timp (prin urmare, defectele constatate nu au evoluat și nu vor evolua — extinzîndu-se — în timp);

2) presurizarea interioară este de asemenea *statică*, dar implică *riscurile fracturării*, starea de defecte devenind nestaționară în timp [prin urmare, defectele constatate — de tip fisură (accepțiune a priori ipotetică) — încep să evolueze, în timp extinzîndu-se];

3) presurizarea interioară este *nestatică*, variabilitatea sa corespunzînd unui regim cu cicluri ondulante pozitive.

De fiecare dată, studiile au în vedere două alternative:

a) *alternativa nominală*, cu $s_0 = 170$ mm, în starea fără defecte (*FD*) și, eventual, în starea cu defecte (*CD*);

b) *alternativa efectivă*, cu $s_0 = 176$ mm, de asemenea în starea fără defecte (*FD*) și, eventual, în starea cu defecte (*CD*),... implicîndu-se temperaturile $t_m = 20°C$, 250°C, 300°C și presiunile manometrice *de referință* $p = 240$ bar, 320 bar, 380 bar, 576 bar, bineînțeles, valorile $t_m = t$ și p corelîndu-se în mod corespunzător (tab. 2).

În funcție de aria A_d a secțiunilor de calcul, indisponibilizată prin prezența defectelor din sudura longitudinală *S* a virolei V, studiile au reținut următoarele 5 variante (fig. 3):

— *varianta 1* → toate defectele, avînd dimensiunile din tabelul 1, au fost „aduse" în același plan longitudinal al sudurii *S*, respectiv în planul longitudinal principal, ceea ce, evident, este nepractic de acoperitor; desigur, varianta 1 este *ipotetică*;

— *varianta 2*, *varianta 3* și *varianta 4* → s-au considerat numai defectele aflate ca atare în planurile longitudinale nominalizate, însă, de fiecare dată, s-a avut în vedere: *cazul a*) — doar *efectul local* al defectelor respective, bineînțeles, însumat pentru același plan longitudinal și

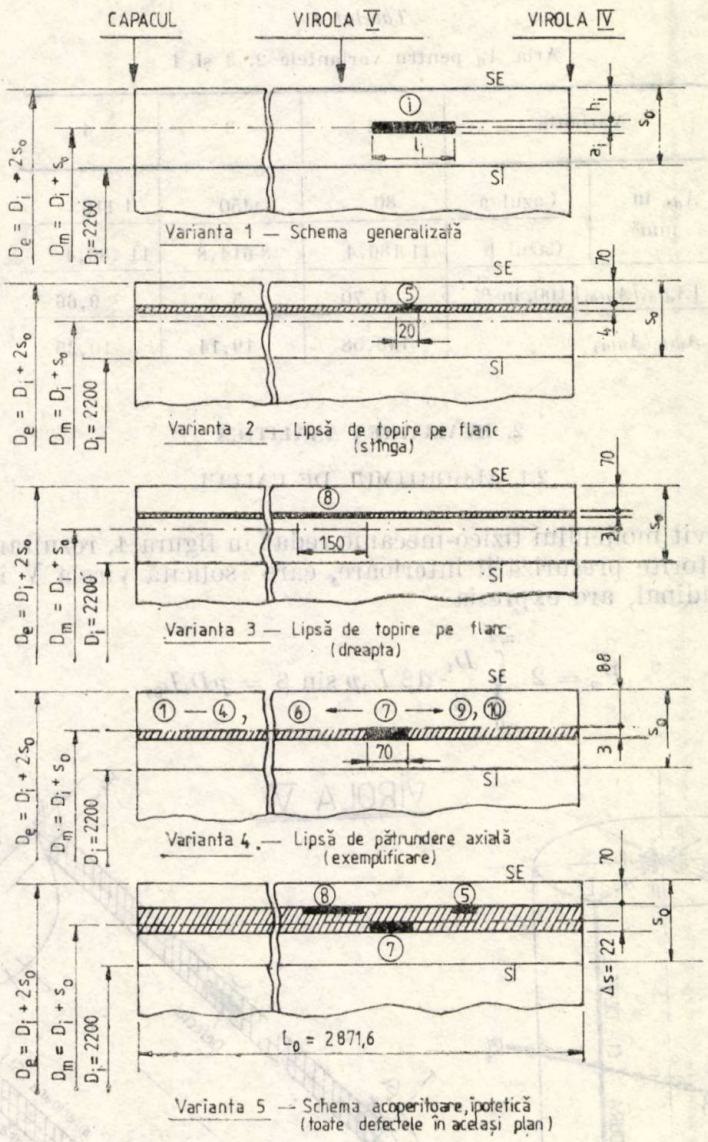


Fig. 3. — Schemele de calcul corespunzătoare celor cinci variante de studiu.

cazul b) — *efectul așa-zis în bandă* al defectelor respective pentru un același plan longitudinal; evident, cazul a) este cel *real*, iar cazul b) este cel ipotetic și *extrem de acoperitor*, rezultînd datele din tabelul 4;

— *varianta 5* → toate defectele au fost „aduse" în același plan longitudinal principal al sudurii S, efectele lor integrîndu-se într-o *bandă* cu lățimea $\Delta s = 22$ mm; evident, această variantă *ipotezică* este de asemenea (ca și varianta 1) nepractic de acoperitoare.

Tabelul 4

Aria A_d pentru variantele 2, 3 și 4

Varianta		2	3	4
A_d, în mm²	Cazul a	80	450	1 110
	Cazul b	11 486,4	8 614,8	11 486,4
$[A_{d(a)}/A_{d(b)}]$ 100, în %		0,70	5,22	9,66
$A_{d(b)}/A_{d(a)}$		143,58	19,14	10,35

2. EVALUAREA ANALITICĂ

2.1. ALGORITMUL DE CALCUL

Potrivit modelului fizico-mecanic redat în figura 4, rezultanta P_p a forțelor datorite presurizării interioare, care solicită virola V în planul său longitudinal, are expresia :

$$P_p = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{D_i}{2} \cdot d\beta \, L_0 p \sin \beta = p D_i L_0, \qquad (1)$$

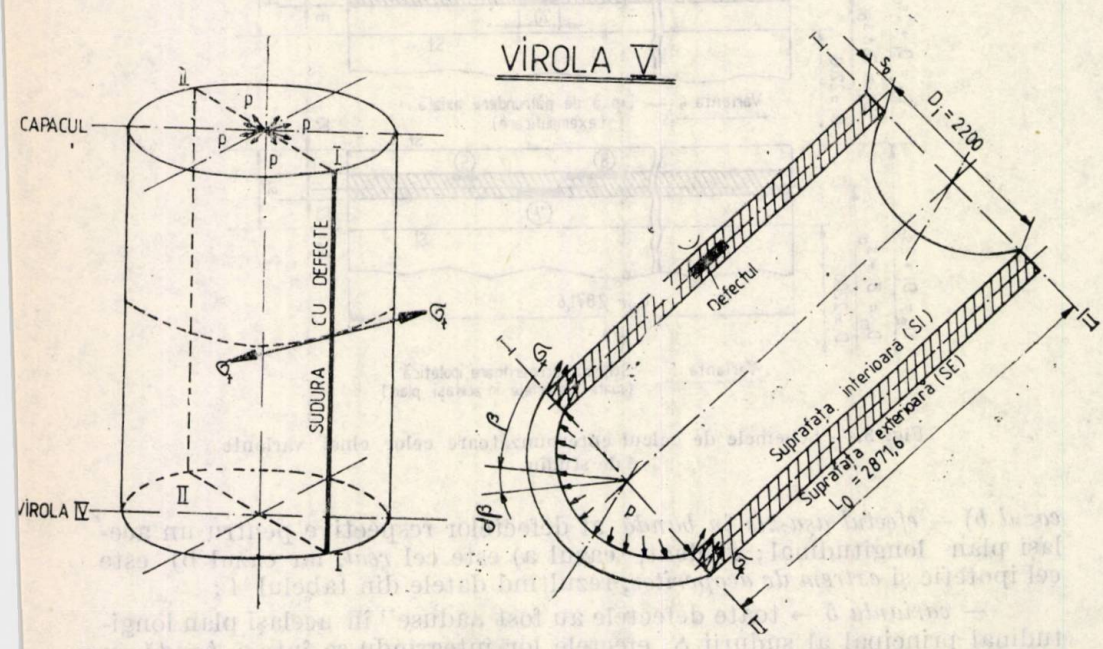


Fig. 4. — Modelul fizico-mecanic privind evaluarea analitică a disponibilității de capacitate portantă corespunzătoare virolei V : p — presiunea interioară manometrică, în MPa (N/mm²) sau în bar ; σ_t — tensiunea mecanică circumferențială (inelară), în N/mm².

condiția corespunzătoare de echilibru formulîndu-se astfel [3]:

$$\sigma_t[A_0 + (A_0 - A_d)] = (P_p =)\, pD_iL_0, \tag{2}$$

de unde rezultă:

$$\sigma_t = \frac{pD_iL_0}{A_0(2 - A_d/A_0)} = \frac{pD_i}{2s_0}\frac{1}{\psi_t} = K_t\sigma_t^n = \frac{K_tD_i}{2s_0}p = \beta_0 p, \tag{3}$$

în care:

$A_0 = 2\,L_0s_0$ reprezintă aria *efectivă* (inițială, brută) a secțiunilor (I—I și II—II în fig. 4) de calcul, în mm²;

A_d — aria secțiunilor de calcul *indisponibilizată* prin prezența defectelor din sudura longitudinală (fig. 1—4 și tab. 1), în mm²;

$\sigma_t^n = \dfrac{pD_i}{2s_0}$ — tensiunea mecanică circumferențială (inelară) *nominală* (perete fără defecte → tab. 5), în N/mm^2;

$\psi_t = 1 - \dfrac{A_d}{2A_0} = \dfrac{1}{K_t} \leqslant 1$ — coeficientul de *diminuare* a capacității portante (tab. 6);

$K_t = \dfrac{1}{\psi_t} = \dfrac{2A_0}{2A_0 - A_d} \geqslant 1$ — coeficientul de *amplificare* a tensiunilor mecanice circumferențiale (inelare) nominale (tab. 6);

$\beta_0 = K_t\dfrac{D_i}{2s_0}$ — factorul de *proporționalitate* în ecuația de dependență *liniară* $\sigma_t = \sigma_t(p)$, bineînțeles, în domeniul elastic (fig. 5); evident, pentru $K_t = 1{,}00$, corespunde $\beta_0 = D_i/2s_0$, respectiv $\beta_0 = 6{,}4706$ în cazul cu $s_0 = 170$ mm și $\beta_0 = 6{,}2500$ în cazul cu $s_0 = 176$ mm.

Tabelul 5

Intensitatea tensiunilor mecanice inelare (circumerențiale) nominale σ_t^n din peretele fără defecte al virolei V($D_i = 2200$ mm — fig. 1 și 4) a convertorului (Valori în N/mm²)

s_0, în mm / β / p, în bar	170	176
	6,4706	6,2500
100	64,71	62,50
200	129,41	125,00
240	155,29	157,00
300	194,12	187,50
320	207,06	200,00
380	245,88	237,50
400	258,82	250,00
500	323,53	312,50
576	372,71	360,00
600	388,24	375,00

Tabelul 6

Valorile coeficienților ψ_t și K_t

Varianta (fig. 3)	Alternativa (tab. 1)	Aria A_d, în mm² \ Aria A_0, în mm²	488 172,0 (s_0 = 170 mm) ψ_t	488 172,0 (s_0 = 170 mm) K_t	505 401,6 (s_0 = 176 mm) ψ_t	505 401,6 (s_0 = 176 mm) K_t
1	—	1640	0,9983	1,0017	0,9984	1,0016
2	a	80	0,9999	1,0001	0,9999	1,0001
	b	11486,4	0,9882	1,0119	0,9886	1,0115
3	a	450	0,9995	1,0005	0,9996	1,0004
	b	8614,8	0,9912	1,0089	0,9915	1,0086
4	a	1110	0,9989	1,0011	0,9989	1,0011
	b	11486,4	0,9882	1,0119	0,9886	1,0115
5	—	63175,2	0,9353	1,0692	0,9375	1,0667
Valorile extremale pentru variantele 2...4		Max.	0,9999	1,0119	0,9999	1,0115
		Min.	0,9882	1,0001	0,9886	1,0001
Valorile extremale pentru variantele 1 și 5		Max.	0,9983	1,0692	0,9984	1,0667
		Min.	0,9353	1,0017	0,9375	1,0016
Diminuarea procentuală a capacității portante $100(1-\psi_t)$		Variantele 2...4	0,01...1,18	—	0,01...1,14	—
		Variantele 1 și 5	0,17...6,47	—	0,16...6,25	—
Amplificarea procentuală a tensiunilor mecanice ineleare $100(K_t-1)$		Variantele 2...4	—	0,01...1,19	—	0,01...1,15
		Variantele 1 și 5	—	0,17...6,92	—	0,16...6,67

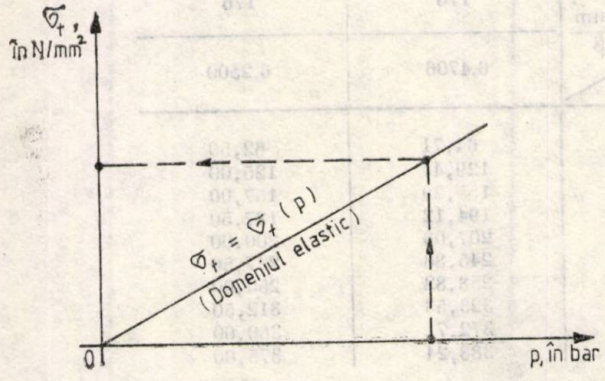


Fig. 5. — Graficul ecuației de dependență (3).

Tabelul 7

Intensitatea tensiunilor mecanice inelare (circumferențiale) σ_t din peretele cu defecte (fig. 2, tab. 1) al virolei V (fig. 1) a convertorului (Valori în N/mm^2)

Varianta (fig. 3)	Alternativa în tabelul 1	p, în bar / β	100	200	240	300	320	380	400	500	576	600
						$s_0 = 170$ mm						
1	—	6,4816	64,82	129,63	155,56	194,45	207,41	246,30	259,26	324,08	373,34	388,90
2	*a*	6,4712	64,71	129,42	155,31	194,14	207,08	245,91	258,85	323,56	372,74	388,27
	b	6,5476	65,48	130,95	157,14	196,43	209,52	248,81	261,90	327,38	377,14	392,86
3	*a*	6,4738	64,74	129,48	155,37	194,21	207,16	246,00	258,95	323,69	372,89	388,43
	b	6,5282	65,28	130,56	156,68	195,85	208,90	248,07	261,13	326,41	376,02	391,69
4	*a*	6,4777	64,78	129,55	155,46	194,33	207,29	246,15	259,11	323,89	373,12	388,66
	b	6,5476	65,48	130,95	157,14	196,43	209,52	248,81	261,90	327,38	377,14	392,86
5	—	6,9184	69,18	138,37	166,04	207,55	221,39	262,90	276,74	345,92	398,50	415,10
						$s_0 = 176$ mm						
1	—	6,2600	62,60	125,20	150,24	187,80	200,32	237,88	250,40	313,00	360,58	375,60
2	*a*	6,2506	62,51	125,01	150,01	187,52	200,02	237,52	250,02	312,53	360,03	375,04
	b	6,3219	63,22	126,44	151,73	189,66	202,30	240,23	252,88	316,10	364,14	379,31
3	*a*	6,2525	62,53	125,05	150,06	187,58	200,08	237,60	250,10	312,63	360,14	375,15
	b	6,3038	63,04	126,08	151,29	189,11	201,72	239,54	252,15	315,19	363,10	378,23
4	*a*	6,2569	62,60	125,14	150,17	187,71	200,22	237,76	250,28	312,85	360,40	375,41
	b	6,3219	63,22	126,44	151,73	189,66	202,30	240,23	252,88	316,10	364,14	379,31
5	—	6,6669	66,67	133,34	160,01	200,01	213,34	253,34	266,68	333,35	384,01	400,01

Aşadar, în baza dependenţei (3), tensiunile mecanice circumferenţiale (eforturile unitare inelare) care interesează (tab. 2), din peretele virolei V a mantalei cilindrice a convertorului (fig. 1 şi 2), se pot evalua cu următoarea formulă generală :

$$\sigma_t^{a,nom,max;c,h} = \beta_0 p_{a,nom,max,c,h}, \tag{4}$$

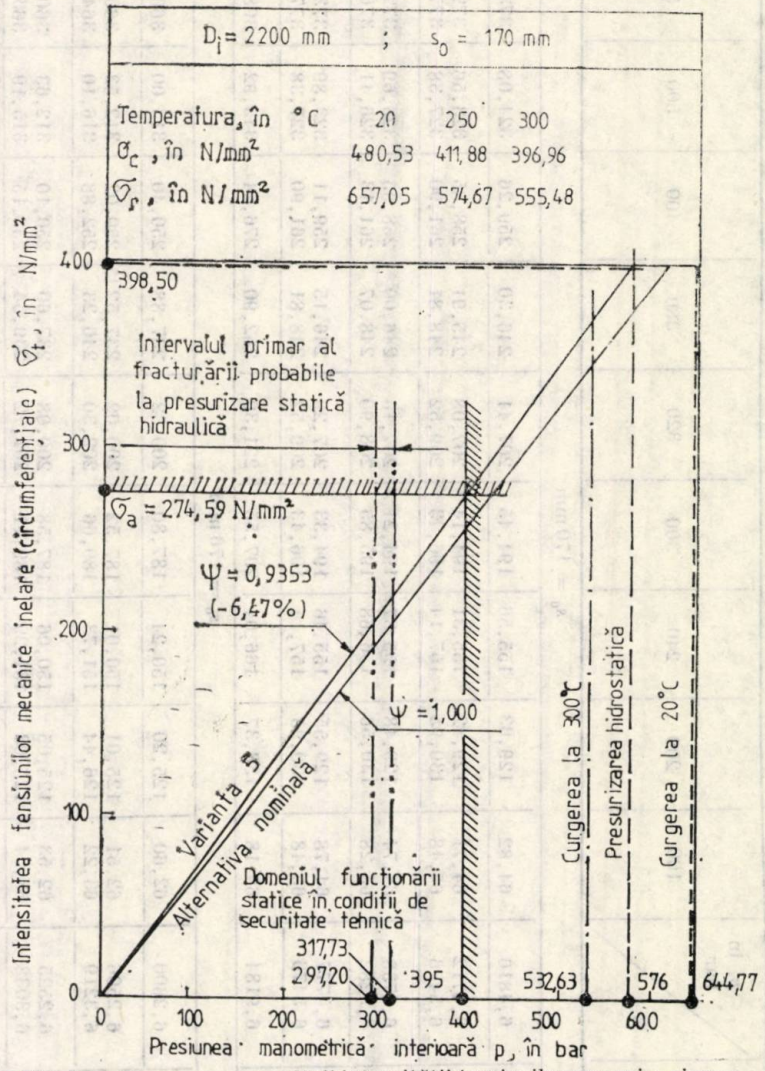


Fig. 6. — Nomograma corelării intensităţii tensiunilor mecanice circumferenţiale şi presiunii manometrice interioare.

valorile corespunzătoare regăsindu-se ca atare în tabelele 5 şi 7, de asemenea în figura 6.

Coeficienţii de siguranţă (factorii de securitate tehnică) c_a → faţă de rezistenţa admisibilă σ_a, c_c → faţă de limita tehnică de curgere (mini-

Tabelul 8

Coeficientul de siguranță $c_c = \sigma^t_{c\ min} / \sigma^{a,nom,max,c,h}_t$

Varianta (fig. 3)	Alternativa în tabelul 1	Presiunea de referință p, în bar (și temperatura de referință t, în °C)									
		240 (300)		320 (250)		320 (300)		380 (250)		576 (20)	
		FD	*CD*	*FD*	*CD*	*FD*	*CD*	*FD*	*CD*	*FD*	*CD*
$s_0 = 170$ mm											
1	—	2,556	2,552	1,989	1,986	1,917	1,914	1,675	1,672	1,289	1,287
2	*a*	2,556	2,556	1,989	1,989	1,917	1,917	1,675	1,675	1,289	1,289
	b		2,526		1,966		1,895		1,655		1,274
3	*a*	2,556	2,555	1,989	1,988	1,917	1,916	1,675	1,674	1,289	1,289
	b		2,534		1,972		1,900		1,660		1,278
4	*a*	2,556	2,553	1,989	1,987	1,917	1,915	1,675	1,673	1,289	1,288
	b		2,526		1,966		1,895		1,655		1,274
5	—	2,556	2,391	1,989	1,860	1,917	1,793	1,675	1,567	1,289	1,206
$s_0 = 176$ mm											
1	—	2,646	2,642	2,059	2,056	1,985	1,982	1,734	1,731	1,335	1,333
2	*a*	2,646	2,646	2,059	2,059	1,985	1,985	1,734	1,734	1,335	1,335
	b		2,616		2,036		1,962		1,715		1,320
3	*a*	2,646	2,645	2,059	2,059	1,985	1,984	1,734	1,734	1,335	1,334
	b		2,624		2,042		1,968		1,719		1,323
4	*a*	2,646	2,643	2,059	2,057	1,985	1,983	1,734	1,732	1,335	1,333
	b		2,616		2,036		1,962		1,715		1,320
5	—	2,646	2,481	2,059	1,931	1,985	1,861	1,734	1,626	1,335	1,251

Notații: *FD* → fără defecte; *CD* → cu defecte (tab. 1 și fig. 2).

Valori restrictive:

$$c_c = \frac{\sigma_c^{250°C}}{\sigma_t^{c\ nom}} \geqslant 1{,}500;$$

$$c_c = \frac{\sigma_c^{20°C}}{\sigma_t^{h}} \geqslant 1{,}200.$$

Conform breviarului de calcul (concordant cu PT ISCIR C 4-83)

mă) $\sigma_{c\,min}$ și $c_r \rightarrow$ față de rezistența de rupere (minimă) $\sigma_{r\,min}$ au următoarele expresii generale de calcul [3, 5]:

$$c_{a,c,r} = \frac{\sigma_{a,c,r\,min}^{20,250,300^\circ C}}{\sigma_t^{a,nom,max,c,h}} = \frac{\sigma_{a,c,r\,min}^{20,250,300^\circ C}}{\beta_0 p_{a,nom,max,c,h}} = \omega p_{a,nom,max,c,h}^{-1}, \tag{5}$$

în care:

$$\omega = \frac{\sigma_{a,c,r\,min}^{20,250,300^\circ C}}{\beta_0} = \frac{\sigma_{a,c,r\,min}^{t,^\circ C}}{\beta_0}, \tag{6}$$

valorile lor fiind cele din tabelele 8—10 și figurile corespunzătoare 7,8.

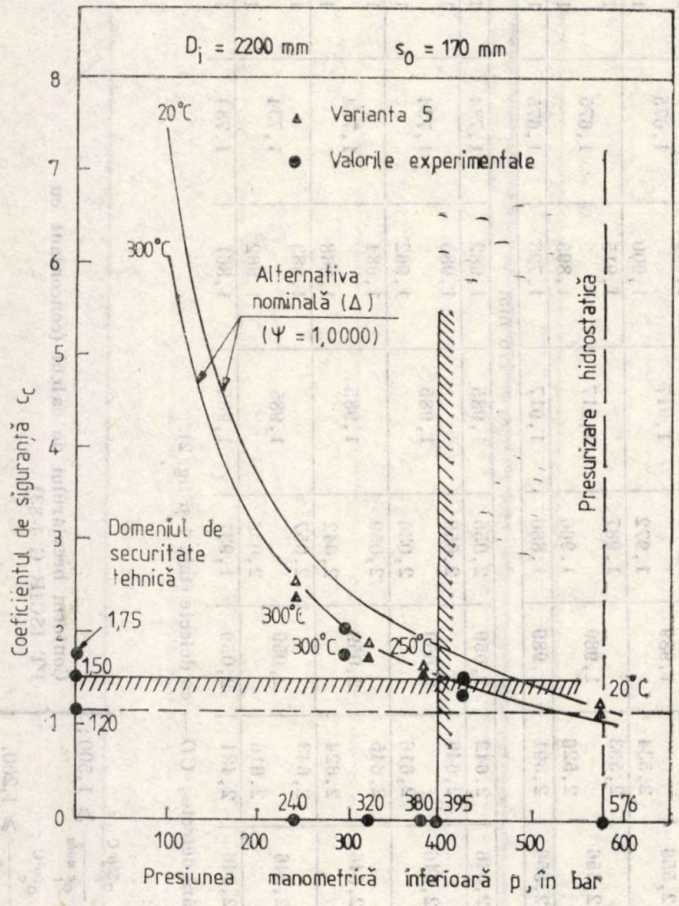


Fig. 7. — Nomograma corelării coeficientului de siguranță c_c și presiunii manometrice interioare p.

Presiunea manometrică interioară la care survine *curgerea tehnică* a materialului de bază al virolelor mantalei cilindrice a convertorului, evaluată cu formula [4]:

$$p_c = 2\sigma_c \left(\frac{\psi_t s_0}{D_m} \right) \tag{7}$$

Tabelul 9

Coeficientul de siguranță $c_r = \sigma^t_{r\,min} / \sigma^{a,nom,max,c,h}_t$

Varianta (fig. 3)	Alternativa în tabelul 1	Presiunea de referință p, în bar (și temperatura de referință t, în °C)									
		240 (300)		320 (250)		320 (300)		380 (250)		576 (20)	
		FD	*CD*	*FD*	*CD*	*FD*	*CD*	*FD*	*CD*	*FD*	*CD*
$s_0 = 170$ mm											
1	—	3,577	3,571	2,775	2,771	2,683	2,678	2,337	2,333	1,763	1,760
2	*a*	3,577	3,577	2,775	2,775	2,683	2,682	2,337	2,337	1,763	1,763
	b		3,535		2,743		2,651		2,310		1,742
3	*a*	3,577	3,575	2,775	2,774	2,683	2,681	2,337	2,336	1,763	1,762
	b		3,545		2,751		2,659		2,317		1,747
4	*a*	3,577	3,573	2,775	2,772	2,683	2,680	2,337	2,335	1,763	1,761
	b		3,535		2,743		2,651		2,310		1,742
5	—	3,577	3,345	2,775	2,596	2,683	2,509	2,337	2,186	1,763	1,649
$s_0 = 176$ mm											
1	—	3,703	3,697	2,873	2,869	2,777	2,773	2,420	2,416	1,825	1,822
2	*a*	3,703	3,703	2,873	2,873	2,777	2,777	2,420	2,419	1,825	1,825
	b		3,661		2,841		2,746		2,392		1,804
3	*a*	3,703	3,702	2,873	2,872	2,777	2,776	2,420	2,419	1,825	1,824
	b		3,672		2,849		2,754		2,399		1,810
4	*a*	3,703	3,699	2,873	2,870	2,777	2,774	2,420	2,417	1,825	1,823
	b		3,661		2,841		2,746		2,392		1,804
5	—	3,703	3,472	2,873	2,694	2,777	2,604	2,420	2,268	1,825	1,711

Notații: *FD* → fără defecte; *CD* → cu defecte (tab. 1 și fig. 2).

Valori restrictive:

$$c_r = \frac{\sigma_r^{20,250,300°C}}{\sigma_t^{c,nom}} \geqslant 2{,}400 \text{ — conform cu PT ISCIRC 4-83.}$$

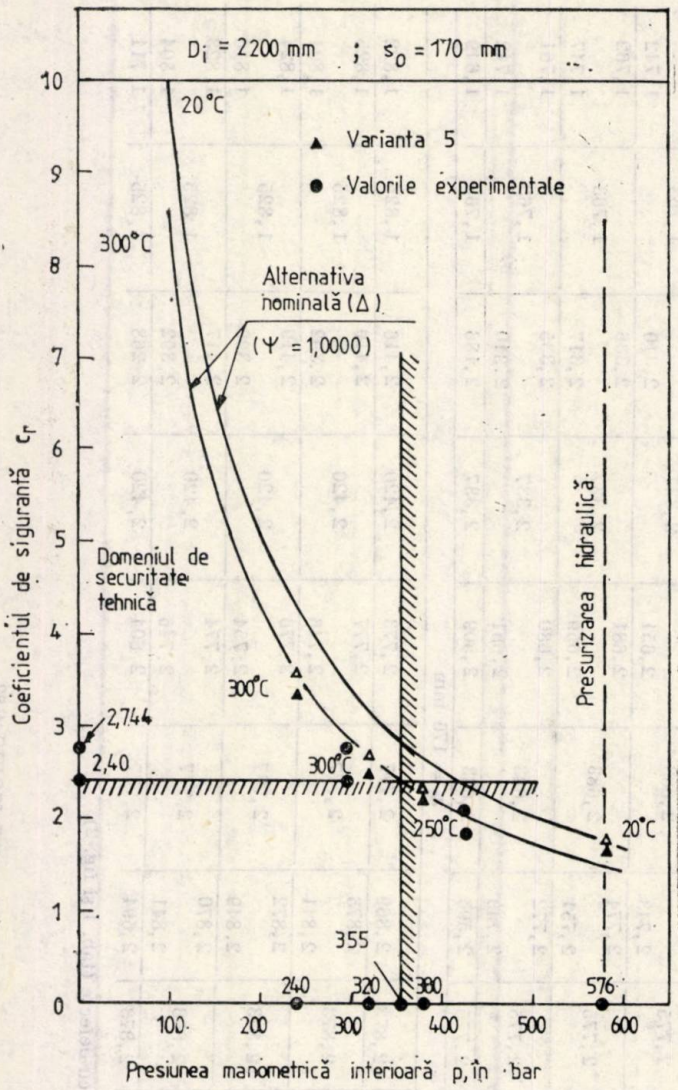


Fig. 8. — Nomograma corelării coeficientului de siguranță c_r și presiunii manometrice interioare p.

și presiunea manometrică interioară la care se produce *distrugerea* — prin *plesnire* în direcție longitudinală a — virolelor mantalei cilindrice a convetorului, evaluată cu formula [4]:

$$p_d = \frac{2\sigma_r}{1+\delta}\left(\frac{\psi_t s_0}{D_m}\right), \tag{8}$$

au valorile din tabelul 11.

Potrivit preceptelor moderne ale Mecanicii fracturării [2], presiunea manometrică interioară de cedare prin *fracturare*, corespunzătoare viro-

Tabelul 10

Coeficienții de siguranță $c_{a,c,r}$ pentru cazul etalon cu $K_\ell = 1{,}0000$

Presiunea p, în bar	Rezistența admisibilă σ_a, în N/mm² (la t, în °C)	Limita tehnică de curgere, minimă, $\sigma_{c\,min}$, în N/mm² (și temperatura de referință t, în °C)			Rezistența de rupere, minimă, $\sigma_{r\,min}$, în N/mm² (și temperatura de referință t, în °C)		
	274,59 (250)	480,53 (20)	411,88 (250)	396,96 (300)	657,05 (20)	574,67 (250)	555,48 (300)
			$s_0 = 170$ mm ($\beta = 6{,}4706$)				
100	4,244	7,426	6,365	6,135	10,154	8,881	8,585
200	2,122	3,713	3,183	3,067	5,077	4,441	4,292
240	1,768	3,094	2,652	2,556	4,231	3,701	3,577
300	1,415	2,475	2,122	2,045	3,385	2,960	2,862
320	1,326	2,321	1,989	1,917	3,173	2,775	2,683
380	1,117	1,954	1,675	1,614	2,672	2,337	2,259
400	1,061	1,857	1,591	1,534	2,539	2,220	2,146
500	0,849	1,485	1,273	1,227	2,031	1,776	1,717
576	0,737	1,289	1,105	1,065	1,763	1,542	1,490
600	0,707	1,238	1,061	1,022	1,692	1,480	1,431
			$s_0 = 176$ mm ($\beta = 6{,}2500$)				
100	4,393	7,688	6,590	6,351	10,513	9,195	8,888
200	2,197	3,844	3,295	3,176	5,256	4,597	4,444
240	1,843	3,204	2,746	2,646	4,380	3,831	3,703
300	1,464	2,563	2,197	2,117	3,504	3,065	2,963
320	1,373	2,403	2,059	1,985	3,285	2,873	2,777
380	1,156	2,023	1,734	1,671	2,767	2,420	2,339
400	1,098	1,922	1,648	1,588	2,628	2,299	2,222
500	0,879	1,538	1,318	1,270	2,103	1,839	1,778
576	0,763	1,335	1,144	1,103	1,825	1,596	1,543
600	0,732	1,281	1,098	1,059	1,752	1,532	1,481

Tabelul 11

Presiunile manometrice de curgere tehnică și de distrugere corespunzătoare mantalei (virolelor) cilindrice a convertorului de amoniac

Varianta (fig. 3)	Alternativa în tabelul 1	p_c, în bar, pentru			p_d, în bar, pentru
		$\sigma_c = 480{,}53$ N/mm² ($t = 20$°C)	$\sigma_c = 411{,}88$ N/mm² ($t = 250$°C)	$\sigma_c = 396{,}96$ N/mm² ($t = 300$°C)	$\sigma_r = 657{,}05$ N/mm², $\delta = 23{,}8\%$ (tab. 3) (t=20 °C)
		$s_0 = 170$ mm; $D_m = 2370$ mm			
1	—	688,20	589,88	568,51	760,10
2	*a*	689,30	590,82	569,42	761,32
	b	681,23	583,91	562,76	752,41
3	*a*	689,02	590,59	569,19	761,01
	b	683,30	585,68	564,47	754,69
4	*a*	688,61	590,23	568,85	760,55
	b	681,23	583,91	562,76	752,41
5	—	644,77	552,65	532,63	712,13

Tabelul 11 (continuare)

$s_0 = 176$ mm; $D_m = 2376$ mm

1	—	710,76	609,22	587,15	785,02
2	*a*	711,83	610,13	588,03	786,20
	b	703,78	603,24	581,38	777,31
3	*a*	711,61	609,95	587,85	785,96
	b	705,85	605,01	583,09	779,59
4	*a*	711,11	609,52	587,44	785,41
	b	703,78	603,24	581,38	777,31
5	—	667,40	572,06	551,33	737,13
—	$\psi_t = 1,00$	711,90	610,19	588,09	786,27

lelor mantalei cilindrice a convertorului, are următoarea expresie de calcul:

$$p_{fi} = \frac{2\,\psi_t s_0}{D_m} \frac{K_c}{\sqrt{0,5\,\pi l_i}}, \tag{9}$$

în care $K_c = 3\,400$ $N/mm^{3/2}$ [1] este factorul critic de intensitate a tensiunilor mecanice circumferențiale (inelare), bineînțeles, corespunzător materialului (de bază al) peretelui mantalei de convertor. Valorile concludente p_{fi}, calculate cu formula (9), se regăsesc în tabelul 12, formulele *particulare* fiind următoarele (l_i în mm):

— în alternativa *nominală*, cu $s_0 = 170$ mm:

$$p_{fi} = 389{,}1791 \frac{\psi_t}{\sqrt{l_i}}; \quad [\text{MPa}] \tag{10}$$

Tabelul 12

Presiunea de cedare prin fracturare, în bar

Varianta (fig. 3)	Alternativa în tabelul 1	l_i (fig. 2 și tab. 1), în mm / ψ_t	20	30	40	70	100	$\Sigma l_i = 360$*
$s_0 = 170$ mm; $D_m = 2370$ mm								
1	—	0,9983	868,75	709,33	614,30	464,37	317,22	204,77
2	*a*	0,9999	870,14	710,47	615,28	465,11	317,73	205,09
	b	0,9882	859,96	702,16	608,09	459,67	314,01	202,70
3	*a*	0,9995	869,80	710,19	615,04	464,93	317,60	205,01
	b	0,9912	862,57	704,29	609.93	461,06	314,97	203,31
4	*a*	0,9989	869,27	709,76	614,67	464,65	317,41	204,89
	b	0,9882	859,96	702,16	608,09	459,67	314,01	202,70
5	—	0,9353	813,93	664,57	575,53	435,06	297,20	191,84

Tabelul 12 (continuare)

$s_0 = 176$ mm; $D_m = 2376$ mm

1	—	0,9984	897,23	732,59	634,44	479,59	327,62	211,48
2	*a*	0,9999	898,58	733,69	635,39	480,31	328,12	211,80
	b	0,9886	888,43	725,40	628,21	474,88	324,41	209,40
3	*a*	0,9996	898,31	733,47	635,20	480,17	328,02	211,73
	b	0,9915	891,03	727,52	630,05	476,28	325,36	210,02
4	*a*	0,9989	897,68	732,95	634,76	479,83	327,79	211,59
	b	0,9886	888,43	725,40	628,21	474,88	324,41	209,40
5	—	0,9375	842,50	687,90	595,74	450,34	307,64	198,58

* $\Sigma l_i = 360$ mm corespunde la $i = 1,2,3,4,6,7,9,10$ (tab. 1), defectele respective aflîndu-se în același plan longitudinal (ipoteză nepractic de acoperitoare).

— în alternativa *efectivă*, cu $s_0 = 176$ mm :

$$p_{fi} = 401{,}8974 \frac{\psi_i}{\sqrt{l_i}} \cdot [\text{MPa}] \tag{11}$$

Intensitatea maximă a presiunii manometrice *nestatice* (variabile în regim ciclic *ondulant* pozitiv cu $N \leqslant 100\,000$, aici N fiind numărul ciclurilor de presurizare interioară ondulant variabilă), pentru care devine posibilă cedarea prin *oboseală oligociclică*, se poate evalua cu formula :

$$p_0 \geqslant \frac{2\,\psi_i s_0}{D_m} \left(\frac{\sigma_0}{c_0} \right), \tag{12}$$

în care :

$\sigma_0 = \min.\ 196\ N/\text{mm}^2$ [7] este rezistența la oboseală oligociclică (cu $N \leqslant 100\,000$), corespunzătoare unor efecte concentratoare *locale* date de nepătrunderi și de lipsă de topire reprezentînd aproximativ 6% din $s_0/2$;

$c_0 = 1{,}10$ [3] — coeficientul de siguranță corespunzător presurizării interioare în regim de oboseală oligociclică.

Valorile p_0 care intersează, calculate cu formula (12), se redau în tabelul 13.

Tabelul 13

Valorile minime p_0, în bar

Varianta (fig. 3)	Alternativa în tabelul 1	$s_0 = 170$ mm		$s_0 = 176$ mm	
		ψ_t	p_0, în bar min	ψ_t	p_0, în bar min
1	—	0,9983	255,18	0,9984	263.55
2	*a*	0,9999	255,59	0,9999	263,95
	b	0,9882	252,60	0,9886	260,96
3	*a*	0,9995	255,49	0,9996	263,87
	b	0,9912	253,37	0,9915	261,73
4	*a*	0,9989	255,34	0,9989	263,68
	b	0,9882	252,60	0,9886	260,96
5	—	0,9353	239,08	0,9375	247,47
Nominal		1,0000	255,62*	1,0000	263,97*

* Valori informative, întrucît $\sigma_0 \geqslant 196$ N/mm^2, defectele lipsind (coeficientul de concentrare $\alpha_\sigma = 1$ [6]).

2.2. INTERPRETAREA REZULTATELOR. CONCLUZII. RECOMANDĂRI

2.2.1. PRESURIZARE STATICĂ, DEFECTE STAȚIONARE ÎN TIMP

2.2.1.1. *Alternativa nominală* ($s_0 = 170$ *mm*)

● Diminuarea procentuală a capacității portante, ca urmare a prezenței defectelor în sudura S a virolei V, este de cel mult 1,18% (ψ_t = min. 0,9882) pentru varifntele 2 . . .4 și de cel mult 6,47% (ψ_t = =min. 0,9353) pentru variantele (1,5). Ca urmare, amplificarea procentuală a tensiunilor mecanice este de maximum 1,19% ($K_t = 1{,}0119$) pentru variantele 2 . . .4 și de maximum 6,92% ($K_t = 1{,}0692$) pentru variantele (1,5). Valorile intermediare (ψ_t și K_t) care interesează se regăsesc în tabelul 6.

● Rezistența admisibilă $\sigma_a^{250°C} = 274{,}59$ N/mm^2 nu este depășită — la $t = t_m = 250°C$ — de intensitatea tensiunilor mecanice inelare (circumferențiale) σ_t din peretele *fără defecte* pentru $p \leqslant 400$ bar (tab. 5) și din peretele *cu defecte* pentru $p \leqslant 400$ bar în cazul variantelor 1 . . . 4, respectiv pentru $p \leqslant 380$ bar indiferemt de varianta 1 . . .5 (tab. 7).

● Pentru starea *cu defecte* (*CD*), coeficientul de siguranță față de limita tehnică de curgere c_c are valori extrem de favorabile (tab. 8), după cum urmează : $c_c \geqslant 1{,}793 \geqslant 1{,}500$, pentru $p = 320$ bar și $t = t_m = 300°C$; $c_c \geqslant 1{,}567 > 1{,}500$, pentru $p = 380$ bar și $t = t_m = 250°C$ și $c_c \geqslant$ $\geqslant 1{,}206 > 1{,}200$, pentru $p = 576$ bar și $t = t_m = 20°C$ (testarea hidrostatică).

● Tot pentru starea *cu defecte* (*CD*), coeficientul de siguranță față de rezistența de rupere c_r, de altfel neconsiderat ca atare în calculele de

proiectare, are următoarele valori (tab. 9): $c_r \geqslant 2{,}509 > 2{,}400$, pentru $p = 320$ bar și $t = t_m = 300°C$; $c_r \geqslant 2{,}186 < 2{,}400$, pentru $p = 380$ bar și $t = t_m = 250°C$ și $c_r \geqslant 1{,}649$, pentru $p = 576$ bar și $t = t_m = 20°C$ (testarea hidrostatică).

● Valorile c_c și c_r, corespunzătoare stării *fără defecte* (*FD*), rezultă din tabelele 9 și 10 ca fiind următoarele: $c_c \geqslant 1{,}534 > 1{,}500$, pentru $p \leqslant 400$ bar și $t = t_m \leqslant 300°C$ și $c_r \geqslant 2{,}683 \gg 2{,}400$, pentru $p \leqslant 320$ bar și $t = t_m \leqslant 300°C$.

● Presiunea manometrică de curgere tehnică p_c, corespunzătoare stării *cu defecte*, are următoarele valori: $p_c \geqslant 644{,}77$ bar $\gg 576$ bar, pentru $t = t_m = 20°C$ (testarea hidrostatică) și $p_c \geqslant 532{,}63$ bar, pentru $t \leqslant 300°C$.

● Presiunea manometrică de distrugere p_d, de asemenea corespuntoare stării *cu defecte*, are următoarele valori (pentru $t = t_m = 20°C$): $p_d = 712{,}13$ bar, în cazul variantei 5 și $p_d = 752{,}41 \ldots 761{,}32$ bar, în cazul variantelor 2 ... 4.

2.2.1.2. *Alternativa efectivă* ($s_0 = 176$ mm)

Cum se vede din tabelele 5—11, rezultatele evidențiate anterior, pentru alternativa nominală ($s_0 = 170$ mm), *se ameliorează* într-o oarecare măsură, determinată, însă ele nu implică nutații cantitative sau calitative în formulările enunțate.

2.2.2. PRESURIZARE STATICĂ. DEFECTE EVOLUTIVE ÎN TIMP. RISCURI DE FRACTURARE

Asimilînd, în mod forțat, defectele constatate de tip *LP* sau *LT* (fig. 2) cu cele de tip *fisură*, cu lungimea l_i, orientată în lungul virolei cilindrice și care se propagă, extinzîndu-se, în timp, rezultă următoarele presiuni manometrice de cedare prin fracturare p_{fi} (tab. 12):

● în cazul *alternativei nominale* ($s_0 = 170$ mm): $p_{fi} \geqslant 435{,}06$ bar, cînd $l_i \leqslant 70$ mm; $p_{fi} \geqslant 297{,}20$ bar, cînd $l_i \leqslant 150$ mm și $p_{fi} \geqslant 191{,}84$ bar, cînd $\Sigma l_i \leqslant 360$ mm;

● în cazul *alternativei efective* ($s_0 = 176$ mm): $p_{fi} \geqslant 450{,}34$ bar, cînd $l_i \leqslant 70$ mm; $p_{fi} \geqslant 307{,}64$ bar, cînd $l_i \leqslant 150$ mm și $p_{fi} \geqslant 198{,}58$ bar, cînd $\Sigma l_i \leqslant 360$ mm.

Întrucît defectele constatate au $l_i \leqslant 150$ mm (fig. 2), dacă ele sînt *nestaționare* și, deci, în timp, se extind ca niște *fisuri longitudinale* în circumstanțe de presurizare interioară a mantalei cilindrice, atunci intervalul primar baric al fracturării probabile, la presurizarea statică hidraulică, va fi $p_{fi} \in [297{,}20\,;\ 317{,}73]$ bar (tab. 12 și fig. 6).

Așadar, din punctul de vedere al riscurilor de cedare prin fracturare privind mantaua convertorului de amoniac, cele mai periculoase pot fi sau pot deveni (dacă nu sînt staționare) defectele nr.: 8, cu $l_8 = 150$ mm, în primul rînd și 7,9;10, cu $l_{7,9,10} = 70$ mm, în al doilea rînd (fig. 2).

Dacă defectele respective (8,7,9,10) sînt staționare, atunci riscurile de cedare prin fracturare sînt excluse, în mod normal, fiind *contraindicată* oricare perturbare a stării de defecte date (fig. 2). Dacă defectele în discuție sînt nestaționare, extinzîndu-se în timp, atunci *blocarea* și/sau *eliminarea* lor se impun a se efectua fără nici o amînare.

2.2.3. PRESURIZARE NESTATICĂ (REGIM VARIABIL CU CICLURI ONDULANTE POZITIVE), DEFECTE STAȚIONARE ÎN TIMP (OBOSEALĂ OLIGOCICLICĂ → $N \leqslant 100\,000$)

În condiții de solicitare *nestatică*, cu cicluri de presurizare ondulant variabilă pozitivă avînd $N \leqslant 100\,000$ (oboseală oligociclică) și cu efecte concentratoare locale date de defectele de tip LT și LP (fig. 2) reprezentînd aproximativ 6% din $s_0/2$ (= 85 mm sau 88 mm), intensitatea *maximă* a presiunii interioare manometrice *nepericuloase* (cu o rezervă de securitate tehnică de cel puțin 10%, pentru $N \leqslant 100\,000$ cicluri) este următoarea (tab. 13):

- $p_0 = 239{,}08 \ldots 255{,}59$ bar, pentru alternativa *nominală* (cu $s_0 = 170$ mm);
- $p_0 = 247{,}47 \ldots 263{,}95$ bar, pentru alternatuva *efectivă* (cu $s_0 = 170$ mm),

aceste din urmă valori corespunzînd nivelului lor *minim*.

2.2.4. CONCLUZII ȘI RECOMANDĂRI

1) În următoarele circumstanțe:
— presurizare (de regim) statică;
— defecte (LP și LT) staționare în timp;
— diminuare de capacitate portantă potrivit variantei 5,

domeniul funcționării (exploatării) mantalei convertorului de amoniac *în condiții de securitate tehnică*, definit prin intermediul presiunii manometrice interioare maxime p_{max}, este următorul (fig. 6):

a) pentru temperaturi ale peretelui metalic $t = t_m \leqslant 250°C$:

$$p_{max} \leqslant 395 \text{ bar},$$

pentru care $\sigma_{t\,max} \leqslant \sigma_a = 274{,}59$ N/mm², respectiv $c_c \geqslant 1{,}50$, considerîndu-se $s_0 = 170$ mm și $D_i = 2200$ mm;

b) pentru temperaturi ale peretelui metalic $t = t_m \leqslant 300°C$:

$$p_{max} \leqslant 380 \text{ bar},$$

pentru care $\sigma_{t\,max} \leqslant \sigma_a = 396{,}96/1{,}50 = 264{,}64$ N/mm², respectiv $c_c \geqslant 1{,}50$, de asemenea considerîndu-se $s_0 = 170$ mm și $D_i = 2200$ mm.

Valorile *efective* $c_c \geqslant 1{,}50$, corespunzătoare la presiuni manometrice interioare $p < p_{max} = (380; 395)$ bar, rezultă din dependențele grafice redate în figura 7.

2) În aceleași circmstanțe de la punctul 1), dată fiind restricția $c_r \geqslant 2{,}40$, impusă prin PT ISCIR C 4-83, dar neconsiderată ca atare prin documentația tehnică de proiectare, domeniul funcționării (exploa-

tării) mantalei convertorului (cu $s_0 = 170$ mm și $D = 2200$ mm) *în condiții de securitate tehnică* se îngustează astfel (fig. 6 și 8):

a) cînd $t = t_m \leqslant 250°C$:

$$p_{max} \leqslant 355 \text{ bar},$$

pentru care $\sigma_{t\,max} \leqslant \sigma_a = 574{,}67/2{,}40 = 239{,}45\ N/mm^2$, respectiv $c_r \geqslant 2{,}40$;

b) cînd $t = t_m \leqslant 300°C$:

$$p_{max} \leqslant 332 \text{ bar},$$

pentru care $\sigma_{t\,max} \leqslant \sigma_a = 555{,}48/2{,}40 = 231{,}45\ N/mm^2$, respectiv $c_r \geqslant 2{,}40$.

Valorile *efective* $c_r \geqslant 2{,}40$, corespunzătoare la presiuni manometrice interioare $p < p_{max} = (332; 355)$ bar, rezultă din dependențele grafice redate în figura 8.

3) Tot în circumstanțele de la punctul 1), încercării de rezistență, efectuate prin presurizare interioară hidrostatică, îi corespund următorii coeficienți de siguranță (factori de securitate):

$$c_c = 1{,}206 > 1{,}200,$$

$$c_r = 1{,}649,$$

așa cum rezultă din tabelele 8 și 9, respectiv din figurile 7 și 8, considerîndu-se $s_0 = 170$ mm și $D_i = 2200$ mm, bineînțeles, presurizarea hidraulică interioară avînd intensitatea $p_h = 576$ bar (fig. 6).

4) Presiunile manometrice *statice* de curgere tehnică p_c și de distrugere p_d, corespunzătoare stării cu defecte (varianta 5) pentru $s_0 = 170$ mm și $D_i = 2200$ mm, au următoarele valori (tab. 11):

$$p_c \geqslant 644{,}77 \text{ bar} \geqslant p_h = 576 \text{ bar, cînd } t = t_m = 20°C;$$

$$p_c \geqslant 532{,}63 \text{ bar, cînd } t = t_m \leqslant 300°C;$$

$$p_d \geqslant 712{,}13 \text{ bar, cînd } t = t_m = 20°C.$$

5) În următoarele circumstanțe:

— presurizare (de încercare) statică;
— defecte (*LP* și *LT*) evolutive în timp;
— diminuare de capacitate portantă potrivit variantelor 1...5;
— temperaturi $t = t_m$ sub $-10...-20°C$,

riscurile de cedare prin fracturare longitudinală a mantalei cilindrice a convertorului de amoniac sînt *potențiale*, intervalul primar al fracturării *probabile* — la presurizarea statică hidraulică — fiind următorul (tab. 12 și fig. 6).

$$p_{fi} = 297{,}20...317{,}73 \text{ bar}.$$

Notă. Riscurile de fracturare se atenuează drastic cu creșterea temperaturii $t = t_m$ pînă la circa 200...300°C, ca urmare a ameliorării corespunzătoare a tenacității la rupere K_c.

Aşadar, încercarea de presiune hidraulică, efectuată în circumstanţele precizate şi, eventual, asistată prin emisie acustică, va fi întrutotul *concludentă* şi *satisfăcătoare* din punctul de vedere al securităţii tehnice în exploatare a mantalei convertorului.

6) În regim de solicitare *nestatică* (variabilă, dar fără şocuri!), cu $N \leqslant 100\,000$ cicluri de presurizare interioară ondulant variabilă pozitivă (oboseală oligociclică, mecanică) şi cu efecte concentratoare locale datorite defectelor de tip LP (mai ales) şi LT (fig. 2) reprezentînd circa 6% din $s_0/2 = 85$ mm (variantele 1...5), la nivelul său *minim*, intensitatea maximă a presiunii interioare *nepericuloase* (cu o rezervă de securitate tehnică de cel puţin 10%) este:

$$p_0 = 239{,}08 \ldots 255{,}59 \text{ bar, cînd } t_m \leqslant 250°\text{C}.$$

7) Rezultatele evidenţiate anterior [la punctele 1)...6)], pentru alternativa nominală ($s_0 = 170$ mm), *se ameliorează* într-o oarecare măsură, determinată (cu aproximativ 3.5%), pentru alternativa efectivă ($s_0 = 176$ mm), însă aceasta nu implică mutaţii cantitative sau calitative în concluziile formulate.

8) Prin urmare, pentru *referinţă*, se impun următoarele valori ale presiunii manometrice interioare:

$$p_0^{250°\text{C}} = 240 \text{ bar};$$

$$p_{fi}^{20°\text{C}} = 300 \text{ bar};$$

$$p_{\max}^{300°\text{C}} = 330 \text{ bar};$$

$$p_h^{20°\text{C}} = 576 \text{ bar};$$

$$p_c^{20°\text{C}} = 645 \text{ bar};$$

$$p_c^{300°\text{C}} = 530 \text{ bar};$$

$$p_d^{20°\text{C}} = 170 \text{ bar},$$

care s-au reţinut astfel „prin rotunjire".

9) Din punctul de vedere (şi numai din acest punct de vedere) al *riscurilor potenţiale de fracturare* privind mantaua cilindrică a convertorului de amoniac, cele mai preiculoase pot fi sau pot deveni (dacă nu sînt staţionare!) defectele nr. 8 (LT) — în primul rînd —, respectiv nr. 7,9,10 (toate de tip LP) —, în al doilea rînd (v. fig. 2).

Dacă defectele nominalizate se constată, în timp (6...12 luni de la data exmiterii buletinului de examinare *US*), că sînt staţionare ca atare (defecte primare de execuţie → sudare), atunci riscurile de fracturare sînt excluse în circumstanţele studiate, fiind *contraindicată* oricare intervenţie (remediere etc.) perturbatoare a stării date de defecte (fig. 2).

Dacă, însă, defectele în discuţie sînt nestaţionare, extinzîndu-se în timp (cele 6...12 luni precizate anterior), atunci *blocarea şi/sau eliminarea* lor se impune a se efectua fără nici o amînare ulterioară. Date fiind formulările şi preceptele de la punctele 1)...5), 7) şi 8), cea mai la îndemînă, comodă şi rapidă modalitate de *blocare* a evoluţiei defectelor o

constituie diminuarea presiunii manometrice interioare maxime conform restricției :

$$p_{\max}^{300^\circ C} < \left(\frac{p_c^{300^\circ C}}{p_c^{20^\circ C}} \right) p_{fi}^{20^\circ C},$$

rezultînd :

$$p_{\max}^{300^\circ C} < 246{,}51 \text{ bar}.$$

10) În contextul condițiilor și concluziilor precizate și enunțate anterior, *se recomandă* :

- reevaluarea *US* și *RP* a stării de defecte din sudura *S* a virolei V a mantalei cilindrice, aparținînd convertorului de amoniac, după cel mult 6...12 luni de la data emiterii buletinului de examinare *US* ;
- efectuarea la prima ocazie (dar nu mai tîrziu decît termenul de la subpunctul precedent) a testului hidrostatic, conform metodologiei impuse (v. Cartea recipientului) și, eventual, asistate prin emisie acustică, concomitent tensometrîndu-se starea de eforturi unitare cel puțin din zonele defectelor nr. 8,7,9,10 și 5 (acesta din urmă fiind de tip *LT*) ;
- evaluarea prin simulare numerică pe calculator, folosind metoda elementului finit, a intensității stărilor de solicitare din sudura *S* cu defecte (fig. 2) și, deci, din zonele defectelor — în primul rînd — nr. 8,7,9, 10 și 5 ;
- analizarea, compararea și confruntarea rezultatelor obținute la subpunctele precedente, urmată de racordarea constatărilor finale la concluziile studiului de față, sau, dacă va fi cazul, de eventuala corectare, precizare, clarificare etc. a concluziilor principale ale studiului de față.

11) Recomandările precedente nu restricționează exploatarea în continuare a convertorului de amoniac, care urmează a se efectua — în condiții de securitate tehnică — în conformitate cu *valorile de referință* ale presiunii manometrice interioare de la punctul 8).

3. EVALUAREA TENSOMETRICĂ

3.1. DETERMINAREA PRIN METODA TER A TENSIUNILOR MECANICE

Între timp, convertorul de amoniac nefuncționînd în decursul a circa 30 de zile, pe suprafața interioară a sudurii longitudinale a virolei V au fost evidențiate — prin examinare *US* din exterior și *LP* (cu lichide penetrante) din interior — fisurile din figura 9, care — în urma materializării unui program adecvat de pregătire pentru remediere — s-au dovedit a fi *profunde* (cu adîncime de peste 117 mm), *extinse* prin reunire (lungimea totală a excavației a depășit 520 mm, iar lățimea sa a fost de circa 110 mm) și *evolutive* în timp.

Finalizîndu-se lucrările privind remedierea sudurii *S* (*ZR* în fig. 2), s-a elaborat programul de tensometrare — prin metoda *TER* — care a avut obiectivele (*ZT* în fig. 2) :

1) evaluarea *experimentală* (exponent *e*) a intensității tensiunilor mecanice circumferențiale (inelare) σ_i^e și longitudinale (meridiane, axiale) σ_m^e, în condiții de presurizare hidraulică la rece, atît în zona remediată (*ZR*) cît și în zona defectelor reprezentative nr. 7 și 8 (fig. 2) ;

2) verificarea experimentală a liniarității dependenței tensiunilor mecanice (eforturilor unitare) respective de deformațiile specifice corespunzătoare — circumferențiale (inelare) ε_i^e și longitudinale (meridiane, axiale) ε_m^e —, bineînțeles, în domeniul intensității de presurizare hidraulică avut în vedere *) ($p_{max}^e \leqslant p_{expl} = 295$ bar și, corespunzător, $p_{max}^e \leqslant p_h = 424$ bar, aici p_{expl} fiind presiunea manometrică maximă de exploatare; p_h — presiunea manometrică maximă de încercare hidraulică la rece; p_{max}^e — presiunea manometrică maximă la un moment anumit al testării prin presurizare hidraulică);

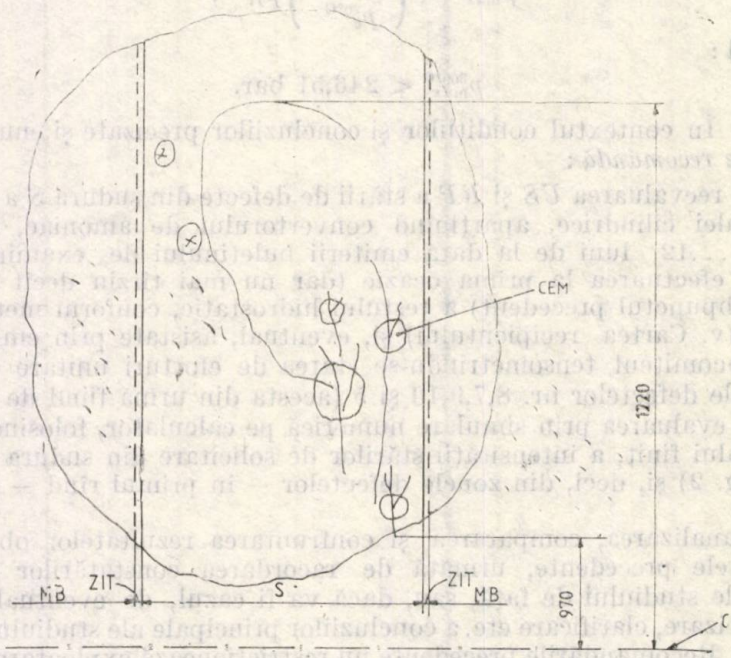


Fig. 9. — Fisurile constatate pe suprafața interioară a sudurii longitudinale a virolei V: *S* — cîmpul sudurii longitudinale (suprafața interioară — v. fig. 2); *MB* — cîmpul metalului de bază; *ZIT* — zona de influență termomecanică; *C* — conturul superior al sudurii circumferențiale (transversale) dintre virolele V și IV (v. fig. 1); *CEM* — cîmpurile examinate metalografic.

3) evaluarea experimentală a deformațiilor specifice remanente plastice, la finele depresurizărilor, acestea constituind un criteriu indicativ al comportării tehnic elastice a materialului peretelui de virolă în zona tensometrată.

Potrivit programului de tensometrare, 41 de puncte (duble) de măsurare s-au plasat în cîmpul *ZT* (fig. 2), cu un pas — longitudinal și inelar — de 40 mm, iar un punct (de asemenea dublu) de măsurare s-a localizat într-o zonă *MB* așa-zisă netulburată a peretelui virolei V

*) Valorile $p_{expl} = 295$ bar și $p_h = 427$ bar s-au impus ca atare de către proiectantul general al convertorului de amoniac.

(fig. 10). Presurizarea hidraulică la rece s-a efectuat în două cicluri şi anume*) :

a) *ciclul 1* : presurizarea succesivă pînă la treptele de $p^e_{max} = 100$, 200, 295, 350, 400 şi 424 bar, urmată de depresurizarea succesivă în trep-

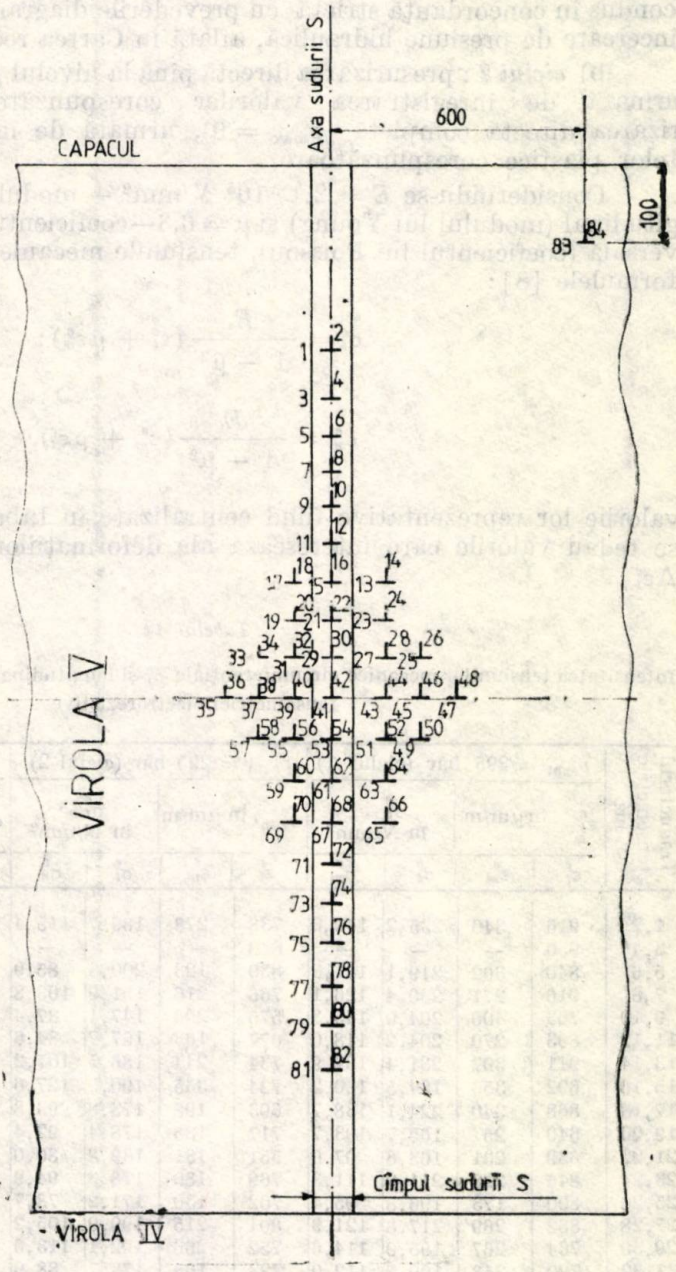


Fig. 10. — Planul de tensometrare prin metoda *TER* : 1,3,5,...,83 — traductorii tensometrici privind măsurarea mărimilor $\varepsilon^e_t \to \sigma^e_t$; 2,4,6,...,84 — traductorii tensometrici privind măsurarea mărimilor $\varepsilon^e_m \to \sigma^e_m$; 1,2,...,82 — traductorii tensometrici plasaţi în *ZT* (fig. 2); 83, 84 — traductorii tensometrici aflaţi într-o zonă netulburată *MB* a peretelui virolei V. *Notă.* Planul de tensometrare s-a materializat pe suprafaţa exterioară a virolei V a convertorului de amoniac.

*) Tensometrarea propriu-zisă s-a efectuat de către colectivul ing. I. Popescu de la C.C.S.I.T.U.I.A.T.F. — Filiala Bucureşti din cadrul fostului M.I.C.M. — C.I.U.C.A.

tele de p^e_{max}=424, 400, 350, 295, 200 și 100 bar, măsurările și înregistrările de valori $\varepsilon^e_{t,m}$ efectuîndu-se la palierele barice nominalizate, iar remanențele plastice corespunzătoare constatîndu-se ca atare la depresurizarea completă ($p^e_{max} = 0$); evident, operațiile de presurizare/depresurizare s-au condus în concordanță strictă cu prevederile diagramei de testare printr-o încercare de presiune hidraulică, aflată în Cartea recipientului;

b) *ciclul 2*: presurizarea directă pînă la nivelul $p^e_{max} = p_{expl} = 295$ bar, urmată de înregistrarea valoriler corespunzătoare $\varepsilon^e_{t,m}$ și depresurizarea directă completă ($p^e_{max} = 0$), urmată de înregistrarea remanențelor plastice corespunzătoare.

Considerîndu-se $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ N/mm^2 — modulul de elasticitate longitudinal (modulul lui Young) și $\mu = 0{,}3$ — coeficientul de contracție transversală (coeficientul lui Poisson), tensiunile mecanice $\sigma^e_{t,m}$ s-au evaluat cu formulele [8]:

$$\sigma^e_t = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon^e_t + \mu\varepsilon^e_m); \tag{13}$$

$$\sigma^e_m = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon^e_m + \mu\varepsilon^e_t), \tag{14}$$

valorile lor reprezentative fiind centralizate în tabelul 14. În tabelul 15 se redau valorile care interesează ale deformațiilor specifice remanente $\Delta\varepsilon^e_{t,m}$.

Tabelul 14

Intensitatea tensiunilor mecanice circumferențiale σ^e_t și longitudinale σ^e_m, evaluată prin metoda tensometriei electrorezistive

Traductorul tensometric nr.	p_{expl} = 295 bar (ciclul 1)				p_{expl} = 295 bar (ciclul 2)				p_h = 424 bar (ciclul 1)			
	$\varepsilon^e_{t,m}$, în μm/m		$\sigma^e_{t,m}$, în N/mm²		$\varepsilon^e_{t,m}$, în μm/m		$\sigma^e_{t,m}$, în N/mm²		$\varepsilon^e_{t,m}$, în μm/m		$\sigma^e_{t,m}$, în N/mm²	
	ε^e_t	ε^e_m	σ^e_t	σ^e_m	ε^e_t	ε^e_m	σ^e_t	σ^e_m	ε^e_t	ε^e_m	σ^e_t	σ^e_m
1,2	916	340	235,2	142,0	738	278	189,7	115,4	1240	318	308,5	159,4
3,4*	950	—	—	—	840	—	—	—	1200	—	—	—
5,6	840	362	219,1	141,3	630	123	200,3	85,9	1091	316	273,9	148,6
7,8	916	271	230,4	126,1	766	216	191,9	103,8	1106	263	273,7	137,4
9,10	763	400	204,0	145,3	575	206	147,1	87,4	1057	357	268,9	155,7
11,12	803	270	204,2	118,0	677	163	167,7	84,6	977	181	239,2	109,6
13,14	911	302	231,4	132,9	734	244	186,5	107,2	1115	198	271,3	123,0
15,16	692	356	184,5	130,2	724	335	190,5	127,6	990	296	249,2	137,0
17,18	868	340	224,1	138,7	693	198	173,8	93,8	1035	290	269,2	138,7
19,20	640	257	165,7	103,7	717	185	178,4	92,4	936	298	236,9	133,7
21,22	639	231	163,6	97,6	551	181	139,8	80,0	849	242	212,9	114,7
23,24	846	228	211,2	111,3	769	180	178,3	94,9	1142	230	279,7	132,3
25,26	800	173	196,8	95,4	702	130	171,2	78,7	1043	172	252,9	112,0
27,28	862	269	217,8	121,9	801	215	199,9	105,2	1155	300	287,6	149,3
29,30	764	267	195,0	114,6	752	266	192,1	113,6	1017	267	253,4	132,2
31,32	790	248	199,7	112,0	723	168	178,7	88,9	1045	285	261,1	138,3
33,34	852	390	223,8	149,1	673	220	170,7	97,5	1001	261	249,3	129,7
35,36	761	311	197,3	124,6	677	236	172,7	101,4	1001	398	258,8	161,3

Tabelul 14 (continuare)

37,38	773	289	198,6	120,3	669	192	167,8	90,7	1045	288	261,4	138,9
39,40	740	279	190,3	115,7	684	210	172,6	95,9	970	328	246,8	143,0
41,42	821	254	207,3	115,6	735	210	184,3	99,4	1083	270	268,9	137,4
43,44	789	223	197,7	106,2	728	222	183,6	101,7	1058	233	260,5	127,1
45,46	786	253	199,1	112,9	730	205	182,8	97,9	1003	285	251,4	135,3
47,48	850	259	214,3	118,7	764	258	194,4	112,5	1149	320	287,6	153,5
49,50	764	231	192,5	106,3	757	200	188,7	98,7	1021	271	254,6	133,6
51,52	908	326	232,3	138,2	778	206	194,0	101,5	1180	346	296,6	161,7
53,54*)	902	—	—	—	803	—	—	—	983	—	—	—
55,56	640	325	170,4	119,4	486	211	126,9	82,4	791	375	208,7	141,4
57,58	807	349	210,6	136,5	710	242	180,8	105,1	1047	388	268,7	162,2
59,60	780	329	203,0	130,1	675	180	168,4	88,4	1021	367	261,3	155,5
61,62	871	317	223,2	133,6	699	204	175,6	95,6	1126	346	284,1	158,0
63,64	896	328	229,7	137,9	745	203	186,2	98,6	1160	336	291,2	158,0
65,66	949	329	242,0	141,8	783	204	195,0	101,4	1268	360	317,9	171,0
67,68	881	353	228,0	142,6	666	196	167,4	91,4	1119	387	285,3	166,9
69,70	740	320	193,1	125,2	613	148	151,9	76,7	929	333	237,7	141,3
71,72	812	329	210,4	132,3	616	210	156,8	91,2	1031	403	266,1	164,5
73,74	795	288	203,6	121,6	624	210	158,7	91,8	1020	268	254,2	132,6
75,76	820	256	207,2	116,0	646	201	163,2	91,2	1050	273	261,5	135,8
77,78	861	379	225,2	147,2	661	179	165,1	87,2	1112	341	280,5	155,8
79,80	762	304	197,1	123,0	665	176	165,8	86,7	984	324	249,8	143,0
81,82	903	364	233,8	146,7	676	202	170,2	93,5	1181	394	300,1	172,9
83,84	873	311	223,2	132,3	636	161	158,1	81,3	921	395	240,1	155,1

*) Traductor tensometric dereglat.

Tabelul 15

Deformațiile specifice remanente, circumferențiale $\Delta\varepsilon_t^e$ și longitudinale $\Delta\varepsilon_m^e$, constatate și înregistrate ca atare prin metoda tensometriei electrorezistive

Traductorul tensometric nr.	$p_{expl} = 295$ bar (ciclul 1)		$p_{expl} = 295$ bar (ciclul 2)		$p_h = 424$ bar (ciclul 1)	
	$\Delta\varepsilon_{t,m}^e$, în %		$\Delta\varepsilon_{t,m}^e$, în %		$\Delta\varepsilon_{t,m}^e$, în %	
	$\Delta\varepsilon_t^e$	$\Delta\varepsilon_m^e$	$\Delta\varepsilon_t^e$	$\Delta\varepsilon_m^e$	$\Delta\varepsilon_t^e$	$\Delta\varepsilon_m^e$
1,2	—	—	−0,0030	0,0020	0,0038	−0,0060
3,4*)	—	—	−0,0010	—	−0,0070	—
5,6	—	—	−0,0001	−0,0055	−0,0053	−0,0043
7,8	—	—	−0,0005	0,0016	−0,0030	−0,0111
9,10	—	—	0,0007	0,0002	−0,0025	0,0007
11,12	—	—	−0,0019	0,0032	−0,0090	−0,0092
13,14	—	—	−0,0016	0,0002	−0,0025	−0,0079
15,16	—	—	0,0032	−0,0100	−0,0067	−0,0141
17,18	—	—	−0,0010	0,0013	−0,0005	−0,0025
19,20	—	—	−0,0012	0,0020	−0,0082	−0,0003
21,22	—	—	−0,0021	0,0021	−0,0040	−0,0053
23,24	—	—	−0,0011	−0,0011	0,0001	−0,0046
25,26	—	—	−0,0009	0,0004	−0,0031	−0,0035
27,28	—	—	−0,0010	0,0000	−0,0020	−0,0047
29,30	—	—	−0,0012	0,0042	−0,0101	−0,0033
31,32	—	—	−0,0011	−0,0002	0,0032	0,0005
33,34	—	—	−0,0040	−0,0009	0,0025	−0,0059
35,36	—	—	−0,0009	−0,0003	0,0004	0,0011

Tabelul 15 (continuare)

37,38	—	—	−0,0013	0,0003	0,0034	0,0020
39,40	—	—	−0,0024	0,0001	−0,0076	0,0020
41,42	—	—	−0,0001	−0,0045	−0,0031	−0,0056
43,44	—	—	−0,0011	−0,0012	−0,0049	−0,0130
45,46	—	—	−0,0015	0,0004	−0,0053	−0,0030
47,48	—	—	−0,0032	0,0010	−0,0023	−0,0067
49,50	—	—	−0,0026	0,0001	−0,0046	−0,0056
51,52	—	—	0,0002	−0,0005	0,0018	−0,0018
53,54*)	—	—	0,0010	—	0,0025	—
55,56	—	—	−0,0035	−0,0019	0,0011	0,0026
57,58	—	—	−0,0012	−0,0032	0,0003	−0,0001
59,60	—	—	−0,0041	−0,0022	−0,0026	0,0030
61,62	—	—	−0,0029	0,0003	0,0043	−0,0009
63,64	—	—	−0,0050	−0,0006	0,0024	−0,0033
65,66	—	—	−0,0039	−0,0020	0,0058	0,0006
67,68	—	—	−0,0041	−0,0026	0,0077	0,0032
69,70	—	—	−0,0027	−0,0022	−0,0030	0,0035
71,72	—	—	−0,0020	0,0017	0,0041	0,0032
73,74	—	—	−0,0027	0,0020	0,0012	−0,0072
75,76	—	—	−0,0052	−0,0014	0,0049	0,0025
77,78	—	—	−0,0019	0,0009	0,0030	0,0031
79,80	—	—	−0,0026	0,0022	−0,0049	0,0012
81,82	—	—	−0,0066	−0,0050	0,0086	0,0094
83,84	—	—	−0,0048	−0,0073	0,0110	0,0041

* Traductor tensometric dereglat.

3.2. ANALIZA, PRELUCRAREA ŞI INTERPRETAREA REZULTATELOR OBŢINUTE PRIN METODA TER

3.2.1. Prelucrarea rezultatelor

Eforturile unitare *principale* fiind ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$):

$$\sigma_1 = \sigma_t^e; \quad \sigma_2 = \sigma_m^e; \quad \sigma_3 \to 0, \tag{15}$$

tensiunile mecanice *echivalente* corespunzătoare σ_{ech} s-au determinat astfel [9]:

- în baza criteriului Galilei-Rankine, respectiv a teoriei efortului unitar normal principal maxim (teoria I):

$$\sigma_{ech} \to \sigma_{ech}^G = \sigma_1 = \sigma_{max} = \max \sigma_t^e; \tag{16}$$

- în baza criteriului Mises-Huber, respectiv a teoriei lucrului mecanic de modificare a formei (teoria IV → variantă energetică):

$$\sigma_{ech} \to \sigma_{ech}^M = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} =$$

$$= \sqrt{(\max \sigma_t^e)^2 + (\max \sigma_m^e)^2 - (\max \sigma_t^e)(\max \sigma_m^e)}, \tag{17}$$

valorile intensităţii lor fiind centralizate în tabelul 16.

Pentru (v. formula 3):

$$\sigma_t^n = \frac{D_i}{2\,s_0}\, p_{expl,\,h} = \frac{2\,200}{2.176}\, p_{expl,\,h} = 6{,}25\; p_{expl,\,h},\ [N/mm^2] \tag{18}$$

Tabelul 16

Tensiunile mecanice echivalente $\sigma_{ech}^{G,M}$, evaluate tensometric

Traductorul tensometric nr.	Tensiunea mecanică echivalentă σ_{ech}, în N/mm^2		Traductorul tensometric nr.	Tensiunea mecanică echivalentă σ_{ech}, în N/mm^2	
	Criteriul Galilei — Rankine (teoria I), σ_{ech}^{G}	Criteriul Mises — Huber (teoria IV), σ_{ech}^{M}		Criteriul Galilei—Rankine (teoria I), σ_{ech}^{G}	Criteriul Mises—Huber (teoria IV), σ_{ech}^{M}
Valorile maxime pentru $p_{expl} = 295$ bar (ciclurile 1 și 2)					
1,2	235,2	205,1	43,44	197,7	171,4
3,4*)	—	—	45,46	199,1	172,9
5,6	219,1	192,5	47,48	214,3	185,9
7,8	230,4	199,8	49,50	192,5	167,0
9,10	204,0	181,9	51,52	232,3	202,4
11,12	204,2	177,6	53,54*)	—	—
13,14	231,4	201,1	55,56	170,4	151,5
15,16	190,5	168,1	57,58	210,6	185,0
17,18	224,1	195,9	59,60	203,0	178,1
19,20	178,4	154,5	61,62	223,2	194,5
21,22	163,6	142,6	63,64	229,7	200,3
23,24	211,2	183,0	65,66	242,0	210,6
25,26	196,8	170,5	67,68	228,0	199,5
27,28	217,8	189,1	69,70	193,1	169,7
29,30	195,0	169,7	71,72	210,4	184,2
31,32	199,7	173,4	73,74	203,6	177,4
33,34	223,8	197,4	75,76	207,2	179,9
35,36	197,3	172,8	77,78	225,2	198,1
37,38	198,6	173,3	79,80	197,1	172,4
39,40	190,3	166,1	81,82	233,8	204,7
41,42	207,3	179,9	83,84	223,2	194,4
Valorile maxime pentru $p_h = 424$ bar (ciclul 1)					
1,2	308,5	267,2	43,44	260,5	225,6
3,4*)	—	—	45,46	251,4	217,9
5,6	273,9	237,5	47,48	287,6	249,3
7,8	273,7	237,0	49,50	254,6	220,6
9,10	268,9	233,8	51,52	296,6	257,2
11,12	239,2	207,4	53,54*)	—	—
13,14	271,3	235,3	55,56	208,7	184,5
15,16	249,2	216,2	57,58	268,7	234,4
17,18	269,2	233,2	59,60	261,3	227,7
19,20	236,9	205,7	61,62	284,1	246,6
21,22	212,9	184,6	63,64	291,2	252,5
23,24	279,7	242,3	65,66	371,9	275,6
25,26	252,9	219,5	67,68	285,3	248,3
27,28	287,6	249,1	69,70	237,7	207,1
29,30	253,4	219,5	71,72	266,1	232,6
31,32	261,1	226,3	73,74	254,2	220,2
33,34	249,3	216,0	75,76	261,5	226,5
35,36	258,8	226,4	77,78	280,5	243,4
37,38	261,4	226,5	79,80	249,8	217,1
39,40	246,8	214,6	81,82	300,1	260,9
41,42	268,9	232,9	83,84	240,1	210,9

* Traductor tonsometric dereglat.

aici $p_{expl,\,h}$ exprimîndu-se în MPa → N/mm^2, coeficienții de *amplificare* a tensiunilor mecanice s-au determinat cu următoarele formule evidente :

$$K_t^e = \frac{\max \sigma_t^e}{\sigma_t^n}; \tag{19}$$

$$K_{t,\,ech}^G = \frac{\sigma_{ech}^G}{\sigma_t^n}; \tag{20}$$

$$K_{t,\,ech}^M = \frac{\sigma_{ech}^M}{\sigma_t^n}, \tag{21}$$

valorile corespunzătoare, constatate experimental, fiind redate în tabelul 17.

Tabelul 17

Coeficientul de amplificare a tensiunilor mecanice. Valori constatate experimental

Traductorul tensometric nr.	$p_{expl} = 295$ bar (ciclul 1 și 2)		$p_h = 424$ bar (ciclul 1)	
	Coeficientul de amplificare a tensiunilor mecanice $K_{t,ech}^{e,G,M}$			
	$K_{t,ech}^{e,G} = \frac{\sigma_{t,ech}^{e,G}}{\sigma_t^n}$	$K_{t,ech}^{M} = \frac{\sigma_{ech}^{M}}{\sigma_t^n}$	$K_{t,ech}^{e,G} = \frac{\sigma_{t,ech}^{e,G}}{\sigma_t^n}$	$K_{t,ech}^{M} = \frac{\sigma_{ech}^{M}}{\sigma_t^n}$
1	2	3	4	5
1,2	1,28	1,11	1,16	1,01
3,4*)	—	—	—	—
5,6	1,19	1,04	1,03	0,90
7,8	1,25	1,08	1,03	0,89
9,10	1,11	0,99	1,01	0,88
11,12	1,11	0,96	0,90	0,78
13,14	1,26	1,09	1,02	0,89
15,16	1,03	0,91	0,94	0,82
17,18	1,22	1,06	1,02	0,88
19,20	0,97	0,84	0,89	0,78
21,22	0,89	0,77	0,80	0,70
23,24	1,15	0,99	1,06	0,91
25,26	1,07	0,92	0,95	0,83
27,28	1,18	1,03	1,09	0,94
29,30	1,06	0,92	0,96	0,83
31,32	1,08	0,94	0,99	0,85
33,34	1,21	1,07	0,94	0,82
35,36	1,07	0,94	0,98	0,85
37,38	1,08	0,94	0,99	0,85
39,40	1,03	0,90	0,93	0,81
41,42	1,12	0,98	1,01	0,88
43,44	1,07	0,93	0,98	0,85
45,46	1,08	0,94	0,95	0,82
47,48	1,16	1,01	1,09	0,94
49,50	1,04	0,91	0,96	0,83
51,52	1,26	1,10	1,12	0,97
53,54*)	—	—	—	—
55,56	0,92	0,82	0,79	0,70
57,58	1,14	1,00	1,01	0,88

Tabelul 17 (continuare)

1	2	3	4	5
59,60	1,10	0,97	0,99	0,86
61,62	1,21	1,05	1,07	0,93
63,64	1,25	1,09	1,10	0,95
65,66	1,31	1,14	1,20	1,04
67,68	1,24	1,08	1,08	0,94
69,70	1,05	0,92	0,90	0,78
71,72	1,14	1,00	1,00	0,88
73,74	1,10	0,96	0,96	0,83
75,76	1,12	0,98	0,99	0,85
77,78	1,22	1,07	1,06	0,92
79,80	1,07	0,94	0,94	0,82
81,82	1,27	1,11	1,12	0,98
83,84	1,21	1,05	0,91	0,80

*) Traductor tensometric dereglat.

Valorile coeficienților de siguranță *) $c_c^e \rightarrow$ față de limita tehnică de curgere minimă $\sigma_{c\,min}$ (tab. 3) și $c_r^e \rightarrow$ față de rezistența de rupere minimă $\sigma_{r\,min}$ (tab. 3), evaluate pe baza tensiunilor mecanice determinate prin metoda *TER* (tab. 14 și 16), în condițiile temperaturii standard normale ($t_n = 20°C$), s-au calculat cu următoarele formule clasice [3, 10]:

$$c_c^e = \frac{\sigma_{c\,min}^{20°C}}{\sigma_t^e}\ ; \quad c_r^e = \frac{\sigma_{r\,min}^{20°C}}{\sigma_t^e}\ ; \tag{22,23}$$

$$c_c^{e,G} = \frac{\sigma_{c\,min}^{20°C}}{\sigma_{ech}^{G}}\ ; \quad c_r^{e,G} = \frac{\sigma_{r\,min}^{20°C}}{\sigma_{ech}^{G}}\ ; \tag{24,25}$$

$$c_c^{e,M} = \frac{\sigma_{c\,min}^{20°C}}{\sigma_{ech}^{M}}\ ; \quad c_r^{e,M} = \frac{\sigma_{r\,min}^{20°C}}{\sigma_{ech}^{M}}\ , \tag{26,27}$$

ele regăsindu-se ca atare în tabelul 18.

Pentru alternativa practică cu $p_{expl} = 295$ bar și $t_c = 250°C$ (tab. 2), valorile care interesează $c_{c,r}^e$ se vor *corecta*, *diminuîndu-se*, în baza următoarelor corelații generale**):

$$c_{r\,\text{corectat}}^{e,G,M} = c_c^{e,G,M}\left(\frac{\sigma_{c\,min}^{250°C}}{\sigma_{c\,min}^{20°C}}\right) < c_c^{e,G,M}\ ; \tag{28}$$

$$c_{r\,\text{corectat}}^{e,G,M} = c_r^{e,G,M}\left(\frac{\sigma_{r\,min}^{250°C}}{\sigma_{r\,min}^{20°C}}\right) < c_r^{e,G,M}\ , \tag{29}$$

*) Întrucît coeficientul de rezistență al sudurii s-a impus a fi $\varphi = 1{,}00$, pentru referință s-au reținut caracteristicile mecanice ale materialului de bază, la nivelul lor *minim* (tab. 3).

**) Pentru $t \leqslant t_c = 250°C$, se admite dependența *liniară* de temperatură a caracteristicilor mecanice σ_c și σ_r ale materialului peretelui virolelor de convertor (fig. 1).

Tabelul 18

Valorile coeficienților de siguranță, evaluate pe baza tensiunilor mecanice determinate prin metoda tensometriei electrorezistive în condițiile temperaturii standard normale ($t_n = 20°C$)

Traductorul tensometric nr.	Coeficientul de siguranță c_c^e		Coeficientul de siguranță c_r^e	
	$c_c^{e,G} = \frac{\sigma_{c\,\min}^{20°C}}{\sigma_{t,ech}^{e,G}}$	$c_c^{e,M} = \frac{\sigma_{c\,\min}^{20°C}}{\sigma_{ech}^{M}}$	$c_r^{e,G} = \frac{\sigma_{r\,\min}^{20°C}}{\sigma_{t,ech}^{e,G}}$	$c_r^{e,M} = \frac{\sigma_{r\,\min}^{20°C}}{\sigma_{ech}^{M}}$
1	2	3	4	5
Valorile minime pentru $p_{expl} = 295$ bar (ciclurile 1 și 2)				
1,2	2,043	2,342	2,793	3,203
3,4*)	—	—	—	—
5,6	2,193	2,496	2,998	3,413
7,8	2,085	2,405	2,851	3,288
9,10	2,355	2,641	3,220	3,612
11,12	2,353	2,705	3,217	3,699
13,14	2,076	2,389	2,839	3,267
15,16	2,522	2,858	3,443	3,908
17,18	2,144	2,452	2,931	3,354
19,20	2,693	3,110	3,683	4,252
21,22	2,937	3,369	4,016	4,607
23,24	2,275	2,625	3,111	3,590
25,26	2,441	2,818	3,338	3,853
27,28	2,206	2,541	3,016	3,474
29,30	2,464	2,831	3,369	3,871
31,32	2,406	2,771	3,290	3,789
33,34	2,147	2,434	2,935	3,328
35,36	2,435	2,780	3,330	3,802
37,38	2,419	2,772	3,308	3,791
39,40	2,525	2,893	3,452	3,955
41,42	2,318	2,671	3,169	3,652
43,44	2,430	2,803	3,323	3,833
45,46	2,413	2,779	3,300	3,800
47,48	2,242	2,584	3,066	3,534
49,50	2,496	2,877	3,413	3,934
51,52	2,068	2,374	2,828	3,246
53,54*)	—	—	—	—
55,56	2,820	3,171	3,855	4,336
57,58	2,281	2,597	3,119	3,551
59,60	2,367	2,698	3,236	3,689
61,62	2,152	2,470	2,943	3,378
63,64	2,091	2,399	2,860	3,280
65,66	1,985	2,281	2,715	3,119
67,68	2,107	2,408	2,881	3,293
69,70	2,488	2,831	3,402	3,871
71,72	2,283	2,608	3,122	3,567
73,74	2,360	2,708	3,227	3,703
75,76	2,319	2,671	3,171	3,652
77,78	2,133	2,425	2,917	3,316
79,80	2,438	2,787	3,333	3,811
81,82	2,055	2,347	2,810	3,209
83,84	2,152	2,471	2,943	3,379
Valorile minime pentru $p_h = 424$ bar (ciclul 1)				
1,2	1,557	1,798	2,129	2,459
3,4*)	—	—	—	—
5,6	1,754	2,023	2,398	2,766
7,8	1,755	2,027	2,400	2,772

Tabelul 18 (continuare)

1	2	3	4	5
9,10	1,787	2,055	2,443	2,810
11,12	2,008	2,316	2,746	3,168
13,14	1,771	2,042	2,421	2,791
15,16	1,928	2,222	2,636	3,039
17,18	1,785	2,060	2,440	2,817
19,20	2,028	2,336	2,773	3,194
21,22	2,257	2,603	3,086	3,559
23,24	1,718	1,983	2,349	2,711
25,26	1,900	2,189	2,598	2,993
27,28	1,670	1,929	2,284	2,637
29,30	1,896	2,189	2,592	2,993
31,32	1,840	2,123	2,516	2,903
33,34	1,927	2,224	2,635	3,041
35,36	1,856	2,122	2,538	2,902
37,38	1,838	2,121	2,513	3,900
39,40	1,947	2,239	2,662	3,061
41,42	1,787	2,063	2,443	2,821
43,44	1,844	2,130	2,522	2,912
45,46	1,911	2,205	2,613	3,015
47,48	1,670	1,927	2,284	2,635
49,50	1,887	2,178	2,580	2,978
51,52	1,620	1,858	2,215	2,554
53,54*)	—	—	—	—
55,56	2,302	2,604	3,148	3,561
57,58	1,788	2,050	2,445	2,803
59,60	1,838	2,110	2,514	2,885
61,62	1,691	1,948	2,312	2,664
63,64	1,650	1,903	3,256	2,602
65,66	1,511	1,743	2,066	2,384
67,68	1,684	1,935	2,303	2,646
69,70	2,021	2,320	2,764	3,172
71,72	1,805	2,065	2,469	2,824
73,74	1,890	2,182	2,584	2,983
75,76	1,837	2,121	2,512	2,900
77,78	1,713	1,974	2,342	2,699
79,80	1,923	2,213	2,630	3,026
81,82	1,601	1,841	2,189	2,518
83,84	2,001	2,278	2,736	3,115

*) Traductor tensometric dereglat.

Notă. S-au avut în vedere valorile (tab.3): $\sigma_{c\,\min}^{20°C} = 480{,}53\ N/mm^2$ și $\sigma_{r\,\min}^{20°C} = 657{,}05\ N/mm^2$.

respectiv valorile restrictive $c_c^r = 1{,}500$ și $c_r^r = 2{,}400$ se vor *corecta*, *majorîndu-se*, în baza următoarelor corelații de asemenea generale*):

$$c_{c\ \text{corectat}}^r = c_c^r \left(\frac{\sigma_{c\,\min}^{20°C}}{\sigma_{c\,\min}^{250°C}} \right) > c_c^r = 1{,}500\,; \tag{30}$$

*) Pentru $t \leqslant t_c = 250°C$, se admite dependența *liniară* de temperatură a caracteristicilor mecanice σ_c și σ_r ale materialului peretelui virolelor de convertor (fig. 1).

$$c^r_{r\,\text{corectat}} = c^r_r \left(\frac{\sigma^{20^\circ C}_{r\,\min}}{\sigma^{250^\circ C}_{r\,\min}} \right) > c^r_r = 2{,}400, \tag{31}$$

rezultînd (tab. 3):

$$c^r_{c\,\text{corectat}} = 1{,}500 \cdot \left(\frac{480{,}53}{411{,}88} \right) = 1{,}750; \tag{32}$$

$$c^r_{r\,\text{corectat}} = 2{,}400 \cdot \left(\frac{657{,}05}{574{,}67} \right) = 2{,}744. \tag{33}$$

3.2.2. **Analiza şi interpretarea rezultatelor. Concluzii**

Deformaţiile specifice remanente, circumferenţiale $\Delta\varepsilon^e_t$ şi longitudinale $\Delta\varepsilon^e_m$, constatate prin metoda *TER* şi înregistrate ca atare (tab. 15), au fost considerabil mai mici decît deformaţia specifică remanentă plastică $\varepsilon_{rp} = 0{,}2\%$, corespunzătoare limitei tehnice (convenţionale) de curgere $\sigma_c = \sigma_{0,2}$, ceea ce atestă — într-o primă apreciere — comportarea tehnic *elastică* a materialului peretelui virolei V a convertorului de amoniac în domeniul de presurizare interioară hidraulică $p \leqslant p_h = 424$ bar. De altfel, cea mai mare tensiune mecanică, evidenţiată prin intermediul traductorului tensometric nr. 65 la presiunea $p_h = 424$ bar (ciclul 1) şi avînd intensitatea $\sigma^e_t = 317{,}9$ N/mm^2, s-a situat cu mult (peste 30%) sub nivelul $\sigma^{20^\circ C}_{c\,\min} = 480{,}53$ N/mm^2.

Local, valorile constatate experimental ale coeficientului de amplificare a tensiunilor mecanice circumferenţiale K^e_t au fost următoarele (tab. 17):

- *în cazul cu* $p_{expl} = 295$ *bar:*

$K^e_t = K^G_{t,ech} = 1{,}06 \ldots 1{,}28$ — pentru traductorii nr. 1,5,7,9,11,29,41,61, 67,71,73,75,77,79 şi 81, toţi plasaţi în axul sudurii S a virolei V; de remarcat că traductorii nr. 1 ($K^e_t = 1{,}28$) şi 5 ($K^e_t = 1{,}19$) s-au aflat în zona defectului nr. 8 (fig. 2), iar cei nr. 29 ($K^e_t = 1{,}06$) şi 41 ($K^e_t = 1{,}12$) s-au aflat în zona defectului nr. 7 (fig. 2);

$K^e_t = K^G_{t,ech} = 1{,}07 \ldots 1{,}31$ — pentru traductorii nr. 13,17,23,27,31,43, 51,59,63 şi 65, toţi plasaţi în imediata apropiere — de o parte sau de alta — a sudurii S a virolei V; de remarcat că traductorii nr. 27 ($K^e_t = 1{,}18$), 31 ($K^e_t = 1{,}08$) şi 43 ($K^e_t = 1{,}07$) s-au aflat în zona defectului nr. 7 (fig. 2);

$K^e_t = K^G_{t,ech} = 1{,}04 \ldots 1{,}21$ — pentru traductorii nr. 25,33,37,45,49 şi 57, plasaţi — de o parte sau de alta — la 80 mm de marginea sudurii S a virolei V;

$K_t^e = K_{t,ech}^G = 1{,}07 \ldots 1{,}21$ — pentru traductorii nr. 35,47 și 83, plasați în cîmpul materialului de bază, la 120 mm de marginea sudurii S a virolei V și, respectiv, într-o zonă așa-zisă netulburată (la 600 mm de axa sudurii S — fig. 10);

$\max K_t^e = \max K_{t,ech}^G = 1{,}31$ — pentru traductorul nr. 65, plasat la periferia zonei remediate (ZR în fig. 2);

$\min K_t^e = \min K_{t,ech}^G = 0{,}89 \ldots 0{,}97 < 1{,}00$ — pentru traductorii nr. 19 și 55 plasați în imediata apropiere a sudurii S a virolei V, respectiv pentru traductorul nr. 21 plasat chiar pe axa sudurii date, aceste valori nefiind suficient de concludente;

$K_{t,ech}^M = 1{,}00 \ldots 1{,}14 \geqslant 1{,}00$ — pentru traductorii nr. 1, 5, 7, 13, 17, 27, 33, 47, 51, 57, 61, 63, 65, 67, 71, 77, 81 și 83, valoarea maximă (1,14) corespunzînd traductorului nr. 65;

$K_{t,ech}^M = 0{,}77 \ldots 0{,}99 < 1{,}00$ — pentru traductorii nr. 9,11,15,19,21,23, 25, 29, 31, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 49, 55, 59, 69, 73, 75 și 79, valoarea minimă (0,77) corespunzînd traductorului nr. 21;

● *în cazul cu* $p_h = 424$ *bar:*

$K_t^e = K_{t,ech}^G = 1{,}00 \ldots 1{,}20 \geqslant 1{,}00$ — pentru traductorii nr. 1,5,7,9, 13, 17, 23, 27, 41, 47, 51, 57, 61, 63, 65, 67, 71, 77 și 81, valoarea maximă (1,20) corespunzînd traductorului nr. 65;

$K_t^e = K_{t,ech}^G = 0{,}79 \ldots 0{,}99 < 1{,}00$ — pentru traductorii nr. 11, 15, 19, 21, 25, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 43, 45, 49, 55, 59, 69, 73, 75, 79 și 83, valoarea cea mai mică (0,79) corespunzînd traductorului nr. 55;

$K_{t,ech}^M = 1{,}01$ și $1{,}04 \sim 1{,}00$ — pentru traductorii nr. 1 și, respectiv, 65;

$K_{t,ech}^M = 0{,}70 \ldots 0{,}98 < 1{,}00$ — pentru toți ceilalți traductori activi nr. 5, 7, 9, 11 etc.

Așadar, se pot conchide următoarele:

a) local și de la un punct de tensometrare la altul, valorile constatate experimental K_t^e sînt mai mult sau mai puțin diferite de cele teoretice K_t (tab. 6), cantitativ primele incluzînd și efectele concentratoare corespunzătoare (locale), multiplicatoare sau demultiplicatoare de intensitate a tensiunilor mecanice circumferențiale (K_t^e) ori echivalente ($K_{t,ech}^{G,M}$); bunăoară, în cazul cu $p_{expl} = 295$ bar, coeficientul de concentrare α_σ a putut avea ordinul de mărime:

— pentru traductorul nr. 1:

$$\alpha_{\sigma\ \min} = K_t^e / K_{t\ \max} = 1{,}28/1{,}0667 = 1{,}20;$$

$$\alpha_{\sigma\ \max} = K_t^e / K_{t\ \min} = 1{,}28/1{,}0001 = 1{,}28;$$

— pentru traductorul nr. 5 :

$$\alpha_{\sigma\,\min} = K_t^e/K_{t\,\max} = 1{,}19/1{,}0667 = 1{,}12\,;$$

$$\alpha_{\sigma\,\max} = K_t^e/K_{t\,\min} = 1{,}19/1{,}0001 = 1{,}19,$$

în zona defectului nr. 8 (fig. 2);

— pentru traductorul nr. 29 :

$$\alpha_{\sigma\,\min} = K_t^e/K_{t\,\max} = 1{,}06/1{,}0667 = 0{,}99 < 1{,}00\,;$$

$$\alpha_{\sigma\,\max} = K_t^e/K_{t\,\min} = 1{,}06/1{,}0001 = 1{,}06\,;$$

— pentru traductorul nr. 41 :

$$\alpha_{\sigma\,\min} = K_t^e/K_{t\,\max} = 1{,}12/1{,}0667 = 1{,}05\,;$$

$$\alpha_{\sigma x} = K_t^e/K_{t\,\min} = 1{,}12/1{,}0001 = 1{,}12,$$

în zona defectului nr. 7 (fig. 2);

— pentru traductorul nr. 65 ;

$$\alpha_{\sigma\,\max} = K_t^e/K_{t\,\min} = \max\, K_t^e/K_{t\,\min} = 1{,}31/1{,}0000 = 1{,}31,$$

la periferia zonei remediate ; prin urmare, valorile *maxime* ale coeficientului de concentrare α_σ sînt următoarele :

$\max \alpha_\sigma = 1{,}28$ — în zonele cu defecte de tipul celor din figura 2 ;

$\max \alpha_\sigma = 1{,}31$ — în zona remediată a sudurii S, longitudinale, a virolei 5 (fig. 2 și 9) ;

b) efecte concentratoare locale destul de puternice ($K_t = 1{,}0.0 \rightarrow$ $\rightarrow \alpha_\sigma = K_t^e \leqslant 1{,}21$) sînt evidențiate atît în sudura propriu-zisă, cît și[1] în zona de influență termomecanică a sudurii, respectiv în unele dintre punctele de tensometrare aflate chiar în cîmpul materialului de bază ;

c) calitativ, cele consemnate anterior sînt confirmate și în condițiile analizei globale care valorifică criteriul Mises-Huber (a se vedea valorile coeficientului de amplificare $K_{t,ech}^M$) ;

d) în circumstanțele presurizării la intensitatea $p_h = 424$ bar, ca urmare a distorsionărilor elastice datorite suprasolicitării mecanice, efectele concentratoare locale se atenuează sensibil, rezultînd :

$$\sigma_{\sigma\,\min} = \max\, K_t^e/K_{t\,\max} = 1{,}20/1{,}0667 = 1{,}12\,;$$

$$\alpha_{\sigma\,\max} = \max\, K_t^e/K_{t\,\min} = 1{,}20/1{,}0000 = 1{,}20\,;$$

prin urmare

$$\max \alpha_\sigma \leqslant 1{,}20.$$

La nivelul suprafeței interioare a peretelui metalic al convertorului de amoniac (fig. 1), cea mai mare tensiune mecanică, bineînțeles circumferențială, corespunde tot traductorului tensometric nr. 65 la presiunea $p_h = 424$ bar $= 42{,}4$ MPa (N/mm^2) (ciclul 1) și are intensitatea:

$$\sigma_{ti}^{e} = \sigma_{t}^{e} + p_h = 317{,}9 + 42{,}4 = 360{,}3 \ N/mm^2,$$

aceasta de asemenea situîndu-se cu mult (peste 25%) sub nivelul $\sigma_{c\ mi}^{20°C} = 480{,}53 \ N/mm^2$.

Valorile coeficienților de siguranță, evaluate pe baza tensiunilor mecanice determinate prin metoda *TER* (la suprafața exterioară a peretelui virolei 5 — fig. 2), sînt următoarele (tab. 18):

a) în condițiile temperaturii standard normale ($t_n = 20°C$):

$$\left.\begin{aligned} c_c^e &= c_c^{e,G} \geqslant 1{,}985 \gg c_c^r = 1{,}500; \\ c_c^{e,M} &\geqslant 2{,}281 \gg c_c^r = 1{,}500; \end{aligned}\right\} p_{expl} = 295 \text{ bar};$$

$$\left.\begin{aligned} c_c^e &= c_c^{e,G} \geqslant 1{,}511 \gg c_c^r = 1{,}200; \\ c_c^{e,M} &\geqslant 1{,}743 \gg c_c^r = 1{,}200; \end{aligned}\right\} p_h = 424 \text{ bar};$$

$$\left.\begin{aligned} c_r^e &= c_r^{e,G} \geqslant 2{,}715 > c_r^r = 2{,}400; \\ c_r^{e,M} &\geqslant 3{,}119 \gg c_r^r = 2{,}400; \end{aligned}\right\} p_{expl} = 295 \text{ bar};$$

$$\left.\begin{aligned} c_r^e &= c_r^{e,G} \geqslant 2{,}066; \\ c_r^{e,M} &\geqslant 2{,}384; \end{aligned}\right\} p_h = 424 \text{ bar},$$

valori restrictive c_r^r, în cazul intensităților de presurizare p_h, nefiind impuse prin PT ISCIR C 4-83;

b) în condițiile temperaturii de calcul ($t_c = 250°C$):

$$\left.\begin{aligned} c_c^e &= c_c^{e,G} \geqslant 1{,}985 > c_{c\ corectat}^r = 1{,}750; \\ c_c^{e,M} &\geqslant 2{,}281 \gg c_{c\ corectat}^r = 1{,}750; \\ c_r^e &= c_r^{e,G} \geqslant 2{,}715 < c_{r\ corectat}^r = 2{,}744; \\ c_r^{e,M} &\geqslant 3{,}119 \gg c_{r\ corectat}^r = 2{,}744; \end{aligned}\right\} p_{expl} = 295 \text{ bar},$$

valorile c_r^r nefiind impuse ca atare prin documentația de proiectare a convertorului de amoniac. Toate valorile *minime*, reținute pentru coeficienții de siguranță $c_c^{e,G,M}$ și $c_r^{e,G,M}$, corespund traductorilor tensometrici

nr. 65 și 66, plasați la periferia zonei remediate (fig. 2 și 10), la nivelul suprafeței *interioare* a peretelui virolei V, pentru care :

$$\sigma_1 = \sigma_{ti}^e = 360{,}3 \ N/\text{mm}^2; \quad \sigma_2 = \sigma_{mi}^e = \sigma_m^e = 171{,}0 \ N/\text{mm}^2,$$

în cazul $p_h = 424$ bar, respectiv :

$$\sigma_1 = \sigma_{ti}^e = \sigma_t^e + p_{\text{expl}} = 242 + 29{,}5 = 271{,}5 \ N/\text{mm}^2;$$

$$\sigma_2 = \sigma_{mi}^e = \sigma_m^e = 141{,}8 \ N/\text{mm}^2,$$

în cazul cu $p_{\text{expl}} = 295$ bar, rezultînd :

$$\left.\begin{aligned}
&c_c^e = c_c^{e,G} = \frac{480{,}53}{271{,}5} = 1{,}770 > c_c^r = 1{,}500; \\
&c_r^e = c_c^{e,G} = \frac{657{,}05}{271{,}5} = 2{,}420 > c_r^r = 2{,}400; \\
&\sigma_{ech}^M = \sqrt{271{,}5^2 + 141{,}8^2 - 271{,}5 \cdot 141{,}8} = \\
&\quad = 235{,}2 \ N/\text{mm}^2; \\
&c_c^{e,M} = \frac{480{,}53}{235{,}2} = 2{,}043 \gg c_c^r = 1{,}500 \\
&c_r^{e,M} = \frac{657{,}05}{235{,}2} = 2{,}793 > c_r^r = 2{,}400;
\end{aligned}\right\} p_{\text{expl}} = 295 \text{ bar};$$

$$\left.\begin{aligned}
&c_c^e = c_c^{e,G} = \frac{480{,}53}{360{,}3} = 1{,}333 > 1{,}200; \\
&c_r^e = c_r^{e,G} = \frac{657{,}05}{360{,}3} = 1{,}823; \\
&\sigma_{ech}^M = \sqrt{360{,}3^2 + 171{,}0^2 - 360{,}3 \cdot 171{,}0} = \\
&\quad = 312{,}16 \ N/\text{mm}^2; \\
&c_c^{e,M} = \frac{480{,}53}{312{,}16} = 1{,}539 \gg 1{,}200; \\
&c_r^{e,M} = \frac{657{,}05}{312{,}16} = 2{,}104;
\end{aligned}\right\} p_h = 424 \text{ bar},$$

atunci cînd se consideră starea cu $t_n = 20°C$, sau :

$$\left.\begin{aligned} &c_c^e = c_c^{e,G} = 1{,}770 > c_{c\,\text{corectat}}^r = 1{,}750\,; \\ &c_c^{e,M} = 2{,}043 \gg c_{c\,\text{corectat}}^r = 1{,}750\,; \\ &c_r^e = c_r^{e,G} = 2{,}420 < c_{r\,\text{corectat}}^r = 2{,}744\,; \\ &c_r^{e,M} = 2{,}793 > c_{r\,\text{corectat}}^r = 2{,}744\,; \end{aligned}\right\} p_{\text{expl}} = 295 \text{ bar},$$

atunci cînd se consideră starea cu $t_c = 250°C$. Aceste din urmă valori experimentale $c_c^{e,G,M}$ și $c_r^{e,G,M}$, revenind la nivelul suprafeței *interioare* a peretelui metalic al virolei V a convertorului de amoniac, sînt marcate și în figurile 7 și 8.

Așadar, evaluarea experimentală *locală* (criteriul Galilei-Rankine) și cea *globală* (criteriul Mises-Huber) a stărilor de solicitare, la nivelul suprafețelor exterioară și interioară ale peretelui metalic al virolei V a mantalei convertorului de amoniac, în circumstanțele $p_{\text{expl}} = 295$ bar și $t_c = 250°C$, confirmă o disponibilitate corespunzătoare de capacitate portantă și, deci, de securitate tehnică în exploatare ori de cîte ori presiunea manometrică maximă $p_{\max} \leqslant p_{\text{expl}} = 295$ bar și temperatura peretelui metalic $t_{\max} \leqslant t_c = 250°C$. Se reatestă, astfel, concluziile și recomandările principale din paragraful 2.2.4. (punctul 8), fundamentate pe calea studiului analitic.

Primit în redacție la 22 februarie 1989

BIBLIOGRAFIE

1. I. CHEȘA ș.a., *Alegerea și utilizarea oțelurilor*, Edit. tehnică, București, 1984.
2. T. PANĂ ș.a., *Rezistența materialelor*, Vol. II, Institutul Politehnic, București, 1985.
3. A. PAVEL, *Elemente de inginerie mecanică (pentru petrochimie)*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1981.
4. A. PAVEL, *Plesnirea longitudinală a tubulaturilor presurizate uniform la interior*, Mine, Petrol și Gaze, **36**, 9 (1985).
5. A. PAVEL ș.a., *Siguranța în funcționare a utilajelor petrochimice*, vol. **1** și **2**, Edit. tehnică, București, 1987.
6. R. E. PETERSON, *Stress concentration factors*, John Wiley, New York, 1971.
7. V. I. TRUFIAKOV, *Ustalost svarnih soedinenii*, Naukova dumka, Kiev, 1973.
8. GH. BUZDUGAN, M. BLUMENFELD, *Tensometria electrică rezistivă*, București, Edit. tehnică, 1966.
9. GH. BUZDUGAN, AL. SELEȘTEANU (coord.), *Manualul inginerului mecanic*, Vol. **1**, Edit. tehnică, București, 1959.
10. A. PAVEL, *Materiale și rezistențe admisibile folosite în construcția de utilaje pentru industria petrolieră prelucrătoare și petrochimică*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1967.

G. SZABÓ, *Neuere Entwicklungen um die Theorie und Berechnung elastischer Platten*, (Rezultate noi privind teoria și calculul plăcilor elastice), G. S. Eigenverlag, Walddorfhäslach, 1989, 164 pag., 40 fig., 16 tab. și 6 programe BASIC, 26 ref. bibl.

Cartea de față reprezintă volumul 2 al seriei de mecanică inginerească, editată de autor, ce se bazează pe luarea în considerare a structurii atomice a materialelor. Primul volum (recenzat în nr. 3/1989 al acestei reviste) fundamentează concepția nouă ce consideră că deformațiile transversale ale materialelor derivă din tensiuni transversale chiar și la o acțiune exterioară uniaxială. Dintre cele două soluții propuse pentru revizuirea concepției tradiționale privind tensiunile și deformațiile, în lucrarea de față se adoptă cea de a doua, mai simplă. Aceasta utilizează, în cadrul teoriei clasice a elasticității, o nouă interpretare a deformației transversale, ce se aplică în volumul de față problemei încovoierii plăcilor plane.

După un capitol introductiv, capitolul doi tratează pe larg noile relații fundamentale, ecuația cu derivate parțiale a încovoierii plăcilor ce derivă din acestea cît și relațiile pentru determinarea eforturilor, atît în sistemul de referință cartezian cît și în cel polar. Pentru rezolvarea numerică a ecuației se aplică metoda diferențelor finite, prezentîndu-se programe de calcul adecvate scrise în limbajul BASIC. În continuare se studiază valoarea plăcilor plane, determinarea încărcărilor critice fiind de asemenea programată. Toate programele listrate în carte pot fi utilizate — la alegere — cu semnificația tradițională sau cu cea nouă a deformației transversale. Se fac și observații privind utilizarea metodei elementelor finite pentru tratarea problemelor abordate.

În capitolul trei se prezintă date numerice referitoare la calculul plăcilor în varianta propusă, comparativ cu cea tradițională și se dau multiplicatori ce permit corectarea săgeților și eforturilor din tabelele utilizate în mod curent. Prelucrarea și interpretarea rezultatelor măsurătorilor pe modele de plăci cît și observații privind utilizarea cunoscutelor tabele ale lui Rüsch pentru calculul plăcilor oblice ale podurilor — bazate pe măsurători — fac obiectul capitolului patru. Ultimul capitol se referă la date numerice privind voalarea plăcilor plane, în concordanță cu concepția nouă a autorului. Din capitolele 3,4 și 5 rezultă că noua interpretare a deformației transversale are o influență în ansamblul favorabilă asupra încovoierii plăcilor, în ceea ce privește valoarea acestora se ajunge însă uneori la constatări neliniștitoare.

Este de admirat consecvența cu care autorul își dezvoltă concepția originală privind solicitările mecanice, punînd în același timp la dispoziția proiectanților și cercetătorilor din domeniul mecanicii corpurilor solide o nouă lucrare foarte interesantă, practică și utilă.

R. Friedrich

R. SZILARD, D. ZIESING, S. PICKHARDT, *TURBO-BASIC — Programme für Baumechanik und Statik.* (Programe în TURBO-BASIC pentru mecanica construcțiilor), Ernst u. Sohn. Berlin, 1989, 424 pag., 209 fig., 10 tab., 12 ref. bibl.

Datorită succesului de care s-a bucurat o carte anterioară a autorilor cu titlul „Programe în BASIC pentru mecanica construcțiilor", aceștia — ținînd seama și de observațiile critice ce le-au parvenit — au scris programe noi cu aplicabilitate lărgită. Limbajul TURBO-BASIC în varianta Borland Int., pe care l-au utilizat, este mult mai puternic decît limbajul BASIC obișnuit. Programele prezentate pot fi împărțite în trei grupe : prima se referă la grinzi cu una și mai multe deschideri, cea de a doua la grinzi cu zăbrele, cadre și rețele de grinzi iar cea de a treia la șaibe, dale și plăci axial-simetrice.

Primul capitol al cărții cuprinde noțiuni introductive, punîndu-se în evidență facilitățile oferite de interfața cu utilizatorul : posibilități de verificare a datelor de intrare — inclusiv prin vizualizarea sistemului discretizat prin elemente finite — și de corectare a acestora ori de cîte

ori este necesar. Cazurile de încărcare ce pot fi tratate acoperă practic toate necesităţile proiectării curente. Se prezintă pe scurt structura programelor şi măştile pentru introducerea datelor, pentru efectuarea corecturilor şi pentru alegerea operaţiilor de efectuat. Programele din carte ocupîndu-se pe de o parte de structuri din bare şi pe de alta de structuri din plăci subţiri s-au alcătuit două programe meniu, descrise în capitolul doi. Acesta mai cuprinde şi cele patru fişiere INCLUDE cu subprogramele comune.

Capitolul trei se referă la programele pentru grinzi ş.a. grinzi simplu rezemate secţionate de forţe concentrate şi distribuite trapezoidal pe porţiuni, grinzi continue cu suprapunerea automată a acţiunilor şi grinzi pe mediu elastic tratate cu metoda coeficientului de pat. Programele pentru sisteme de bare sînt cuprinse în capitolul patru : grinzi cu zăbrele plane, cadre plane în teoria de ordinul I şi în teoria de ordinul II, reţele de grinzi cu rezemări discrete respectiv pe un mediu elastic.

Ultimul capitol cuprinzînd descrieri de programe, al cincelea, se ocupă de plăci plane încărcate în planul lor — discretizate prin elemente finite triunghiulare, plăci plane acţionate normal pe planul lor — idealizate prin elemente finite triunghiulare şi dreptunghiulare — cu posibilitatea de a trata şi rezemarea pe un mediu elastic, respectiv de dimensionare în varianta beton armat şi plăci de rotaţie acţionate axial — simetric, discretizate prin elemente tronconice.

Fiecare prezentare de program este însoţită de un exemplu de introducere a datelor şi de reproducerea rezultatelor obţinute la rulare.

Capitolul şase, ce ocupă aproximativ 62% din volumul cărţii, cuprinde listarea celor 2 programe meniu din capitolul 2 cît şi a celor 11 programe de calcul descrise în capitolele 3—5. Sînt destinate unor calculatoare campatibile IBM şi pot fi obţinute şi pe dischete.

Din prezentarea făcută rezultă că lucrarea de faţă este foarte utilă tuturor celor ce se ocupă de calculul elementelor şi structurilor de rezistenţă din domeniul ingineriei mecanice şi de construcţii.

R. Friedrich

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

- Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental; de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.
- Note (lucrări mai scurte cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni).
- Referate ştiinţifice şi tehnice, în care se expun stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.
- Recenzii asupra cărţii româneşti şi străine.

Domeniile de specialitate ale revistei sînt:

- Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital,impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosfera rarefiată, în atmosfera densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).
- Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).
- Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).
- Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calcul al maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).
- Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri stabilite, analogii electrice şi hidraulice).
- Statica şi dinamica construcţiilor, metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).
- Tehnica măsurătorilor (aparate electrice, pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi izotopilor radioactiv în tehnică).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi din străinătate.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, 79717 Bucureşti 22, Calea Victoriei nr. 125, sectorul 1.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 49, nr. 4 iulie—a ugust 1990

SUMAR

STUDII

C. FETECĂU, Influenţa termală asupra propagării undelor cilindrice de acceleraţie în fluide simple 343

ŞT. STAICU, Expresii matriceale în statica sistemelor plane prin metoda grafului echivalent 355

A. PETRE, I. DRĂGHICI, Tehnici de calcul al coeficientului de siguranţă la solicitări variabile în funcţie de σ_{-1}, σ_r şi σ_0 365

GH. CREMENESCU, I. DUMITRESCU, Optimizarea staţionară asistată de calculator a regimului mecanic al forajului 375

GH. PANAIT, Echilibrajul rotorului cu masă variabilă (cu dezechilibru variabil). Consideraţii asupra sistemului de ecuaţii diferenţiale pentru modelul matematic adoptat 385

I. M. CIORNEI, Căi de îmbunătăţire a variatoarelor elastohidrodinamice 401

REFERATE ŞTIINŢIFICE

ADELINA GEORGESCU, C. VAMOŞ, N. SUCIU, Scenarii de turbulenţă în cadrul haosului determinist 413

C. I. BORŞ, În dezbatere o nouă teorie a gravitaţiei 429

RECENZII 445

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Articolele, originale și de înalt nivel științific, vor fi redactate într-un stil concis, evitîndu-se introducerile foarte lungi. Articolele vor fi dactilografiate la două rînduri, pe hîrtie albă de bună calitate, în două exemplare. Prima pagină trebuie să conțină titlul lucrării, numele autorului (autorilor) și locul de muncă precum și un rezumat de cel mult 150 cuvinte. Toate datele științifice și tehnice prezentate trebuie formulate în unități SI. Formulele trebuie dactilografiate sau scrise cu cerneală, clar și indicîndu-se caracterul literelor (aldine, italice etc.). Indicii inferiori și superiori trebuie indicați clar, pentru evitarea confuziilor. Ca semn zecimal se va utiliza virgula. Tabelele vor fi dactilografiate pe foi separate, cu indicarea titlurilor și cu numerotarea în cifre arabe. Desenele și diagramele trebuie executate în tuș, pe hîrtie de calc la dimensiuni aproximativ duble față de acelea finale și cu litere scrise cu îngrijire și suficient de mari pentru a fi vizibile după reproducere. Referințele bibliografice vor fi menționate, pe cît posibil, în ordine alfabetică, la sfîrșitul articolului. În text vor, fi indicate prin numărul din lista referințelor, în paranteze drepte.

Referințele din reviste vor conține inițiala și numele autorului (autorilor), titlul articolului (subliniat cu o linie) numele revistei (prescurtat conform uzanțelor internaționale), numărul volumului (subliniat dublu), numărul fasciculei și anul de apariție în paranteză, de exemplu :

1. S. AIWICOVICI, C. FETECĂU, Existence of Couette flows in second grade fluids Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., **31**, 5 (1986).

Referirea la o carte se face indicînd inițiala și numele autorului (autorilor), titlul cărții (subliniat cu o linie), editura, orașul, anul apariției și numerele paginilor, dacă referirea se face la o parte a cărții, de exemplu :

3. W. FLÜGGE, Tensor Analysis and Continuum Mechanics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1972, p. 93—99.

Manuscrisele vor fi trimise la adresa : 79717 București 22, Calea Victoriei 125.

INFLUENȚA TERMALĂ ASUPRA PROPAGĂRII UNDELOR CILINDRICE DE ACCELERAȚIE ÎN FLUIDE SIMPLE

de C. FETECĂU
Institutul Politehnic „Gh. Asachi", Iași

În această lucrare ne-am propus să studiem influența termală asupra propagării undelor cilindrice de accelerație în fluide simple cu memorie. Rezultatele obținute, în deplină concordanță cu cele din [1], au condus în cazul mișcărilor Couette la același tip de instabilitate. Aceeași undă însă, în fluide simple lineare conducătoare de căldură se amortizează.

1. INTRODUCERE

În [1] a fost studiată comportarea undelor cilindrice de accelerație în fluide simple incompresibile, supuse unor mișcări eicoidale. S-a constatat, printre altele, că în cazul mișcărilor de tip Couette amplitudinea undei, soluție a unei ecuații de tip Bernoulli, poate deveni infinită într-un timp finit. În cazul teoriei liniarizate, în contrast cu teoria exactă, aceeași undă se amortizează.

În această lucrare, ne propunem să punem în evidență influența efectelor termale asupra propagării undelor amintite. În acest scop, în ecuațiile constitutive va trebui să intervină și variabilele termice. Astfel, extra-tensiunea $\mathbf{S}$, energia liberă ψ, entropia η și fluxul de căldură $\mathbf{q}$ la momentul t, așa cum rezultă din [2] § 1.1, vor fi date prin următoarele ecuații constructive[1]

$$(\mathbf{S}, \psi, \eta) = (\mathbf{S}, \psi, \eta)(\Gamma^t(s)\,;\,\theta)\ ;\ s \in (0, \infty) \tag{1.1}$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}\,(\Gamma^t(s)\,;\,\theta, \overline{\mathbf{g}})$$

unde $\Gamma^t = (\mathbf{G}^t, \theta^t, \overline{\mathbf{g}}^t)$ este istoria mișcării definită pentru $s \in (0, \infty)$ (aici $\mathbf{G}^t = (\mathbf{F}^t)\,\mathbf{F}^t - \mathbf{I}$ cu $\mathbf{F}^t(s) = \mathbf{F}(t - s)$ istoria gradientului de deformare relativ și $\mathbf{I}$ tensorul identitate, θ^t istoria temperaturii, $\overline{\mathbf{g}}^t = (\mathbf{F}^t)^T\,\mathbf{g}^t$ cu $\mathbf{g}^t = \operatorname{grad}\theta^t$), iar θ și $\mathbf{g}$ temperatura și gradientul acesteia la momentul t.

---

[1] Pentru simplitatea scrierii, în cele ce urmează vom folosi notația $\varphi(f(s))$ (sau mai simplu $\varphi(f)$) pentru $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\varphi}}(f(s))$.

În cazul teoriei linearizate, ecuațiile constitutive corespunzătoare lui $\mathbf{S}$, η și $\mathbf{q}$ se reduc la [2]

$$\mathbf{S} = -2\rho\int_0^\infty \zeta'(s)\mathbf{G}(s)\mathrm{d}s, \quad \eta = -\beta\,(0) \tag{1.2}$$

$$\mathbf{q} = -k(0)\mathbf{g} - \int_0^\infty k'(s)\mathbf{g}\,(s)\,\mathrm{d}s$$

unde ζ, β și k sînt funcții materiale de relaxare. Întrucît ne va folosi mai tîrziu, reamintim că

$$\zeta(0) = 0 \text{ iar } \zeta(t) \geqslant 0 \text{ pentru orice } t > 0. \tag{1.3}$$

În cele ce urmează, vom studia propagarea undelor cilindrice de acceleraţie prin fluide simple caracterizate prin ecuaţii constitutive de forma (1.1) şi (1.2). În cazul undelor izoterme şi pur mecanice viteza este determinată explicit. Privitor la amplitudinea undelor izoterme, ce se propagă într-un fluid simplu supus unei mişcări de tip Couette, se poate spune că, la fel ca în cazul pur mecanic, ea poate deveni infinită într-un timp finit. În cazul teoriei linearizate viteza undelor este constantă, iar amplitudinea, în contrast cu teoria exactă, descreşte la zero exponenţial.

2. PROPRIETĂŢI DE BAZĂ ALE MIŞCĂRILOR ELICOIDALE

Tipurile de mişcări ce vor fi considerate în continuare, au cîmpul de viteze într-un sistem de coordonate cilindrice [3]

$$\dot{r} = 0, \quad \dot{\varphi} = \omega(r, t), \quad \dot{z} = (v, rt) \tag{2.1}$$

Pentru astfel de mişcări, care sînt evident izocore, componentele fizice ale istoriei de deformare sînt date prin

$$\mathbf{G}^t(.) = \begin{pmatrix} \alpha^t(.)^2 + \beta^t(.)^2 & \alpha^t(.) & \beta^t(.) \\ \alpha^t(. & 0 & 0 \\ \beta^t(.) & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

---

[2] Expresia lui ψ nu va fi utilizată în această lucrare.

[3] În [3], aceste mişcări sînt numite elicoidale, deoarece, în general, liniile de curent corespunzătoare sînt elice.

unde

$$\alpha^t(s) = -r\int_0^\infty \partial_r \omega^t(u)du,\ \beta^t(s) = -\int_0^\infty \partial_r v^t(u)du \tag{2.3}$$

sînt funcţii reale definite pe $[0, \infty]$.

Presupunînd că θ, la fel ca ω şi v, este o funcţie numai de r şi t rezultă (în baza relaţiilor (1.1), (2.2) şi (2.3)) că, $\mathbf{S}\ \psi,\ \eta$ şi $\mathbf{q}$, daţi prin [4]

$$(\mathbf{S}, \psi, \eta) = (\mathbf{S}, \psi, \eta)(\Lambda(s)\,;\,\theta)$$
$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\Lambda(s)\,;\,\theta, g)\,;\ \Lambda = (\alpha^t, \beta^t, \theta^t, g^t) \tag{2.4}$$

sînt funcţii numai de r şi t. Prin urmare, ecuaţiile mişcării şi echilibrul energiei (în absenţa radiaţiei externe) se reduc la

$$\partial_r S_{r\theta} + \frac{2}{r} S_{r\theta} = \rho r\, \partial_t \omega,\ \partial_r S_{rz} + \frac{1}{r} S_{rz} + a(t) = \rho \partial_t v \tag{2.5}$$

respectiv

$$rS_{r\theta}\partial_r \omega + S_{rz}\partial_r v - \frac{1}{r}\partial_r (rq) = \rho \partial_t \varepsilon \tag{2.6}$$

unde ρ este densitatea fluidului, $a(t)$ este forţa specifică de împingere [3, 4], adică forţa exercitată pe unitatea de volum în direcţia axei cilindrilor, ε este energia liberă, iar $q = q_r$ este prima componentă a vectorului flux de căldură.

În ceea ce priveşte restricţiile impuse de principiile simetriei şi obiectivităţii, asupra noilor funcţionale constitutive din (2.4), reamintim aici doar [2]

$$\psi = \psi(\gamma^t(s)\,;\,\theta),\ q = q(\gamma^t(s)\,;\,\theta, g) \tag{2.7}$$

unde $\gamma = (\alpha^2 + \beta^2,\ \theta,\ g)$. Dintre restricţiile impuse de inegalitatea Clausiue-Duhem, vom utiliza doar următoarele [5]

$$S_{r\theta} = -2\rho\,\delta_\gamma \psi(\gamma^t(s)\,;\,\theta/\alpha^t(s))$$
$$S_{rz} = -2\,\rho\delta_\gamma\psi(\gamma^t(s)\,;\,\theta/\beta^t(s)) \quad ;\ \eta_l = -\partial_\theta \psi(\gamma^t(s)\,;\,\theta) \tag{2.8}$$

---

[4] Aici $g = \partial_r\theta$ întrucît $\mathbf{g} = \mathbf{F}^T\mathbf{g} = \mathbf{g} = (\partial_r\theta, 0, 0)$.

[5] Aici $\delta\gamma\psi$ reprezintă diferenţiala Fréchet a funcţionalei ψ, iar notaţia „/" indică dependenţa liniară a acesteia de argumentul ce îi urmează.

În cazul teoriei liniarizate, funcţiile $S_{r\theta}$, S_{rz} au aceleaşi forme ca în [1], iar q devine

$$q = -k(0)\partial_r \theta - \int_0^\infty k'(s)\partial_r \theta^t(s)\,ds \tag{2.9}$$

3. PRINCIPIUL „FADING MEMORY"

Principiul „fading memory", introdus prin Coleman şi Noll [5], exprimă faptul că valorile variabilelor constitutive la timpuri mai îndepărtate, influenţează într-o măsură mai mică valorile funcţionalelor de răspuns la timpul prezent. Mai simplu, acest principiu exprimă faptul că memoria materialului scade în timp.

Pentru a da o semnificaţie precisă acestui lucru, se pot folosi mai multe formulări matematice. Una dintre cele mai simple şi mai des întîlnite se bazează pe conceptul de funcţie de influenţă, adică o funcţie h măsurabilă, monoton descrescătoare şi pozitivă cu $sh(s)$ de pătrat integrabil pe $(0, \infty)$.

Dacă h este o astfel de funcţie, atunci mulţimea funcţiilor măsurabile pe $(0, \infty)$ şi de normă

$$|\!|\!| f |\!|\!| = \int_0^\infty (f^2(s)h^2(s)ds)^{1/2} \tag{3.1}$$

finită, poate fi privită ca un spaţiu Hilbert H cu produsul scalar

$$f \cdot g = \left(\int_0^\infty f(s)\, g\,(s)\, h^2(s)\,ds \right)$$

Notînd prin $\mathscr{H} = H \times H \times H \times H$, principiul „fading memory" ne asigură că pentru fiecare valoare a lui θ şi g, funcţionalele constitutive din (2.4) sînt funcţii netede pe $\mathscr{H}$ cu privire la norma

$$\|\Lambda\| = \|\alpha^t\| + \|\beta^t\| + \|\theta^t\| + \|g^t\| \tag{3.2}$$

adică sînt continuu diferenţiabile Fréchet. Ca funcţii de θ şi g ele sînt de asemeni continuu diferenţiabile. În cele ce urmează este suficient să avem diferenţiale continue pînă la ordinele doi şi unu pentru **S** şi respectiv η, $\mathbf{q}$.

4. UNDE CILINDRICE DE ACCELERAŢIE

În continuare vom studia propagarea suprafeţelor singulare la traversarea cărora derivatele funcţiilor ω, v şi θ sînt discontinue. O astfel de suprafaţă va fi la fiecare moment t [1] o suprafaţă cilindrică circulară cu axa Oz axă de simetrie.

Definiția 1. Spunem că suprafața $r = r_t$ este o undă cilindrică de accelerație dacă sînt îndeplinite condițiile

a_1) ω, Ψ și θ sînt funcții continue de r și t, în timp ce derivatele lor parțiale sînt discontinue în $r = r_t$ dar continue în raport cu r și t peste tot în rest.

a_2) funcțiile $\partial_r\omega^t$, $\partial_r\Psi^t$, α^t, β^t, θ^t și g^t sînt continue cu privire la norma (3.1) pe H.

Viteza undei, așa cum rezultă din [1] (sau [6] Sect. 177), este

$$U = U(t) = \frac{\mathrm{d}r_t}{\mathrm{d}t} \tag{4.1}$$

iar salturile derivatelor de ordinul întîi (la traversarea undei) ale unei funcții continue $\varphi(r, t)$, sînt legate prin relația

$$[\partial_t\varphi] = -U[\partial_r\varphi] \tag{4.2}$$

Definiția 2. Mărimile $\mathbf{a}$ și τ definite prin

$$\mathbf{a} = (a, b) = [(\partial_t\omega], [\partial_t v]), \quad \tau = [\partial_t\theta] = [\dot{\theta}] \tag{4.3}$$

le vom numi amplitudini ale undei.

În paragrafele următoare vom obține unele formule exacte pentru determinarea vitezei și amplitudinii undelor de accelerație ce se propagă într-o regiune a fluidului simplu în mișcare elicoidală.

5. CONDIȚII DE SALT

În baza ipotezelor de regularitate din paragraful 3 și a definiției undelor de accelerație, rezultă că pentru o astfel de undă au loc identitățile

$$[\partial_t\,\omega] = -\,U[\partial_r\,\omega],\ [\partial_t\,v] = -\,U[\partial_r\,v]$$

$$[\partial_t\,\theta] = -\,U\,[\partial_r\,\theta] \tag{5.1}$$

$$[\partial_t S_{r\theta}] = -\,U\,[\partial_r\,S_{r\theta}],\ [\partial_t\,S_{rz}] = -U\,[\partial_r\,S_{rz}] \tag{5.2}$$

și

$$[\partial_t q] = -U[\partial_r q] \tag{5.3}$$

Mai mult, în baza relațiilor (2.3), (2.8), (5.3) și a cunoscutei legături $\varepsilon = \psi + \theta\eta$, rezultă din (2.5) și (2.6)

$$[\partial_r S_{r\theta}] = \rho r_t\,[\partial_t\omega,\ [\partial_r S_{rz}] = \rho\,[\partial_t\,v] \tag{5.4}$$

respectiv

$$\rho U\theta[\partial_t \eta] - [\partial_t q] = 0 \tag{5.5}$$

Din $(2.4)_1$ însă, prin derivare în raport cu t, obținem

$$\partial_t \mathbf{S} = \delta_\Lambda \mathbf{S}(\Lambda(s)\,;\,\theta/\partial_t \Lambda(s)) + \partial_\theta \mathbf{S}(\Lambda(s)\,;\,\theta)\dot{\theta} \tag{5.6}$$

din care, în baza definițiilor (2.3), rezultă

$$\begin{pmatrix} [\partial_t S_{r\theta}] \\ \partial_t S_{rz}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_t E_\alpha & E_\beta \\ r_t F_\alpha & F_\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_r \omega \\ \partial_r \upsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_\theta \\ f_\theta \end{pmatrix} [\dot{\theta}] \tag{5.7}$$

unde

$$E_\alpha = -\delta_\alpha S_{r\theta}(\Lambda(s)\,;\,\theta/1(s)),\ E_\beta = -\delta_\beta S_{r\theta}(\Lambda(s)\,;\,\theta/1(s)) \tag{5.8}$$

$$F_\alpha = -\delta_\alpha S_{rz}(\Lambda(s)\,;\,\theta/1(s)),\ F_\beta = -\delta_\beta S_{rz}(\Lambda(s)\,;\,\theta/1(s))$$

sînt modulii tangenți instantanei [4]

$$e_\theta = \partial_\theta S_{r\theta}(\Lambda(s)\,;\,\theta),\ f_\theta = \partial_\theta S_{r\theta}(\Lambda(s)\,;\,\theta) \tag{5.9}$$

iar $1(s)$ este funcția constantă cu valoarea 1 pentru orice $s > 0$.

Calculînd în mod analog salturile funcțiilor $\partial_t \eta$ și $\partial_t q$ și introducîndu-le în (5.5) obținem

$$r_t(G_\alpha - \rho U\theta H_\alpha)[\partial_r \omega] + (G_\beta - \rho U\theta H_\beta)[\partial_r \upsilon] +$$

$$(g_\theta - \rho U\theta U h_\theta)[\dot{\theta}] = \frac{1}{U} q_g[\theta] \tag{5.10}$$

unde G_α, G_β, g_θ, H_α, H_β și h_θ sînt corespunzătoarele lui E_α, E_β și e_θ pentru funcționalele q și η, iar

$$q_g = \partial_g q(\Lambda(s)\,;\,\theta, g) \tag{5.11}$$

În sfîrșit, în baza relațiilor (5.1), (5.2) și a notațiilor din paragraful anterior, din (5.7) și (5.10) rezultă

$$\begin{aligned} r_t(\rho U^2 - E_\alpha)a - E_\beta b + U e_\theta \tau = 0 \\ -r_t F_\alpha a + (\rho U^2 - F_\beta)b + U f_\theta \tau = 0 \end{aligned} \tag{5.12}$$

respectiv

$$r_t(G_\alpha - \rho U\theta H_\alpha)a + (G_\beta - \rho U\theta H_\beta)b -$$

$$- U(g_\theta - \rho U\theta h_\theta)\tau = -q_g[\ddot{\theta}] \tag{5.13}$$

6. VITEZA UNDELOR DE ACCELERAȚIE

În cazul particular cînd prima componentă a fluxului de căldură nu depinde de g, deci cînd $q = 0$, ecuațiile (5.12) și (5.13) formează un sistem algebric liniar și omogen în necunoscutele a, b și τ. Cum acest sistem admite soluții diferite de cea banală numai dacă determinantul său este nul, rezultă că viteza undei trebuie să fie soluție a ecuației

$$\begin{vmatrix} \rho U^2 - E_\alpha - E_\beta e_\theta & & \\ -F_\alpha \rho U^2 - F_\beta f_\theta & & \\ G_\alpha - \rho U \theta H_\alpha G_\beta - \rho U \theta H_\beta \rho U \theta h_\theta - g_\theta & & \end{vmatrix} = 0 \tag{6.1}$$

Dacă în plus $e_\theta = f_\theta = 0$ sau $G_\alpha = G_\beta = H_\alpha = H_\beta = 0$, undele mecanice și termale se propagă separat cu viteze finite, soluții ale ecuațiilor

$$(\rho U^2 - E_\alpha)(\rho U^2 - F_\beta) - E_\beta F_\alpha = 0 \tag{6.2}$$

respectiv

$$\rho U \theta h - g_\theta = 0 \tag{6.3}$$

a) *Unde izocalorice.* Prin definiție, o undă de accelerație se spune că este izocalorică [7] dacă $[\dot{\eta}] = 0$. Dacă fluidul este un nonconductor adică $q = 0$, atunci din (5.5), (5.12) și (5.13) rezultă că

Teorema 1. *O undă de accelerație într-un nonconductor este izocalorică, iar viteza sa este soluție a ecuației*

$$\begin{vmatrix} \rho U^2 - E_\alpha - E_\beta e_\theta & & \\ -F_\alpha \rho U^2 - F_\beta & f_\theta & \\ H_\alpha & H_\beta - h_\theta & \end{vmatrix} = 0 \tag{6.4}$$

Remarca 1. În cazurile speciale ale mișcărilor de tip Couette sau Poiseuille, cînd v respectiv ω din (2.1) sînt nuli, (6.4) se reduce la

$$U^2 = \frac{E_\alpha}{\rho} - \frac{e_\theta H_\alpha}{\rho h_\theta} \quad \text{sau} \quad U^2 = \frac{F_\beta}{\rho} - \frac{f_\theta H_\beta}{\rho h_\theta} \tag{6.5}$$

din care se poate vedea în mod explicit influența termală asupra creșterii vitezei undelor cilindrice izocalorice.

b) *Unde izoterme.* Prin definiție o undă de accelerație se spune că este izotermă dacă $[\dot{\theta}] = 0$. În acest caz, din (5.12) rezultă că

Teorema 2. *Viteza U a unei unde cilindrice izoterme de accelerație este soluție a ecuației bipătrate*

$$(\rho U^2 - E_\alpha)(\rho U^2 - F_\beta) - E_\beta F_\alpha = 0 \tag{6.6}$$

Întrucît, în baza relațiilor $(2.8)_{1,2}$ și a definițiilor $(5.8)_{2,3}$, $E_\beta = F_\alpha$ rezultă că

Teorema 3. O undă cilindrică izotermă de accelerație se propagă într-un fluid simplu cu memorie, cu viteza reală U dată prin relația

$$U = \left(\frac{E_\alpha + F_\beta + \sqrt{(E_\alpha - F_\beta)^2 + 4E_\beta^2}}{2\rho} \right)^{1/2} \tag{6.7}$$

În cazurile particulare ale mișcărilor de tip Couette sau Poiseuille viteza undei este dată prin [6]

$$U = \sqrt{E_\alpha/\rho} \text{ respectiv } U = \sqrt{F_\beta/\rho} \tag{6.8}$$

c) *Unde pur mecanice.* Neglijînd efectele termice, din cele de mai sus se obține

Teorema 4. *Viteza U a unei unde mecanice, este soluție a ecuației (6.6) în care mărimile E_α, E_β, F_α și F_β nu depind de variabilele termice. Cum și în acest caz (a se vedea ([1]) $E_\beta = F_\alpha$, viteza U este dată printr-o relație de forma (6.7) sau (6.8) în cazurile particulare considerate.*

În cazul staționar, ca și în [1], la fiecare moment t viteza undei este aceeași pentru toate particulele aflate pe suprafața materială $r = r_t$, dar diferă de la o suprafață la alta.

7. AMPLITUDINEA UNDELOR IZOTERME ÎN MIȘCĂRI DE TIP COUETTE

În paragraful anterior am determinat viteza undelor, în diferite ipostaze impunînd sistemelor omogene corespunzătoare să admită soluții diferite de cea banală. Pentru fiecare valoare reală și pozitivă a vitezei respective, amplitudinea undelor (cu excepția celor izoterme și mecanice în mișcări Couette sau Poiseuille) poate fi determinată ca un sistem fundamental de soluții al sistemului liniar și omogen asociat.

În cele ce urmează, vom determina explicit amplitudinea undelor izoterme în mișcări de tip Couette[7]. În acest caz funcționalele constitutive din (2.4) nu mai depind de β, iar ecuațiile mișcării se reduc la

$$\partial_r S + \frac{2}{r} S = \rho r \partial_t \omega (S = S_{r\theta}) \tag{7.1}$$

Derivînd (7.1) în raport cu t, obținem la traversarea undei

$$[\partial_{tr}^2 S] + \frac{2}{r_t} [\partial_t S] = \rho r_t [\partial_t^2 \omega] \tag{7.2}$$

---

[6] Ca și în [4] vom presupune că E_α și F_β sînt pozitivi.

[7] Cazul corespunzător al mișcărilor Poiseuille se tratează în mod cu totul analog.

Din condiția cinematică de compatibilitate [6] Sect. 180

$$[\partial_t f] = -U[n_k \partial_k f] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f]$$

rezultă, de asemenea,

$$[\partial_t^2 \omega] = -U[\partial_{tr}^2 \omega] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\partial_t \omega] \tag{7.3}$$

și

$$[\partial_t^2 S] = -U[\partial_{tr}^2 S] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\partial_t S] \tag{7.4}$$

Combinînd (7.2), (7.3) și (7.4) se ajunge la

$$[\partial_t^2 S] - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\partial_t S] - \frac{2U}{r_t}[\partial_t S] + \rho r_t U \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\partial_t \omega] - \tag{7.5}$$

$$- \rho U^2 r_t [\partial_{tr}^2 \omega] = 0$$

Din $(5.2)_1$ și $(5.4)_1$ rezultă

$$[\partial_t S] = -\rho U r_t [\partial_t \omega] \tag{7.6}$$

Derivînd (5.6) în raport cu t obținem

$$\partial_t^2 S = -\frac{\partial}{\partial \tau} \delta_\Lambda S(\Lambda(s); \theta/\partial_s \Lambda(\tau - s)) + \Big|_{\tau=t} +$$

$$+ \delta_\Lambda^2 S(\Lambda(s); \theta/\partial_t \Lambda(s)/\partial_t \Lambda(s)) + 2\partial_\theta \delta_\Lambda S(\Lambda(s); \theta/\partial_t \Lambda(s)) +$$

$$+ \partial_\theta^2 S(\Lambda(s); \theta)\dot{\theta}^2 + \partial_\theta S(\Lambda(s); \theta)\ddot{\theta}. \tag{7.7}$$

În continuare, în baza condițiilor de regularitate din paragraful 3 și a relației

$$[f^2] = 2f[f] + [f]^2$$

rezultă[8]

$$[\partial_t^2 S] = r_t (E'_\alpha + 2r_t E_{\alpha\alpha} \partial_r \omega - 2r_t \bar{E}_{\alpha\alpha} - 2\bar{E}_{\alpha\theta} - 2\bar{E}_{\alpha\vartheta} -$$

$$- 2e_{\alpha\theta}\dot{\theta})[\partial_s \omega] + r_t^2 E_{\alpha\alpha}[\partial_r \omega]^2 + r_t E_\alpha [\partial_{tr}^2 \omega] + (e_\theta - F'_\vartheta/U)[\ddot{\theta}] \tag{7.8}$$

[8] Pentru a evalua saltul primului termen din (7.7) se urmează același drum ca în [1] § 6.

unde [9] $E'_\alpha = E'_\alpha(0)$, $E'_g = E'_g(0)$, $E_{\alpha\alpha} = \delta^2_\alpha S(\Lambda\,;\,\theta/1/1)$, $\bar{E}_{\alpha\alpha} = \delta^2_\alpha S(\Lambda\,;\,\theta/\partial\omega^t/1)$ $\bar{E}_{\alpha\theta} = \delta^2_{\alpha\theta} S(\Lambda;\,\theta/\partial_t\,\theta^t/1)$ și $\bar{E}_{\alpha g} = \delta^2_{\alpha g} S(\Lambda\,;\,\theta/\partial_t g^t/1)$ iar $e_{\alpha\theta} = \partial_\theta\,\delta_\alpha S(\Lambda\,;\theta/1)$.

Introducînd (7.8) și (7.6) în (7.5) și ținînd seama de $(6.8)_1$ și de (5.13) cu $b = \tau = 0$ se ajunge la

Teorema 5. *Amplitudinea a unei unde cilindrice izoterme de accelerație într-un fluid simplu cu memorie, este soluție a ecuației diferențiale de tip Bernoulli*

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} + \lambda a + \mu a^2 = 0 \tag{7.9}$$

unde $\lambda = \lambda_s + \lambda_n + \lambda_\theta$ cu $\lambda_s = U/r_t - E'_\alpha / 2E_\alpha + \dfrac{1}{2\rho\, U\mathrm{rd}} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r_t E_\alpha/U)$,

$\lambda_n = r_t(\bar{E}_{\alpha\alpha} - E_{\alpha\alpha}\,\partial_r\omega)/E_\alpha$, $\lambda_\theta = (\bar{E}_{\alpha\theta} + \bar{E}_{\alpha g} + e_{\alpha\theta}\dot{\theta})/E_\alpha + (Ue_\theta - E'_g)(\rho U\theta H_\alpha - G_\alpha)/2E_\alpha\, q_g$ și $\mu = r_t E_{\alpha\alpha}/2UE_\alpha$.

În cazul în care efectele termice se neglijează $\lambda_\theta = 0$, iar dacă în plus mișcarea este staționară atunci $\lambda_n = 0$.

Ecuația (7.9) fiind de același tip cu aceea obținută în [1] sau [4], rezultă, ca și acolo, că în anumite condiții amplitudinea undei poate deveni infinită într-un timp finit. Acest rezultat teoretic, de instabilitate a mișcărilor considerate înaintea frontului de undă, a fost pus în evidență experimental de mai mulți autori (vezi de exemplu [4] §1).

8. CAZUL TEORIEI LINIARIZATE

În acest caz, ca și în [1], se ajunge ușor la

Teorema 6. *O undă cilindrică de accelerație, într-un fluid simplu liniar conducător de căldură, se propagă cu aceeași viteză constantă* $U = \sqrt{2\zeta(\infty)}$. *Amplitudinea acesteia tinzînd de asemenea la zero pentru* $t \to \infty$ *rezultă că unda se amortizează.*

În plus din (2.9) prin derivare în raport cu t obținem

$$\partial_t q = -k(0)\partial^2_{tr}\theta - \frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^\infty k'(s)\partial_r\theta^\tau(s)\mathrm{d}s\Big|_{\tau=t} =$$

$$= -k(0)\partial^2_{tr}\theta + \int_0^\infty k'(s)\partial^2_{sr}\theta^t(s)\mathrm{d}s = -k(0)\partial^2_{tr}\theta +$$

$$+k'(s)\partial_r\theta^t(s)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty k''(s)\partial_r\theta^t(s)\,\mathrm{d}s$$

[9] În [4] $E_{\alpha\alpha}$ este numit modul instantaneu de ordinul doi, iar E'_α și E_g sînt definiți la fel ca F' din [1] § 3.

din care în presupunerea naturală că $\lim_{s\to\infty} \partial_r \theta^t(s) = 0$ (fluidul la minus infinit poate fi presupus în echilibru și deci $g = 0$) se obține

$$[\partial_t q] = -k'(0)[\partial_r \theta] - k(0)[\partial_{tr}^2 \theta] \tag{8.1}$$

Această relație, împreună cu (5.5), implică

$$[\ddot{\theta}] = -\frac{k'(0)}{k(0)}\tau \tag{8.2}$$

din care rezultă că în cazul undelor izoterme avem de asemenea $[\ddot{\theta}] = 0$)

Primit în redacție la 21 noiembrie 1989

BIBLIOGRAFIE

1. C. FETECĂU, *Asupra propagării undelor cilindrice de accelerație în fluide simple.* Mem. Secț. Șt., Edit. Academiei Române, **IV, IX,** (1987), p. 75—86.
2. C. FETECĂU, *Studiul ecuațiilor constitutive și al mișcărilor unor medii continue particulare,* Teză de doctorat, Universitatea „Al. I. Cuza", Iași, 1979.
3. C. TRUSDELL, W. NOLL, *The nonlinear field theories of mechanics,* Eccyclopdia of Physics, vol. **III/3,** ed. by S. Flugge, Spriner-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1965.
4. B. D. COLEMAN, M. E. GURTIN, *On the stability against shear waves of steady flows of non-linear viscoelastic fluids.* J. Fluid Mech., **33,** (1968).
5. B. D. COLEMAN, W. NOLL, *An approximation theorem for functionals with applications in continuum mechanics,* Arch. Rational Mech. Anal., **6** (1960).
6. C. TRUESDELL, R. A. TOUPIN, *The classical field theories,* Handbuch der Physik, vol. **III/1,** Springer-Verlag, Berlin, Gőttingen, Heidelberg, 1960.
7. B. D. COLEMAN, M. E. GURTIN, *Waves in materials with memory III, Thermodynamic influences in the growth and decay of acceleration waves,* Arch. Rational Mech. Anal., 266 (1965).

EXPRESII MATRICEALE ÎN STATICA SISTEMELOR PLANE PRIN METODA GRAFULUI ECHIVALENT

de ȘT. STAICU

Institutul Politehnic București

Lucrarea studiază echilibrul unui sistem plan de rigide rezemat fără frecare pe mai multe curbe plane, prin metoda grafului echivalent. Utilizînd metoda deplasărilor virtuale se stabilesc relații de echilibru sub forma matriceală care permit determinarea configurației de echilibru a sistemului de corpuri.

1. INTRODUCERE

În cele ce urmează se exprimă, sub forma matriceală, condițiile de echilibru pentru un sistem plan de rigide supus la legături perfecte, utilizînd metoda grafului echivalent.

Se consideră un reper fix $O_0x_0y_0z_0(T_0)$ față de care se află în echilibru, sub acțiunea forțelor exterioare $\bar{f}_p^s$, sistemul de solide T_s ($s = 1, 2, \ldots, n$) solidare cu triedrele $O_sx_sy_sz_s$ (fig. 1). Fără a reduce generalitatea problemei, putem presupune că sistemele de referință au originile O în planul director al mișcărilor virtuale, care coincide cu planul fix $O_0x_0y_0$.

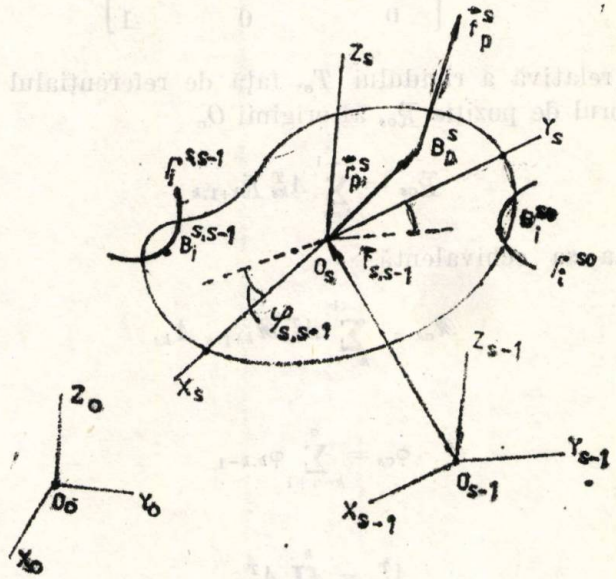


Fig. 1

Parametrii de poziție ai unui rigid oarecare T_s în raport cu reperul T_{s-1} vor fi coordonatele relative $x_{s,s-1}$, $y_{s,s-1}$ ale originii O_s și unghiul relativ de rotație $\varphi_{s,s-1}$ dintre O_sx_s și $O_{s-1}x_{s-1}$. Ei definesc vectorii polari

$\vec{r}_{s,s-1}$ şi vectorii axiali $\vec{\lambda}_{s,s-1}$ [3] prin matricele coloane

$$\vec{r}_{s,s-1} = \begin{bmatrix} x_{s,s-1} \\ y_{s,s-1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\lambda}_{s,s-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi_{s,s-1} \end{bmatrix}, \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

care pot constitui blocurile matricelor

$$\vec{R}_{s,-1} = \begin{bmatrix} \vec{r}_{s,s-1} \\ \hline \vec{0} \end{bmatrix}, \quad \vec{\Lambda}_{s,s-1} = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \hline \vec{\lambda}_{s,s-1} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Matricea ortogonală $A_{s,s-1}$ de trecere din reperul T_{s-1} în cel alăturat T_s este

$$A_{s,s-1} = \left[\begin{array}{c|c} a_{s,s-1} & 0 \\ \hline 0 & a_{s,s-1} \end{array}\right], \tag{3}$$

unde

$$a_{s,s-1} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{s,s-1} & \sin\varphi_{s,s-1} & 0 \\ -\sin\varphi_{s,s-1} & \cos\varphi_{s,s-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Poziţia relativă a rigidului T_σ, faţă de referenţialul $O_s x_s y_s z_s$, este dată de vectorul de poziţie $\vec{R}_{\sigma s}$ al originii O_σ

$$\vec{R}_{\sigma s} = \sum_{k=s}^{\sigma-1} A_{ks}^T \vec{R}_{k+1,k} \tag{5}$$

sau de forma sa echivalentă

$$\mathscr{R}_{\sigma s} = \sum_{k=s}^{\sigma-1} A_{ks}^T \mathscr{R}_{k+1,k} A_{ks} \tag{6}$$

şi de unghiul

$$\varphi_{\sigma s} = \sum_{k=s+1}^{\sigma} \varphi_{k,k-1} \tag{7}$$

unde

$$A_{ks}^T = \prod_{u=s+1}^{k} A_{u,u-1}^T. \tag{8}$$

Operatorul

$$\mathscr{R}_{k+1,k} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline \tilde{r}_{k+1,k} & 0 \end{array}\right] \tag{9}$$

conţine matricea antisimetrică

$$\tilde{r}_{k+1,k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & y_{k+1,k} \\ 0 & 0 & -x_{k+1,k} \\ -y_{k+1,k} & x_{k+,1k} & 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

2. REPREZENTAREA SISTEMULUI PRIN GRAFUL ECHIVALENT

Pentru a materializa interacţiunea dintre elementele componente ale sistemului, vom face ipoteza că un solid oarecare T_σ este rezemat în punctele $B_i^{\sigma_0}$ pe curbele fixe plane $(\Gamma_i^{\sigma_0})$ şi în punctele $B_i^{\sigma,\sigma-1}$ pe curbele $(\Gamma_i^{\sigma,\sigma-1})$ care aparţin rigidului $T_{\sigma-1}$ solidar cu triedrul $O_{\sigma-1}x_{\sigma-1}y_{\sigma-1}z_{\sigma-1}$.

Fie

$$h_i^{\sigma_0}(x_0, y_0, z_0) = 0 \; (i = 1, 2, \ldots, l_{\sigma_0}; \; l_{\sigma_0} \leqslant 3) \tag{11}$$

ecuaţiile curbelor $(\Gamma_i^{\sigma_0})$ şi

$$h_i^{\sigma,\sigma-1}(x_{\sigma-1}, y_{\sigma-1}, z_{\sigma-1}) = 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots, \; l_{\sigma,\sigma-1}; \; l_{\sigma,\sigma-1} \leqslant 3) \tag{12}$$

ecuaţiile curbelor $(\Gamma_i^{\sigma,\sigma-1})$ în raport cu reperul $O_{\sigma-1}x_{\sigma-1}y_{\sigma-1}z_{\sigma-1}$.

De asemenea vom presupune că sistemul de corpuri are forma unui lanţ mecanic închis, în care ultimul element T_n este legat de T_1.

Pentru a simplifica analiza structurii sistemului se construieşte graful echivalent, reprezentînd legăturile prin segmente ce unesc punctele care înlocuiesc corpurile componente (fig. 2).

Graful realizat serveşte la stabilirea mobilităţii relative a fiecărui subansamblu al sistemului căruia îi corespunde un ciclu. În acest sens vom observa că fiecărei laturi σ_0 a grafului îi corespunde o restricţie exterioară l_σ egală cu numărul de curbe pe care se reazemă punctele $B_i^{\sigma_0}$ şi că laturii $\sigma + 1$, σ îi revine o restricţie interioară $l_{\sigma+1,\sigma}$ care corespunde numărului de curbe pe care sînt situate punctele $B_i^{\sigma,\sigma-1}$.

Pornind de la mobilitatea relativă a corpului T_σ

$$\mu_\sigma = 3 - l_{\sigma,\sigma-1} - l_{\sigma+1,\sigma} - l_{\sigma 0}, \tag{13}$$

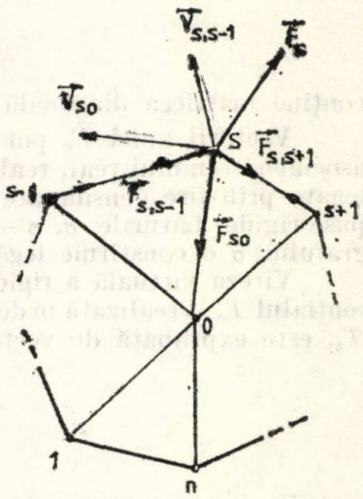


Fig. 2

rezultă formula mobilității relative a subsistemului format din rigidele T_s, T_{s+1}, ..., T_n:

$$\mu_{sn} = 3(n - s + 1) - l_{s,s-1} - \sum_{\sigma=s}^{n} (l_{\sigma+1,\sigma} + l_{\sigma 0}), \quad (s=1,2, \ldots, n). \tag{14}$$

3. METODA DEPLASĂRILOR VIRTUALE

Presupunînd cunoscute forțele exterioare $\vec{f}_p^{\sigma}$, se pot stabil niște relații care să permită determinarea configurației de echilibru a sistemului de rigide, dacă se utilizează metoda deplasărilor virtuale.

Să notăm cu

$$\vec{U}_p^{\sigma} = \begin{bmatrix} \vec{u}_p^{\sigma} \\ \vec{0} \end{bmatrix} = [\alpha_p^{\sigma}\ \beta_p^{\sigma}\ 0\ 0\ 0\ 0]^T \tag{15}$$

versorul direcției forței $\vec{f}_p^{\sigma}$ și cu

$$\vec{R}_p^{\sigma} = \begin{bmatrix} \vec{r}_p^{\sigma} \\ \vec{0} \end{bmatrix} = [x_p^{\sigma}\ y_p^{\sigma}\ 0\ 0\ 0\ 0]^T \tag{16}$$

vectorul de poziție al punctului său de aplicație B_p^{σ}.

Torsorul forțelor exterioare aplicate rigidului T_σ, calculat în originea O_σ, este reprezentat prin vectorul dual

$$\vec{F}_\sigma = \sum_{p=1}^{t_\sigma} f_p^{\sigma} R_p^{\sigma} \vec{U}_p^{\sigma}, \tag{17}$$

unde operatorul

$$R_p^{\sigma} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{e} & 0 \\ \hline \tilde{r}_p^{\sigma} & 0 \end{array}\right] \tag{18}$$

conține matricea diagonală unitate $\hat{e}$ și matricea antisimetrică $\tilde{r}_p^{\sigma}$.

Vectorii unici $\vec{F}_\sigma$ pot fi acum aplicați în punctele σ ale grafului asociat sistemului real, realizînd astfel imaginea unui sistem de particule legate prin fire considerate inextensibile, deoarece legăturile sînt presupuse rigide. Laturile σ, $\sigma - 1$ reprezintă legăturile interioare iar razele grafului σ o constituie legăturile exterioare.

Viteza virtuală a rigidului T_σ în punctul său O_σ în raport cu referențialul $T_{\sigma-1}$, realizată în deplasarea virtuală a subsistemului T_s, T_{s+1}, ..., T_n, este exprimată de vectorul dual

$$\vec{V}_{\sigma,s-1} = \begin{bmatrix} \vec{v}_{\sigma,s-1} \\ \vec{\omega}_{\sigma,s-1} \end{bmatrix}, \tag{19}$$

unde $\vec{v}_{\sigma,s-1}$ este viteza virtuală a originii O_σ, iar $\vec{\omega}_{\sigma,s-1}$ este viteza unghiulară virtuală în jurul punctului O_σ.

Matricea $\vec{V}_{\sigma,s-1}$ este exprimată în funcţie de vitezele virtuale relative $\vec{V}_{k,k-1}$ ale rigidelor T_k prin relaţia fundamentală [1]:

$$\vec{V}_{\sigma,s-1} = \sum_{k=s}^{\sigma-1} A_{\sigma k}\left\{\vec{V}_{k\,k-1} + \Omega_{k,k-1}\sum_{q=k}^{\sigma-1} A_{qk}^{T}\,\vec{R}_{q+1,q}\right\} + \vec{V}_{\sigma,\sigma-1} \tag{20}$$

unde matricea antisimetrică

$$\Omega_{k,k-1} = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{\omega}_{k,k-1} & 0 \\ \hline 0 & \tilde{\omega}_{k,k-1} \end{array}\right] \tag{21}$$

conţine tensorii antisimetrici

$$\tilde{\omega}_{k,k-1} = \omega_{k,k-1}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{22}$$

iar

$$A_{\sigma k} = \prod_{u=1}^{\sigma-k} A_{\sigma-u+1,\sigma-u}. \tag{23}$$

Să observăm că vitezele duale $\vec{V}_{\sigma,s-1}$ pot reprezenta vectori legaţi de punctele σ din spaţiul grafului asociat şi că proiecţiile acestor vectori sînt exprimate faţă de referenţialul $O_\sigma x_\sigma y_\sigma z_\sigma$ ataşat rigidului T_σ.

Aplicînd metoda deplasărilor virtuale, condiţia de echilibru a sistemului de solide este ca puterea virtuală a tuturor forţelor exterioare $\vec{f}_p^{\,\sigma}$ ($p = 1, 2, \ldots, t_\sigma$), aplicate în punctele B_p^σ ale corpurilor T_σ, corespunzătoare unei deplasări virtuale a subsistemului T_s, $T_{s+1}, \ldots, T_n$, compatibilă cu legăturile exterioare şi interioare, să fie egală cu zero.

Puterea virtuală care apare în condiţia de echilibru poate fi calculată în cadrul unei deplasări virtuale a subsistemului de puncte $s, s+1, \ldots, n$ în jurul polului fix O, sub acţiunea forţelor duale $\vec{F}_s, \vec{F}_{s+1}, \ldots, \vec{F}_n$, care se efectuează cu vitezele virtuale duale $\vec{V}_{s,s-1}, \vec{V}_{s+1,\sigma-1}, \ldots, \vec{V}_{n,s-1}$ astfel ca lungimile laturilor grafului echivalent să rămînă constante. Această condiţie poate fi exprimată prin relaţia

$$\sum_{\sigma=s}^{n} \vec{V}_{\sigma,s-1}^{T}\,\vec{F}_\sigma = 0, \tag{24}$$

care, ţinînd seama de (17), devine

$$\sum_{\sigma=s}^{n} \vec{V}_{\sigma,s-1}^{T} \sum_{p=1}^{t_\sigma} f_p^\sigma R_p^\sigma \vec{U}_p^\sigma = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{25}$$

Relaţiile (25) pot fi scrise şi sub forma

$$\sum_{\sigma=s}^{n} (\vec{v}_{\sigma,s-1}^{T} \sum_{p=1}^{t_\sigma} f_p^\sigma \vec{u}_p^\sigma + \vec{\omega}_{\sigma,s-1}^{T} \sum_{p=1}^{t_\sigma} f_p^\sigma \tilde{r}_p^\sigma \vec{u}_p^\sigma) = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{26}$$

unde vitezele virtuale $\vec{v}_{\sigma,s-1}$ şi $\vec{\omega}_{\sigma,s-1}$ au expresiile

$$\vec{v}_{\sigma,s-1} = \sum_{k=}^{\sigma-1} a_{\sigma k} \left\{ \vec{v}_{k,k-1} + \tilde{\omega}_{k,k-1} \sum_{q=k}^{\sigma-1} a_{qk}^{T} \vec{r}_{q+1,q} \right\} + \quad _{\sigma,\sigma-1}, \vec{\omega}_{\sigma,s-1} =$$

$$= \sum_{k=s}^{\sigma} a_{\sigma k} \vec{\omega}_{k,k-1}, \tag{27}$$

în care

$$a_{\sigma k} = \prod_{u=1}^{\sigma-k} a_{\sigma-u+1,\sigma-u}, \quad a_{qk}^{T} = \prod_{u=k+1}^{q} a_{u,u-1}^{T} \tag{28}$$

$$\vec{v}_{k,k-1} = [v_x^{k,k-1} \; v_y^{k,k-1} \; 0]^T, \; \vec{\omega}_{k,k-1} = \omega_{k,k-1}[0 \; 0 \; 1]^T.$$

Condiţiile cinematice de legătură, la care sînt supuse vitezele virtuale absolute şi relative ale punctelor de contact B_i^σ şi B_j^σ se scriu

$$\vec{V}_{\sigma 0}^{T} R_i^{\sigma 0} A_{\sigma 0} \vec{G}_i^{\sigma 0} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, l_\sigma; \; l_\sigma \leqslant 3)$$

$$\vec{V}_{\sigma,\sigma-1}^{T} R_i^{\sigma,\sigma-1} A_{\sigma,\sigma-1} \vec{G}_i^{\sigma,\sigma-1} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m_\sigma; \; m_\sigma \leqslant 3) \tag{29}$$

$$(\sigma = s, s+1, \ldots, n; \; s = 1, 2, \ldots, n),$$

în care matricele

$$\vec{G}_i^{\sigma 0} = \begin{bmatrix} \vec{\nabla} h_i^{\sigma 0} \\ \hline \vec{0} \end{bmatrix}, \; \vec{G}_i^{\sigma,\sigma-1} = \begin{bmatrix} \nabla h_i^{\sigma,\sigma-1} \\ \hline \vec{0} \end{bmatrix} \tag{30}$$

conţin vectorii gradienţi $\vec{\nabla} h_i^{\sigma 0}$, $\vec{\nabla} h_i^{\sigma,\sigma-1}$.

Vom arăta că relaţiile de compatibilitate (29), scrise sub forma echivalentă

$$\vec{v}_{\sigma_0}^{T} a_{\sigma 0} \vec{\nabla} h_i^{\sigma 0} + \vec{\omega}_{\sigma_0}^{T} \tilde{r}_i^{\sigma 0} a_{\sigma 0} \vec{\nabla} h_i^{\sigma 0} = 0 \tag{31}$$

$$\vec{v}_{\sigma,\sigma-1}^{T} a_{\sigma,\sigma-1} \vec{\nabla} h_i^{\sigma,-1} + \vec{\omega}_{\sigma,\sigma-1}^{T} \tilde{r}_i^{\sigma,\sigma-1} a_{\sigma,\sigma-1} \vec{\nabla} h_i^{\sigma,\sigma-1} = 0,$$

împreună cu (26), furnizează coordonatele care fixează poziţia de echilibru a sistemului de rigide.

Pornind de la ecuaţiile (25), le vom aplica pentru echilibrul subsistemului de puncte $s+1$, $s+2, \ldots, n$ sub forma

$$\sum_{\sigma=s+1}^{n} \vec{V}_{\sigma s}^{T} \vec{F}_\sigma = 0, \tag{32}$$

unde viteza virtuală dual㠠$\vec{V}_{\sigma s}$ poate fi calculată cu relaţia (20); rezultă

$$\vec{V}_{\sigma s} = \sum_{k=s+1}^{\sigma-1} A_{\sigma k}\left\{\vec{V}_{k,k-1} + \Omega_{k,k-1}\left(\vec{R}_{k+1,k} + \sum_{b=k+1}^{\sigma-1} A_{qk}^{T}\,\vec{R}_{q+1q}\right)\right\} + \vec{V}_{\sigma,\sigma-1}. \tag{33}$$

Din formulele (20), (33) se obţine viteza

$$\vec{V}_{\sigma s-1} = \vec{V}_{\sigma s} + A_{\sigma s}\,(\vec{V}_{s,s-1} + \Omega_{s,s-1}\vec{R}_{\sigma s}) \tag{34}$$

care se introduce în (25) pentru a obţine o nouă formă a condiţiilor necesare de echilibru pentru sistemul de rigide, adică

$$\vec{V}_{s,s-1}^{T}\sum_{\sigma=s}^{n} A_{\sigma s}^{T}\sum_{p=1}^{t_\sigma} f_p^\sigma\,R_p^\sigma\,\vec{U}_p^\sigma + \vec{\Omega}_{s,s-1}^{T}\sum_{\sigma=s+1}^{n} R_{\sigma s}\,A_{\sigma s}^{T}\sum_{p=1}^{t_\sigma} f_p^\sigma\,R_p^\sigma\,\vec{U}_p^\sigma = 0,$$

$$(s = 1, 2, \ldots, n)\ (\mu_{s,s-1} \geqslant 1) \tag{35}$$

unde s-a notat

$$A_{\sigma s}^{T} = \prod_{u=s+1}^{\sigma} A_{u,u-1}^{T},\quad \vec{\Omega}_{s,s-1} = \left[\frac{\vec{0}}{\vec{\omega}_{s,s-1}}\right]. \tag{36}$$

Vitezele virtuale relative $\vec{V}_{\sigma,\sigma-1}$ sînt perpendiculare pe laturile σ, $\sigma-1$ ale grafului asociat. Dacă se dezvoltă (35) rezultă

$$\vec{v}_{s,s-1}^{T}\sum_{\sigma=s}^{n}\sum_{p=1}^{t_\sigma} f_p^\sigma\,a_{\sigma s}^{T}\,\vec{u}_p^\sigma + \vec{\omega}_{s,s-1}^{T}\left\{\sum_{\sigma=s}^{n}\sum_{p=1}^{t_\sigma} f_p^\sigma\,a_{\sigma s}^{T}\,\tilde{r}_p^\sigma\,\vec{u}_p^\sigma + \right.$$

$$\left. + \sum_{\sigma=s+1}^{n}\sum_{p=1}^{t_\sigma} f_p^\sigma\,\tilde{r}_{\sigma s}\,a_{\sigma s}^{T}\,\vec{u}_p^\sigma\right\} = 0. \tag{37}$$

Deoarece sistemul efectuează o mişcare plan-paralelă se pot face notaţiile

$$\alpha_{i\sigma}^{0} = \frac{\partial h_{i\sigma}^{0}}{\partial x_{i\sigma}^{0}}\cos\varphi_{\sigma 0} + \frac{\partial h_{i\sigma}^{0}}{\partial y_{i\sigma}^{0}}\sin\varphi_{\sigma 0}.$$

$$\beta_{i\sigma}^{0} = -\frac{\partial h_{i\sigma}^{0}}{\partial x_{i\sigma}^{0}}\sin\varphi_{\sigma 0} + \frac{\partial h_{i\sigma}^{0}}{\partial y_{i\sigma}^{0}}\cos\varphi_{\sigma 0}$$

$$\alpha_{j}^{\sigma-1} = \frac{\partial h_{j}^{\sigma-1}}{\partial x_{i\sigma}^{\sigma-1}}\cos\varphi_{\sigma,\sigma-1} + \frac{\partial h_{j}^{\sigma-1}}{\partial y_{j\sigma}^{\sigma+1}}\sin\varphi_{\sigma,\sigma-1} \tag{38}$$

$$\beta_{j}^{\sigma-1} = -\frac{\partial h_{j}^{\sigma-1}}{\partial x_{j\sigma}^{\sigma-1}}\sin\varphi_{\sigma,\sigma-1} + \frac{\partial h_{j}^{\sigma-1}}{\partial y_{j\sigma}^{\sigma-1}}\cos\varphi_{\sigma,\sigma-1},$$

iar ecuaţiile (31) devin

$$(v^x_{\sigma 0} - y^0_{i\sigma}\,\omega_{\sigma 0})\,\alpha^0_{i\sigma} + (v^y_{\sigma 0} + x^0_{i\sigma}\,\omega_{\sigma 0})\,\beta^0_{i\sigma} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, l_\sigma) \tag{39}$$

$$(v^x_{\sigma,\sigma-1} - y^{\sigma-1}_{j\sigma}\,\omega_{\sigma,\sigma-1})\,\alpha^{\sigma-1}_j + (v^y_{\sigma,\sigma-1} + x^{\sigma-1}_{j\sigma}\,\omega_{\sigma,\sigma-1})\,\beta^{\sigma-1}_j = 0)\; j = 1, 2, \ldots, m_\sigma)$$

$$(\sigma = s, s+1, \ldots, n;\; s = 1, 2, \ldots, n).$$

Legăturile subsistemului T_s, $T_{s+1}, \ldots, T_n$ permit deplasări virtuale dacă este îndeplinită condiţia

$$\mu_{sn} \geqslant 1. \tag{40}$$

În acest caz în sistemul (39) există μ_{sn} viteze virtuale independente $v_x^{\sigma,\sigma-1}$, $v_y^{\sigma,\sigma-1}$, $\omega_{\sigma,\sigma-1}$, $\sigma \in [s, n]$, în funcţie de care se poate exprima uşor restul

$$\mu^*_{sn} = l_{s,s-1} + \sum_{\sigma=s}^{n} (l_{\sigma+1,\sigma} + l_{\sigma 0}) \tag{41}$$

de viteze virtuale.

Introducînd aceste expresii în relaţia (37) rezultă un sistem de μ_{sn} ecuaţii.

Un alt grup de relaţii rezultă din condiţiile impuse punctelor $B_i^{\sigma 0}$, $B_i^{\sigma,\sigma-1}$ de a rămîne pe curbele $(\Gamma_i^{\sigma 0})$, $(\Gamma_i^{\sigma,\sigma-1})$, adică

$$\vec{R}^0_{i\sigma} - A^T_{\sigma 0}\,\vec{R}_i^{\sigma 0} = \sum_{k=0}^{\sigma-1} A^T_{k0}\,\vec{R}_{k+1,k} \tag{42}$$

$$\vec{R}^{\sigma-1}_{i\sigma} - A^T_{\sigma,\sigma-1}\,\vec{R}_i^{\sigma,\sigma-1} = \vec{R}_{\sigma,\sigma-1}$$

de unde rezultă

$$\sum_{k=1}^{\sigma-1} (x_{k+1,k}\cos\varphi_{k0} - y_{k+1,k}\sin\varphi_{k0}) = x^0_{i\sigma} - x_i^{\sigma 0}\cos\varphi_{\sigma 0} + y_i^{\sigma 0}\sin\varphi_{\sigma 0} - x_{10}$$

$$\sum_{k=1}^{\sigma-1} (x_{k+1}\sin\varphi_{k0} + y_{k+1}\cos\varphi_{k0}) = y^0_{j\sigma} - x_i^{\sigma 0}\sin\varphi_{\sigma 0} - y_i^{\sigma 0}\cos\varphi_{\sigma 0} - y_{10}$$

$$x_{\sigma,\sigma-1} = x^{\sigma-1}_{i\sigma} - x_i^{\sigma,\sigma-1}\cos\varphi_{\sigma,\sigma-1} + y_i^{\sigma,\sigma-1}\cos\varphi_{\sigma,\sigma-1} \tag{43}$$

$$y_{\sigma,\sigma-1} = y_i^{\sigma,\sigma-1} - x_i^{\sigma,\sigma-1}\sin\varphi_{\sigma,\sigma-1} - y_i^{\sigma,\sigma-1}\cos\varphi_{\sigma,\sigma-1}$$

$$(\sigma = s, s+1, \ldots, n;\; s = 1, 2, \ldots, n).$$

Aşadar relaţiile (43) formează împreună cu (11), (12) şi (37) $3(n - s + 1) + 2\left\{l_{s,s-1} + \sum_{\sigma=s}^{n} (l_{\sigma+1\sigma} + l_{\sigma 0})\right\}$ ecuaţii din care rezultă necunoscutele $x_{\sigma,\sigma-1}$, $y_{\sigma,\sigma-1}$, $\varphi_{\sigma,\sigma-1}$, $x^0_{i\sigma}$, $y^0_{i\sigma}$, $x^{\sigma-1}_{i\sigma}$, $y^{\sigma-1}_{i\sigma}$.

4. FORȚE DE LEGĂTURĂ

Pentru calculul forțelor care apar în punctele de contact B_i^σ, B_j^σ se aplică asupra fiecărui rigid forțele exterioare și reacțiunile normale din legăturile exterioare și interioare. Această operație echivalează cu izolarea fiecărui punct σ din spațiul grafului asociat și încărcarea sa cu forța exterioară $\vec{F}_\sigma$, cu forța $\vec{F}_{\sigma 0}$ din legătura exterioară, care are rolul tensiunii din firul $\sigma 0$ cu sensul spre imaginea 0 a referențialului fix și cu forțele din legăturile interioare $\vec{F}_{\sigma,\sigma-1}$, $\vec{F}_{\sigma,\sigma+1}$ reprezentate de tensiunile din firele inextensibile σ, $\sigma - 1$ și σ, $\sigma + 1$ (fig. 2).

Pentru calculul acestor forțe duale vom exprima reacțiunile normale prin relațiile

$$\begin{aligned}
\vec{f}_i^{\sigma 0} &= \nu_i^{\sigma 0}\, \vec{G}_i^{\sigma 0}\ (i = 1, 2, \ldots, l_{\sigma 0}) \\
\vec{f}_i^{\sigma,\sigma-1} &= \nu_i^{\sigma,\sigma-1}\, \vec{G}_i^{\sigma,\sigma-1}\ (i = 1, 2, \ldots, l_{\sigma,\sigma-1}) \\
\vec{f}_i^{\sigma,\sigma+1} &= \nu^{\sigma,\sigma+1}\, \vec{G}_i^{\sigma,\sigma+1}\ (i = 1, 2, \ldots, l_{\sigma,\sigma+1}).
\end{aligned} \tag{44}$$

Torsorul acestor forțe în raport cu punctul O_σ al rigidului T_σ este exprimat prin vectorii duali

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{\sigma 0} &= \sum_{i=1}^{l_{\sigma 0}} \nu_i^{\sigma 0}\, R_i^{\sigma 0}\, A_{\sigma 0}\, \vec{G}_i^{\sigma 0} \\
\vec{F}_{\sigma,\sigma-1} &= \sum_{i=1}^{l_{\sigma,\sigma-1}} \nu_i^{\sigma,\sigma-1}\, R_i^{\sigma,\sigma-1}\, A_{\sigma,\sigma-1}\, \vec{G}_i^{\sigma,\sigma-1} \\
\vec{F}_{\sigma,\sigma+1} &= \sum_{i=1}^{l_{\sigma,\sigma+1}} \nu_i^{\sigma,+1} (R_{\sigma+1,\sigma} + A_{\sigma+,1\sigma}^T\, R_i^{\sigma,+1}\, A_{\sigma+1,\sigma})\, \vec{G}_i^{\sigma,\sigma+1}).
\end{aligned} \tag{45}$$

Condițiile necesare și suficiente de echilibru ale celor n rigide sînt tocmai condițiile de echilibru ale celor n puncte din spațiul grafului echivalent, adică

$$\vec{F}_\sigma + \vec{F}_{\sigma 0} + \vec{F}_{\sigma,\sigma-1} + \vec{F}_{\sigma,\sigma+1} = \vec{0}\ (= 1, 2, \ldots, n). \tag{46}$$

Aceste ecuații conțin ca necunoscute coeficienții $\nu_i^{\sigma 0}$, $\nu_i^{\sigma,\sigma-1}$, $\nu_i^{\sigma,\sigma+1}$, care vor determina forțele din toate legăturile sistemului.

Observație. Dacă punctele de contact B_i^σ, B_j^σ ale rigidelor se reazemă cu frecare pe curbele de legătură, atunci torsorul forțelor de frecare se calculează separat, iar forțele duale de frecare vor fi reprezentate în spațiul echivalent după direcții normale pe laturile grafului asociat.

Primit în redacție la 14 aprilie 1989

BIBLIOGRAFIE

1. Şt. STAICU, *Aplicaţii ale calculului matriceal în mecanica solidelor*, Edit. Academiei Române, Bucureşti, 1986.
2. C. IACOB, *Mecanica teoretică*, Edit. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1971.
3. R. VOINEA, D. VOICULESCU, V. CEAUŞU, *Mecanica*, Edit. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1983.
4. D. MANGERON, N. IRIMICIUC, *Mecanica rigidelor cu aplicaţii în inginerie*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1978.
5. GH. SILAŞ, I. GROŞANU, *Mecanica*, Edit. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1981.

TEHNICI DE CALCUL AL COEFICIENTULUI DE SIGURANȚĂ LA SOLICITĂRI VARIABILE ÎN FUNCȚIE DE σ_{-1}, σ_r ȘI σ_0

de A. PETRE I. DRĂGHICI

Institutul Politehnic București

Departamentul aviației civile București

Lucrarea de față reprezintă o metodă nouă pentru calculul coeficientului de siguranță la solicitări variabile în funcție de σ_{-1}, σ_r și σ_0.
Particularitatea metodei constă în adoptarea unei curbe conice de tip parabolă pentru variația ciclurilor limită a rezistențelor la oboseală.
În cuprinsul lucrării se prezintă calculul analitic și grafic al curbelor ciclurilor limită, precum și a coeficienților de siguranță la oboseală pentru materialele specifice structurilor de aviație, în scopul verificării secțiunilor periculoase.

CALCULUL DIAGRAMEI CICLURILOR LIMITĂ DE REZISTENȚĂ LA OBOSEALĂ

Este cunoscut faptul că rezistența la oboseală depinde în primul rînd de forma ciclurilor de solicitare variabilă. În mod curent pentru a defini o solicitare variabilă sînt necesari doi parametri, care se consideră fie σ_{max} și σ_{min}, fie σ_{max} și $R = \sigma_{min}/\sigma_{max}$, fie σ_m și σ_v, cu relațiile evidente : $\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_v$; $\sigma_{min} = \sigma_m - \sigma_v$;

$$R = \frac{\sigma_m - \sigma_v}{\sigma_m + \sigma_v};$$

Se va considera în cele ce urmează ultimul sistem de definire a unei solicitări variabile (fig. 1), caz în care o solicitare oarecare se reprezintă printr-un punct în planul de coordonate respectiv. Pentru a se defini domeniul de rezistență la oboseală, teoretic este necesar a se stabili locul solicitărilor la limită la care apare ruperea prin oboseală. Această curbă limită este de forma celei prezentate în figură. Este de remarcat că determinarea curbei respective ar necesita un volum de muncă extrem de mare, fiecare punct de pe această curbă reprezentînd în sine o problemă experimentală majoră. Din acest motiv se obișnuiește ca această curbă să se aproximeze cu ajutorul unui număr redus de puncte. Primele aproximații au fost făcute pornind de la rezistența la oboseală și rezistența la rupere sub solicitare statică. Desigur fiind vorba numai de două puncte, aproximarea curbei limită s-a făcut sub forma unei drepte ce unește cele două puncte. În mod curent rezistența la oboseală pentru un material dat este definită prin σ_{-1} iar mai recent și prin σ_0. Pentru trasarea, respectiv aproximarea analitică a curbei limită de rezistență la oboseală vom avea la dispoziție trei puncte prin care trebuie să treacă această curbă, puncte care au coordonatele funcție de σ_{-1}, σ_0 și σ_r.

Pentru a se evita anumite rezultate absurde în afara celor 3 condiții mai sus menționate este necesară încă o condiție. Astfel panta tangentei la curbă în zona în care aceasta trece prin punctul $C(\sigma_r; 0)$ nu poate fi mai mare de 45°.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 49, NR. 4, 1990, P. 365—374

În caz contrar va exista o zonă a diagramei curbei limită în care rezistența la oboseală este mai mare decît rezistența la rupere sub solicitare statică, rezultat evident eronat.

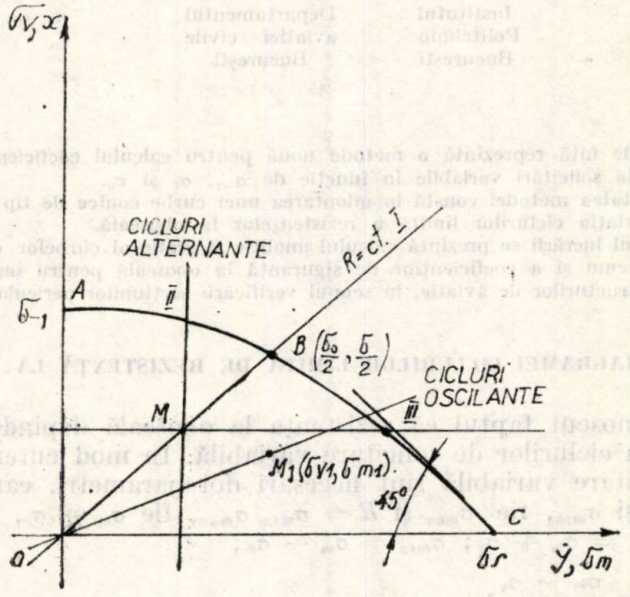


Fig. 1

Au existat o serie de lucrări care au încercat o aproximare a curbei limită prin neglijarea acestei ultime dar foarte importante condiții, rezultatele fiind cele menționate mai sus.

Se observă că o conică :

$$x^2 + a_1xy + a_2y^2 + a_3x + a_4y + a_5 = 0 \qquad (1)$$

conținînd cinci coeficienți arbitrari poate servi pentru aproximarea analitică a curbei limită, prin satisfacerea celor patru condiții menționate, a cincea rămînînd liberă la discreția celui care face acest calcul. În cele ce urmează, această condiție liberă va cuprinde particularizarea conicei într-o parabolă, ceea ce conduce la unele simplificări. Rezultă astfel :

a) conica este o parabolă :

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{a_1^2}{2} \\ \frac{a_1}{2} & a_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

respectiv :

$$a_2 - \frac{a_1^2}{4} = 0 \qquad (3)$$

Celelalte condiții se vor concretiza în modul următor:

b) Condiția de a trece prin punctul $B\left(\frac{1}{2}\sigma_0; \frac{1}{2}\sigma_0\right)$ conduce la:

$$\sigma_0^2(1 + a_1 + a_2) + 2\sigma_0 a_3 + a_4) + 4a_5 = 0 \tag{4}$$

c) Condiția de a trece prin punctul $A(0; \sigma_{-1})$ conduce la:

$$\sigma_{-1}^2 + a_3\sigma_{-1} + a_5 = 0 \tag{5}$$

d) Condiția de a trece prin punctul $C(\sigma_r; 0)$ conduce la:

$$a_2\sigma_r^2 + a_4\sigma_r + a_5 = 0 \tag{6}$$

e) Condiția ca în punctul $C(\sigma_r; 0)$ să aibă tangenta la 45° conduce la:

$$(2a_2 - a_1)\sigma_r + a_4 - a_3 = 0 \tag{7}$$

Din relația (5) coeficientul a_5 rezultă:

$$a_5 = -\sigma_{-1}(\sigma_{-1} + a_3) \tag{8}$$

Utilizînd celelalte condiții rezultă sistemul:

$$\begin{cases} \frac{a_1^2}{4}\sigma_r^2 + a_4\sigma_r - \sigma_{-1}^2 - a_3\sigma_{-1} = 0 \\ \frac{a_1^2}{2}\sigma_r + a_4 - a_1\sigma_r - a_3 = 0 \end{cases} \tag{9}$$

de unde se obține:

$$a_3 = \frac{1}{4(\sigma_r - \sigma_{-1})}[a_1\sigma_r^2(a_1 - 4) + 4\sigma_{-1}^2] \tag{10}$$

$$a_4 = \frac{1}{4(\sigma_r - \sigma_{-1})}[-a_1^2\sigma_r^2 + 2a_1(a_1 - 2)\sigma_r\sigma_{-1} + 4\sigma_{-1}^2] \tag{11}$$

Pentru determinarea coeficientului a_1 se obține următoarea ecuație:

$$A \cdot a_1^2 + B \cdot a_1 + C = 0 \tag{12}$$

unde:

$$A = \sigma_0^2(\sigma_r - \sigma_{-1}) + 4\sigma_{-1}\sigma_r(\sigma_0 - \sigma_r) \tag{13}$$

$$B = 4\sigma_0^2(\sigma_r - \sigma_{-1}) - 8\sigma_0\sigma_r(\sigma_{-1} + \sigma_r) + 16\sigma_r^2\sigma_{-1} \tag{14}$$

$$C = 4\sigma_0^2(\sigma_r - \sigma_{-1}) + 16\sigma_{-1}^2(\sigma_0 - \sigma_r) \tag{15}$$

Tabelul 1

cu coordonatele punctelor folosite la trasarea curbelor limită la oboseală

D16AT	$y = \sigma_m$ (MPa)	415	350	300	250	100	80	60	40	20	0
	$x = \sigma_v$ (MPa)	0,000	23,106	38,923	54,413	100,000	106,018	112,026	118,025	124,016	130,00
30HGSA	$y = \sigma_m$ (MPa)	1200	1000	800	600	400	270	200	100	50	0
	$x = \sigma_v$ (MPa)	0,000	61,306	121,318	181,118	240,809	270,000	300,429	330,220	345,111	360,000
2024	$x = \sigma_m$ (MPa)	455	400	350	300	250	115	80	60	40	0
	$y = \sigma_v$ (MPa)	0,00	23,377	40,583	56,998	72,990	115,000	125,710	131,805	137,885	150,000
7075	$y = \sigma_m$ (MPa)	530	400	300	200	115	80	60	40	20	0
	$x = \sigma_v$ (MPa)	0,00	46,735	72,301	95,871	115,000	122,701	127,063	131,399	138,550	140,000

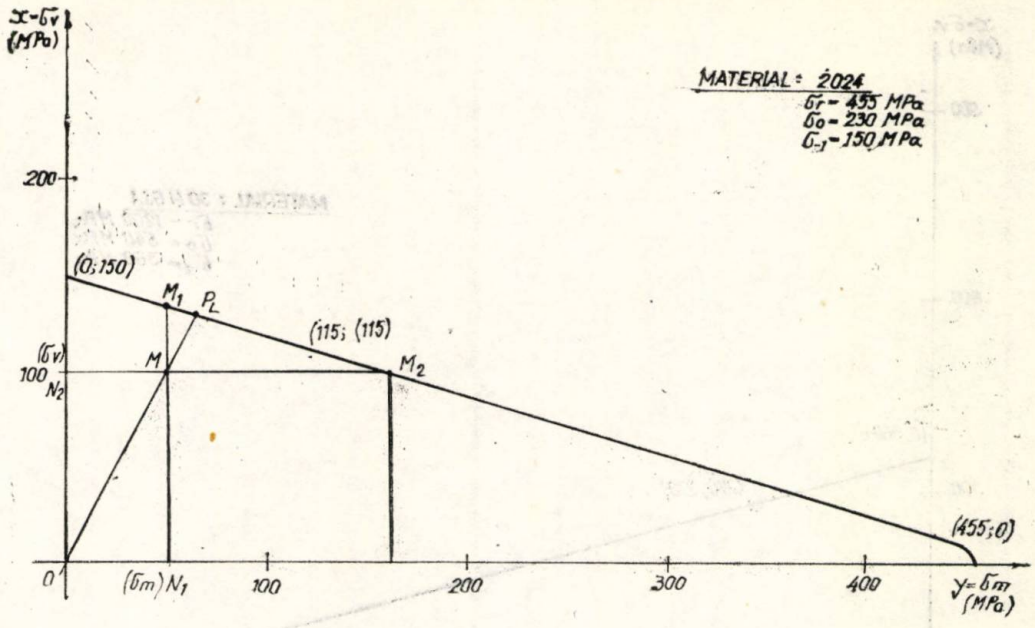

x=σv (MPa)
MATERIAL = 2024
σr = 455 MPa
σ0 = 230 MPa
σ-1 = 150 MPa
200
(0;150)
M1
P
(115; (115)
(σv)
100
M
M2
N2
(455;0)
0
(σm) N1
100
200
300
400
y=σm (MPa)

Fig. 2

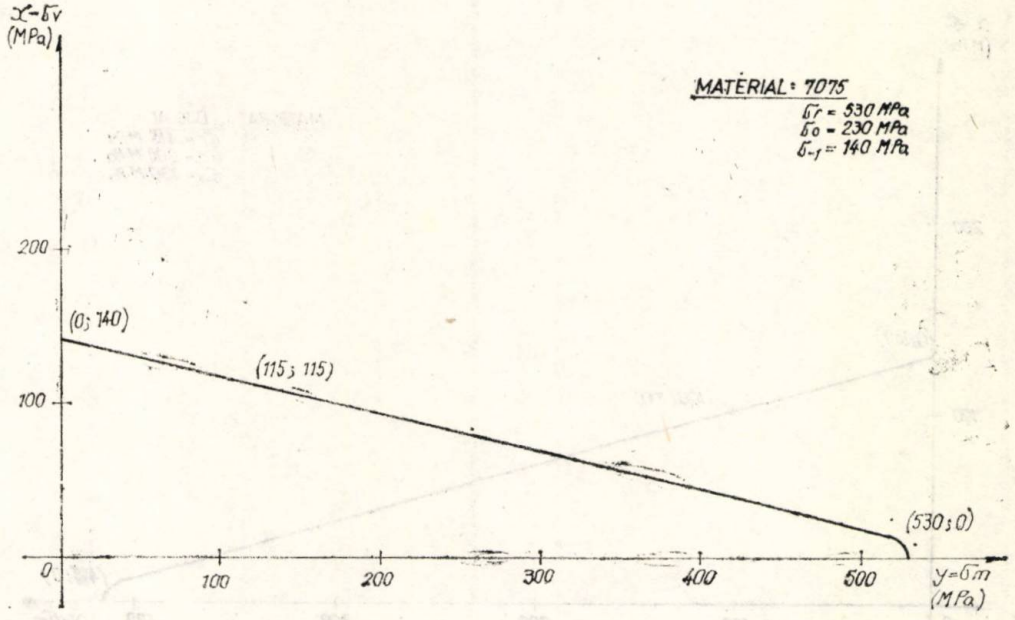

x=σv (MPa)
MATERIAL = 7075
σr = 530 MPa
σ0 = 230 MPa
σ-1 = 140 MPa
200
(0; 140)
(115; 115)
100
(530;0)
0
100
200
300
400
500
y=σm (MPa)

Fig. 3

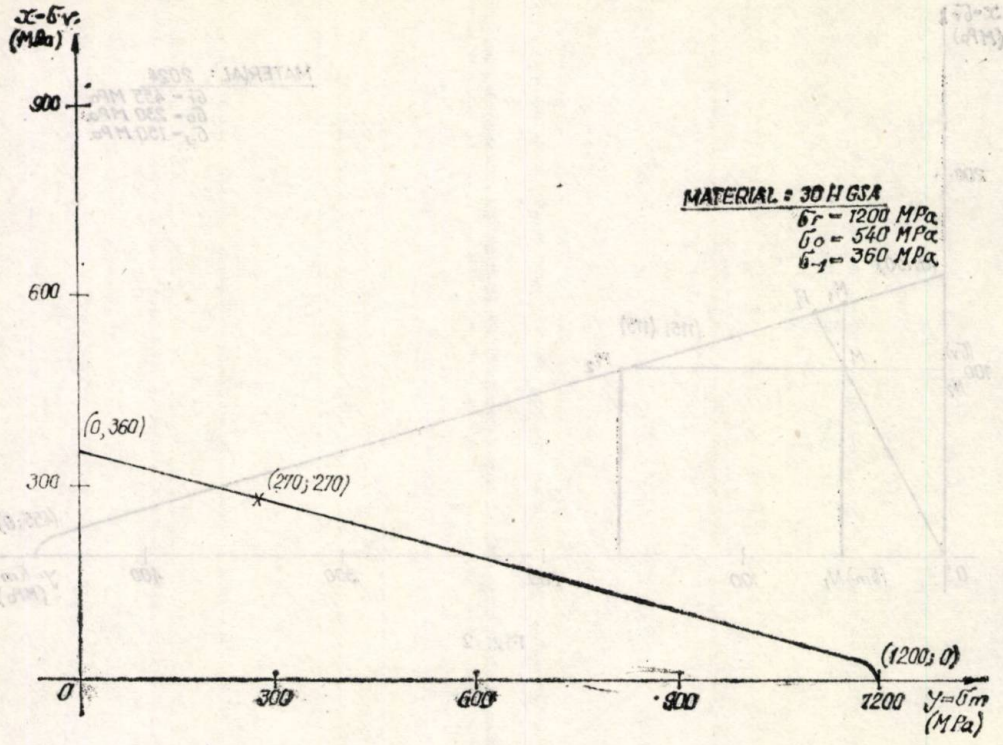

X=σv (MPa)
900
600
300
0
300
600
900
1200
Y=σm (MPa)
MATERIAL : 30 HGSA
σr = 1200 MPa
σ0 = 540 MPa
σ-1 = 360 MPa
(0, 360)
(270; 270)
(1200; 0)

Fig. 4

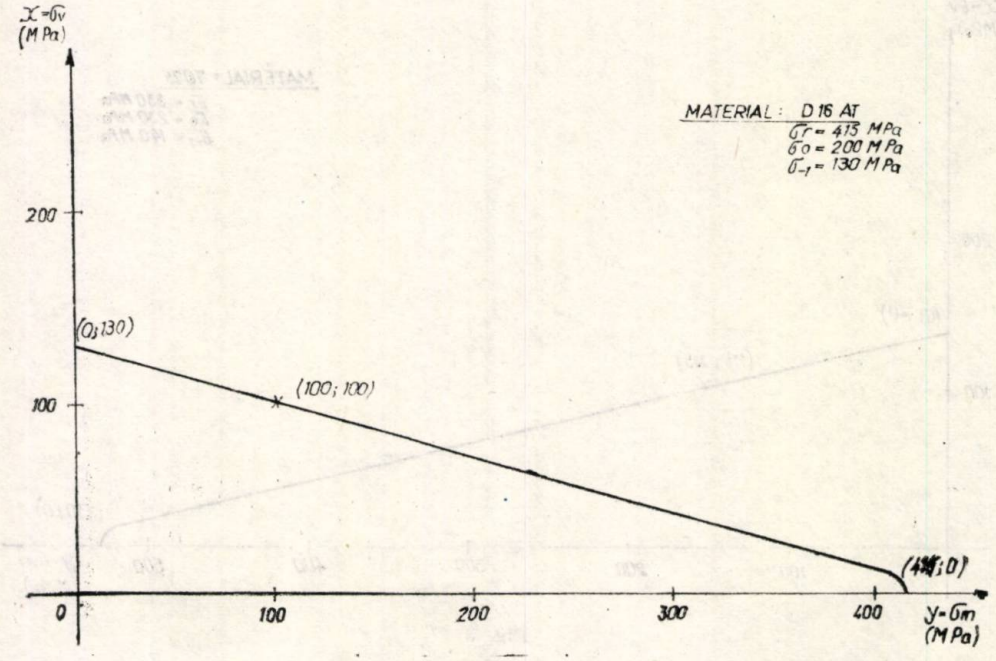

X=σv (MPa)
200
100
0
100
200
300
400
Y=σm (MPa)
MATERIAL : D 16 AT
σr = 413 MPa
σ0 = 200 MPa
σ-1 = 130 MPa
(0; 130)
(100; 100)

Fig. 5

de unde rezultă:

$$a_1 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \tag{16}$$

sau:

$$a_1 = \frac{S_1 \pm S_3}{S_2} \tag{17}$$

unde:

$$S_1 = 4\sigma_0\sigma_r(\sigma_{-1} + \sigma_r) - 2\sigma_0^2(\sigma_r - \sigma_{-1}) - 8\sigma_r^2\sigma_{-1} \tag{18}$$

$$S_2 = \sigma_0^2(\sigma_r - \sigma_{-1}) + 4\sigma_{-1}\sigma_r(\sigma_0 - \sigma_r) \tag{19}$$

$$S_3 = \sqrt{\Delta} \tag{20}$$

$$\Delta = 64\sigma_r^4\sigma_{-1}^2 + 16\sigma_0^2\sigma_r^2[(\sigma_r + \sigma_{-1})^2 + 2\sigma_{-1}(\sigma_r - \sigma_{-1})] -$$

$$- 64\sigma_0\sigma_r^3\sigma_{-1}(\sigma_r + \sigma_{-1}) - 64\sigma_r\sigma_{-1}^3(\sigma_0 - \sigma_r)^2 -$$

$$- 16\sigma_0^2(\sigma_r^2 - \sigma_{-1}^2)[\sigma_0\sigma_r + \sigma_{-1}(\sigma_0 - \sigma_r)] \tag{21}$$

Expresiile coeficienților a_2, a_3, a_4, a_5 fiind în final:

$$a_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{S_1 \pm S_3}{S_2}\right)^2 \tag{22}$$

$$a_3 = \frac{1}{4(\sigma_r - \sigma_{-1})S_2^2}[(S_1 \pm S_3)(S_1 \pm S_3 - 4S_2)\sigma_r^2 + 4\sigma_{-1}^2S_2^2] \tag{23}$$

$$a_4 = -\frac{1}{4(\sigma_r - \sigma_{-1})S_2^2}[-(S_1 \pm S_3)^2\sigma_r^2 + 2(S_1 \pm S_3)(S_1 \pm S_3 - 2S_2)\sigma_r\sigma_{-1} +$$

$$+ 4\sigma_{-1}^2S_2^2] \tag{24}$$

$$a_5 = -\frac{\sigma_r\,\sigma_{-1}}{4(\sigma_r - \sigma_{-1})S_2^2}[4\sigma_{-1}S_2^2 + (S_1 \pm S_3)(S_1 \pm S_3 - 4S_2)\sigma_r] \tag{25}$$

Odată determinate valorile acestor coeficienți funcție de proprietățile de rezistență la oboseală pentru materialele curente folosite în construcții aeronautice se poate obține curba limită la oboseală atît sub formă analitică (tabelul 1) cît și sub formă grafică (fig. 2, 3, 4, 5).

CALCULUL COEFICIENȚILOR DE SIGURANȚĂ LA SOLICITĂRI VARIABILE

Determinarea curbei limită de rezistență la oboseală atît sub formă grafică cît și sub formă analitică pentru diferite materiale curente, va permite determinarea coeficienților de siguranță relativ ușor, atît sub formă grafică cît și sub formă analitică. Astfel o solicitare variabilă oarecare se reprezintă în diagramă printr-un punct în coordonatele σ_m, σ_v. Presupunînd că acest punct nu se găsește tocmai pe curba limită, pentru care coeficientul de siguranță ar fi egal cu unitatea ci în interiorul definit de această curbă, coeficientul de siguranță va avea o valoare mai mare decît unitatea, cu atît mai mare cu cît se găsește mai departe de curba limită. Este evident că valoarea numerică a coeficientului de siguranță depinde de modul în care se consideră că solicitarea va crește de la cea reală către cea periculoasă deci către ciclul limită. Deoarece este greu a se stabili un drum bine precizat relativ la modul de creștere a suprasarcinilor către curba ciclurilor limită, se obișnuiește a se presupune cîteva legi după care se face depășirea sarcinilor variabile de proiectare.

Aceste ipoteze sînt:

I) Ipoteza creșterii solicitării păstrînd coeficientul de asimetrie R constant:

$$\begin{cases} \sigma_{vL} = c_1 \cdot \sigma_v \\ \sigma_{mL} = c_I \cdot \sigma_m \end{cases} \tag{26}$$

II) Ipoteza creșterii păstrînd $\sigma_m = \text{const}$, respectiv:

$$\begin{cases} \sigma_{VL} = c_{II} \cdot \sigma_V \\ \sigma_{mL} = \sigma_m \end{cases} \tag{27}$$

III) Ipoteza creșterii păstrînd $\sigma = \text{const}$, respectiv:

$$\begin{cases} \sigma_{VL} = \sigma_V \\ \sigma_{mL} = c_{III} \cdot \sigma_m \end{cases} \tag{28}$$

După cum s-a menționat calculul se poate face fie grafic, pentru rezultate rapide și mai puțin precise, fie analitic.

Pentru calculul grafic al coeficientului de siguranță (vezi fig.) de exemplu pentru o solicitare avînd $\sigma_m = 50$ MPa și $\sigma_V = 100$ MPa pentru materialul 2024 în cele trei variante vom avea valorile determinate grafic în modul următor:

$$c_I = OP_L/OM = 1{,}3035$$

$$c_{II} = M_1N_1/MN_1 = 1{,}34$$

$$c_{III} = N_2M_2/N_2M = 3{,}2692$$

Pentru calculul analitic al acelorași coeficienți de siguranță se va pleca de la relațiile :

$$\begin{cases} \sigma_{VL} = c_I \cdot \sigma_V \\ \sigma_{mL} = c_I \cdot \sigma_m \end{cases} \tag{29}$$

care înlocuite în (1) conduc la :

$$E \cdot c_I^2 + F \cdot c_I + G = 0 \tag{30}$$

de unde :

$$c = \frac{-F \pm \sqrt{F^2 - 4E \cdot G}}{2E} \tag{31}$$

cu notațiile :

$$E = \sigma_v^2 + a_1 \sigma_v \sigma_m + a_2 \sigma_m^2 \tag{32}$$

$$F = a_3 \sigma_v + a_4 \sigma_m \tag{33}$$

$$G = a_5 \tag{34}$$

iar pentru exemplul menționat rezultă :

$$c = 1{,}3024$$

Pentru cea de a doua ipoteză :

$$\begin{cases} \sigma_{VL} = c_{II} \sigma_V \\ \sigma_{mL} = \sigma_m \end{cases} \tag{35}$$

cu notațiile :

$$H = \sigma_v^2 \tag{36}$$

$$I = a_1 \sigma_v \sigma_m + a_3 \sigma_v \tag{37}$$

$$J = a_2 \sigma_m^2 + a_4 \sigma_m + a_5 \tag{38}$$

rezultă :

$$H \cdot c_{II}^2 + I \cdot C_{II} + J = 0 \tag{39}$$

de unde :

$$c_{II} = \frac{-I \pm \sqrt{I^2 - 4HJ}}{2H} \tag{40}$$

iar pentru cazul numeric considerat :

$$C_{II} = 1{,}3484$$

Pentru cea de a treia ipoteză rezultă :

$$K \cdot C_{III}^2 + L \cdot C_{III} + M = 0 \tag{41}$$

cu notațiile :

$$K = a_2 \sigma_m^2 \tag{42}$$

$$L = a_1 \sigma_v \sigma_m + a_4 \sigma_m \tag{43}$$

sau :

$$M = \sigma_v^2 + a_3 \sigma_v + a_5 \tag{44}$$

$$c_{III} = \frac{-L \pm \sqrt{L^2 - 4KM}}{2K} \tag{45}$$

Pentru cazul numeric considerat se obține :

$$c_{III} = 3{,}2734$$

Se observă că diferențele între aprecierea grafică a coeficientului de siguranță și cea analitică nu este mare, astfel încît în cazurile în care nu este necesară o precizie deosebită se poate utiliza metoda grafică descrisă mai sus.

Primit în redacție la 6 august 1989

BIBLIOGRAFIE

1. M. B. GROMAN, *Despre coeficienții de siguranță în construcția de mașini*, Bul. Constr. Mașini (1952).
2. D. N. KIMELMAN, *Calculul organelor de mașini supuse la solicitări variabile*, Edit. tehnică, București, 1951.
3. D. N. KIMELMAN, *Despre calculul coeficienților de siguranță în construcțiile de mașini*, Bul. Constr. Mașini (1952).
4. S.V. SERENSEN, L. A. KOZLOV, *Capacitatea portantă și calculul de rezistență al pieselor supuse la solicitări statice și variabile*, Bul. Constr. Mașini (1953).

OPTIMIZAREA STAȚIONARĂ ASISTATĂ DE CALCULATOR A REGIMULUI MECANIC AL FORAJULUI

de GH. CREMENESCU și I. DUMITRESCU

Institutul de Petrol și Gaze, Ploiești

Optimizarea regimului mecanic al forajului, constă în determinarea valorilor optime ale apăsării și turației sapei, pentru care se asigură prețul de cost minim pe metrul forat și nu se încalcă restricțiile tehnice și tehnologice ale procesului de foraj.
Problema de optimizare staționară cu funcție obiectiv neliniară, multivariabilă, multimodală și domeniu admisibil nonconvex definit de restricții explicite și implicite neliniare, se rezolvă după algorimul Box. Pentru creșterea vitezei de convergență a explorării către optimul global restricționat, s-au făcut unele modificări în algoritm (reflexia față de centroid ponderat, contractarea cu rația secțiunii de aur, reflexia cu pas optimal).

1. INTRODUCERE

Pentru utilizarea eficientă a resurselor materiale și energetice, în condițiile extinderii forajului energofag și costisitor la sondele de mare adîncime și de pe platformele marine, se impune optimizarea regimului mecanic al procesului de foraj sub asistența directă a calculatorului.

Dinamica relativ lentă a procesului și funcționarea în intervale lungi de timp cu parametrii tehnologici neschimbați, sînt principalele argumente ale abordării în practica forajului a optimizării staționare a regimului mecanic.

Rezolvarea problemei de optimizare, constă în determinarea valorilor parametrilor mecanici (apăsarea pe sapă și turația sapei) din domeniul admisibil definit de restricțiile procesului, pentru care se asigură minimizarea prețului de cost pe metrul forat și desfășurarea procesului în deplină siguranță, fără accidente și complicații tehnice.

Complexitatea problemei de optimizare datorită funcției obiectiv neliniară, multivariabilă, multimodală și domeniului nonconvex definit de restricții explicite și implicite sub formă de inegalități, necesită algoritmi puternici și abili în căutarea numerică a optimului global restricționat.

În lucrare, sînt prezentate rezultatele optimizării regimului mecanic al forajului, obținute după metoda Box pentru modelele procesului de dislocare după Galle-Woods sau Young-Don Murphy.

2. FORMULAREA MATEMATICĂ A PROBLEMEI DE OPTIMIZARE

După conceptul teoriei sistemelor automate, problema de optimizare staționară a unui sistem se formulează astfel [1, 5, 7]:

$$\operatorname*{opt}_{X} \{F(X) \mid g(X) = 0,\ h(X) \gtrless 0\}, \tag{1}$$

în care :

X — vectorul cu variabilele de comandă ;

$g(X)$ — restricţiile egalităţii ;

$h(X)$ — restricţiile inegalităţii ;

$F(X)$ — funcţia obiectiv.

Cel mai complet indicator de performanţă al procesului de foraj este preţul de cost pe metrul forat definit la nivel de marş [2, 3, 6, 8] :

$$c_m = \frac{c_i(t_s + t_m) + c_s}{h_s} \text{ (lei/m forat)}, \tag{2}$$

în care :

c_i — costul orar al instalaţiei şi al brigăzii de foraj ;

c_s — costul sapei ;

t_s — durata marşului ;

t_m — timpul de manevră ;

h_s — avansarea pe marş.

Pentru includerea parametrilor mecanici în expresia preţului de cost, se foloseşte modelul matematic al procesului de dislocare, prezentat în literatura de specialitate prin relaţiile [3, 6] :

$$\frac{dh}{dt} = C_f \cdot f_1(W) \cdot f_2(n) \cdot f_3(D), \tag{3}$$

$$\frac{dD}{dt} = C_a \cdot g_1(W) \cdot g_2(n) \cdot g_3(D), \tag{4}$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{1}{C_1} \cdot h_1(W) \cdot h_2(n), \tag{5}$$

în care :

W — apăsarea pe sapă ;

n — turaţia sapei ;

D — gradul de uzură al danturii sapei ;

R — gradul de uzură al lagărelor sapei ;

C_f, C_a, C_1 — constantele „tehnologice" (forabilitate, abrazivitate, lagăre) ale forajului ;

$f_1(W)$, $f_2(n)$, $f_3(D)$, $g_1(W)$, $g_2(n)$, $g_3(D)$, $h_1(W)$, $h_2(n)$ — funcţii deduse empiric de diverşi autori.

Modelele matematice cele mai reprezentative care corespund ca scop optimizării procesului de foraj sînt: modelul Galle-Woods, modelul Young-Don Murphy, modelul Preston Moore, modelul Bourgoyne-Young.

Prin integrarea relațiilor de mai sus (3, 4, 5) între limitele $0-h_s$, $0-t_s$, $0-D_f$, $0-R_f$, se determină pentru regim de foraj constant pe toată durata marșului, mărimile:

$$t_s = \frac{1}{C_a} \frac{U(D_f) - U(0)}{g_1(W) \cdot g_2(n)}, \tag{6}$$

$$h_s = \frac{C_f}{C_a} \frac{f_1(W) \cdot f_2(n)}{g_1(W) \cdot g_2(n)} \cdot [E(D_f) - E(0)], \tag{7}$$

$$R_f = \frac{1}{C_a C_1} \frac{h_1(W) \cdot h_2(n)}{g_1(W) \cdot g_2(n)} \cdot [U(D_f) - U(0)], \tag{8}$$

$$U(D) = \int \frac{\mathrm{d}D}{g_3(D)}, \quad E(D) = \int \frac{f_3(D)}{g_3(D)} \mathrm{d}D, \tag{9}$$

în care:

D_f — gradul final de uzură al danturii;

R_f — gradul final de uzură al lagărelor sapei;

Constantele „tehnologice" ale forajului se calculează pe baza datelor finale ale marșului anterior (indicele „0" atașat acestor mărimi) cu relațiile:

$$C_a = \frac{U(D_{f0}) - U(0)}{g_1(W_0) \cdot g_2(n_0) \cdot t_{s0}}, \tag{10}$$

$$C_f = \frac{h_{s0}}{f_1(W_0) \cdot f_2(n_0) \cdot t_{s0}} \cdot \frac{U(D_{f0}) - U(0)}{E(D_{f0}) - E(0)}, \tag{11}$$

$$C_1 = \frac{1}{R_{f0}} \cdot h_1(W_0) \cdot h_2(n_0) \cdot t_{s0}, \tag{12}$$

sau se calculează pe baza datelor testului de foraj cu patru puncte (propus de Don Murphy) sau cinci puncte (propus de Young) planificat la începutul marșului.

Funcția obiectiv și modelul matematic sînt definite pe domeniul determinat de restricțiile fizice și tehnologice ale procesului de foraj.

Restricțiile fizice sînt impuse de capacitatea de lucru și de siguranța funcționării echipamentului de foraj și se referă la: rezistența la compresiune și flambaj a garniturii de foraj, rezistența la compresiune a danturii sapei, uzura danturii și a lagărelor sapei, turațiile critice la care apar fenomenele de rezonanță longitudinală și transversală în garnitura de foraj, puterea mecanică maximă a motoarelor instalației de foraj, etc.

Restricțiile tennologice (de strategie a conducerii) impun limitări ale parametrilor tehnologici, astfel încît să se evite accidentele și complicațiile tehnice, instabilitatea direcțională a garniturii de foraj și deviația găurii de sondă, contaminarea și blocarea stratelor productive traversate etc.

După cercetarea funcțiilor obiectiv (indicatorii tehnico-economici ai forajului) și a domeniului admisibil, se alege modelul matematic adecvat al procesului de dislocare și se formulează problema optimizării staționare a regimului mecanic al procesului de foraj, astfel [4]:

$$\min_{W,n,D_f} c_m(W, n, D_f) = \min_{W,n,D_f} \frac{c_i\left(\frac{1}{C_a}\frac{U(D_f)-U(0)}{g_1(W)\cdot g_2(n)} + t_m\right) + c_s}{\frac{C_f}{C_a}\frac{f_1(W)\cdot f_2(n)}{g_1(W)\cdot g_2(n)}[E(D_f)-E(0)]},$$

$$W \leqslant W_d,$$

$$n \neq n_{cr} \tag{13}$$

$$0 < D_f \leqslant 1,$$

$$0 < R_f \leqslant 1,$$

$$R_f(W, n, D_f) = \frac{1}{C_a C_1}\frac{h_1(W)\cdot h_2(n)}{g_1(W)\cdot g_2(n)}[U(D_f)-U(0)],$$

în care:

W_d — apăsarea de distrugere a danturii sapei;

n_{cr} — turațiile critice de rezonanță ale garniturii.

Problema de optimizare constă dintr-o funcție obiectiv neliniară, multivariabilă, multimodală și un domeniu nonconvex definit de restricții inegalități neliniare. Ansamblul de restricții complică rezolvarea problemei impunînd tehnici speciale de căutare a optimului.

Din cercetarea lucrărilor care tratează rezolvarea acestei probleme, se rezumă:

— metodele citate de literatura forajului [2, 3, 6, 8], prezintă o serie de limitări (viteză de convergență scăzută, localizarea optimului pe frontiera domeniului admisibil, blocarea căutării pe optime locale etc.);

— metodele analitice și de gradient sînt practic insurmontabile datorită dificultății calculului derivatelor parțiale;

— cele mai adecvate sînt metodele de căutare directă evolutivă: metoda Box, metoda Rosenbrock cu restricții, metoda cu funcții de penalizare de toleranță flexibilă în conjuncție cu algoritmul simplex a lui Nelder-Mead. Aceste metode au fost adaptate, implementate în programele din lucrarea [4] și prezentate la sesiuni de comunicări științifice în premieră națională în teoria și practica optimizării forajului sondelor.

3. METODA BOX ADAPTATĂ OPTIMIZĂRII REGIMULUI MECANIC AL FORAJULUI

Problema de optimizare (13) se adaptează la forma acceptată de algoritmul Box [7, 1]:

$$\min_X \{c_m(X) \mid G_j \leqslant x_j \leqslant H_j,\ j = 1 \ldots n;\ G_j \leqslant f_j(X) \leqslant H_j,\ j = n+1 \ldots m\}, \quad (14)$$

în care:

$X^T = (W, n, D_f)$ — vectorul cu mărimile de comandă;

G_j, H_j — valorile limită ale restricţiilor explicite şi implicite;

$c_m(X)$ — funcţia obiectiv a preţului de cost:

$f_j(X)$ — funcţiile pentru restricţiile implicite;

$n = 3$ — numărul mărimilor de comandă;

$m = 4$ — numărul restricţiilor explicite şi implicite.

În principiu, algoritmul Box constă în explorarea domeniului admisibil definit de restricţii, cu un hiperpoliedru flexibil (denumit complex) cu 6 vîrfuri care se deplasează prin operaţii de reflexie şi contracţie către optimul global restricţionat al problemei de optimizare (13).

Iniţial, vîrfurile hiperpoliedrului se generează aleator după metoda multiplicativă a lui Pike-Hill, apoi se cercetează dacă fiecare vîrf satisface sistemul de restricţii pentru a fi acceptat sau corectat în caz de insucces. Cu hiperpoliedrul complet, în fiecare etapă a căutării, vîrful cu valoarea maximă pentru funcţia obiectiv (vîrful nefavorabil) se proiectează în raport cu centroidul simplu sau ponderat al celorlalte vîrfuri (se obţine vîrful reflectat) şi se înlocuieşte cu acesta în cazul că ultimul verifică restricţiile şi este mai favorabil (funcţia obiectiv are valoare mai mică). În caz de încălcare a unei restricţii explicite se corectează coordonatele vîrfului reflectat, iar la încălcarea unei restricţii implicite se contractă vîrful reflectat către centroid cu raţia secţiunii de aur din distanţa centroid-vîrf reflectat (se obţine vîrful contractat).

După fiecare iteraţie, dimensiunile hiperpoliedrului se restrîng şi se continuă explorarea pînă ce sînt verificate criteriile de convergenţă ale lui Himmelblau, adică centroidul se află la o distanţă faţă de optimul global restricţionat, sub limita impusă a preciziei căutării [1, 5, 7]. Punctul optim restricţionat este cel mai favorabil vîrf al ultimului hiperpoliedru.

Schema logică şi programul OPTIM în limbaj FORTRAN 77 sînt prezentate în lucrarea [4].

Pentru a valida rezultatele optimizării regimului mecanic al forajului, programul OPTIM a fost probat pe o serie de funcţii test „excentrice" (funcţia Rosenbrock, funcţia Powell, funcţia Rosen-Suzuki, funcţia Hesse, funcţia Beale, funcţia Box). Rezultatele obţinute, au confirmat abilitatea în căutare şi unicitatea soluţiei optime pentru puncte de strat diferite.

Pentru rezolvarea problemei de optimizare (13), se introduc funcţiile modelului matematic al procesului de dislocare după Galle-Woods sau după Young-Don Murphy.

Funcţia $h_1(W)$ din ecuaţia vitezei de uzură a lagărelor sapei din modelul Galle-Woods prezentată în literatura sub formă de tabel, este dedusă analitic în [4] cu programul UZLAG, prin metode de regresie exponenţială şi cu polinoame ortogonale Cebîşev.

Pentru optimizarea regimului mecanic al forajului asistată de calculator, s-au realizat programele [4]:

OPTGW — pentru modelul dislocării după Galle-Woods;
OPTYM — pentru modelul dislocării după Young-Don Murphy.

Algoritmul programelor se desfăşoară după schema logică de principiu din figura 1.

Programele cuprind următoarele subprograme:

OPTIM — deplasează hiperpoliedrul în spaţiul admisibil după regulile algoritmului Box;
RESTR — conţine valorile limită ale restricţiilor explicite şi implicite ale problemei de optimizare (13);
FUNC — calculează valorile funcţiilor din modelul dislocării;
VERIF — cercetează satisfacerea restricţiilor şi corectează coordonatele vîrfului care încalcă restricţiile pînă devine punct admisibil;
CENTR — calculează coordonatele centroidului simplu şi ponderat al vîrfurilor hiperpoliedrului;
ALEAT — generează numere peudoaleatoare subunitare după metoda Pike-Hill.

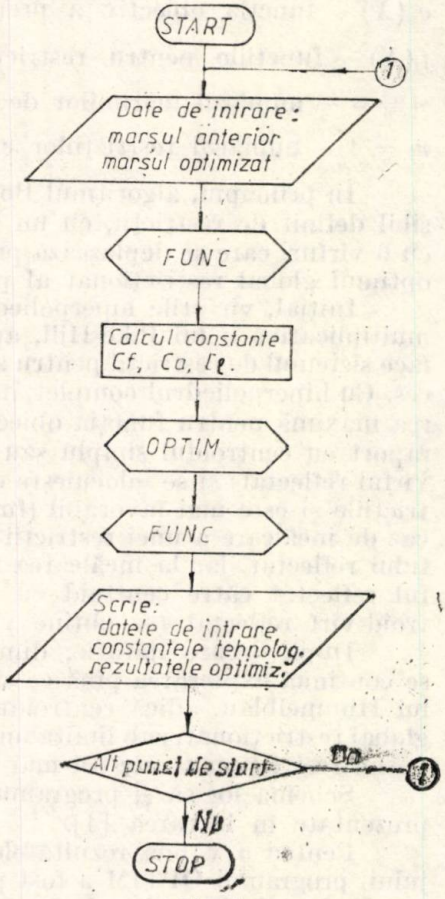


Fig. 1

Pentru marşul optimizat se prezintă operatorului următoarele date: apăsarea pe sapă, turaţia sapei, uzura danturii şi uzura lagărelor sapei extrase, preţul de cost pe metrul forat, avansarea marşului, durata marşului, viteza mecanică medie şi viteza operativă, preţul de cost al marşului.

În tabelul 1, se prezintă sintetic rezultatele finale obţinute cu programul OPTGW pentru două puncte de start şi rezultatele din [6] obţinute cu nomogramele întocmite de Galle-Woods.

Rezultatele finale ale primei variante sînt prezentate în listingul din figura 2.

Tabelul 1

Denumirea variabilei (unitatea de măsură)	Rezult. progr. OPTGW		Rezult. după [6]
	varianta 1	varianta 2	
Punctul de start : $W(tf)$ n (rot/min) D_f	25,2 80 0,6	10,5 120 0,5	
Prețul de cost (lei/m forat)	278	279	286
Avansarea sapei (m)	52,28	52,03	51,3
Timpul de săpare (ore)	7,38	7,36	7,5
Viteza mecanică medie (m/oră)	7,08	7,07	6,85
Viteza operativă (m/oră)	3,40	3,39	3,38
Prețul de cost al marșului (lei/marș)	14537	14518	14672
Apăsarea optimă (tf)	27,9	27,9	28,2
Turația optimă (rot/min)	92,3	91,6	91
Uzura finală dantură	0,62	0,61	0,62
Uzura finală lagăre	1	0,99	1

Prin optimizarea regimului mecanic al forajului s-au realizat reduceri ale prețului de cost pe metrul forat față de marșul neoptimizat de pînă la 30%.

4. CONCLUZII

Problema optimizării staționare a regimului mecanic al forajului este formulată după teoria sistemelor automate : definirea funcției obiectiv, a restricțiilor asupra variabilelor și includerea parametrilor mecanici în funcția obiectiv și în restricțiile implicite prin intermediul modelului matematic al dislocării.

Rezolvarea problemei cu metoda Box prezintă garanția identificării optimului global restricționat și constituie o premieră în teoria optimizării forajului sondelor.

Din conjuncția programului de modelare adaptivă a procesului de avansare a sapei și a programului de optimizare a regimului mecanic al forajului, se creează premiza conducerii optimale a procesului de foraj implementabilă pe o structură ierarhizată de calcul conectată „on-line" la proces.

Primit în redacție la 18 iunie 1989

```
   OPTIMIZAREA REGIMULUI MECANIC DE FORAJ
   **************************************

   DATELE MARSULUI ANTERIOR
   ------------------------
APSAREA PE SAPA=12.00(TF)
TURATIA SAPEI=100.00(ROT/MIN)
UZURA FINLA A DANTURII=0.75
UZURA FINALA A LAGARELOR=0.87
AVANSAREA SAPEI PE MARS= 60.00(M)
DURATA MARSULUI=20.00(ORE)
DIAMETRUL SAPEI=311.20(MM)
EXPONENTUL APASARII K=1.00
EXPONENTUL TURATIEI ALFA=0.75
EXPONENTUL UZURII P=0.50
   CONSTANTELE TEHNOLOGICE ALE DISLOCARII
   --------------------------------------
CONSTANTA DE FORABILITATE CF= 0.10572E-01
CONSTANTA DE ABRAZIVITATE CA= 0.42944E+00
CONSTANTA LAGARELOR SAPEI CL= 0.42345E+00
   DATELE DE INTRARE PENTRU MARSUL OPTIMIZAT
   -----------------------------------------
DIAMETRUL SAPEI DS=311.20(MM)
COSTUL SAPEI CS=3000.00(LEI)
COSTUL ORAR AL INSTALATIEI CI= 750.00(LEI/ORA)
TIMPUL DE MANEVRA TM= 8.00(ORE)
   ALGORITMUL DE OPTIMIZARE BOX
   ****************************
   PARAMETRII ALGORITMULUI BOX
   ---------------------------
NUMARUL DE VARIABILE INDEPENDENTE N=3
NUMARUL DE RESTRICTII M=4
NUMARUL DE VIRFURI ALE COMPLEXULUI K= 6
NUMARUL MAXIM DE ITERATII ITM= 50
COEFICIENTUL DE REFLEXIE ALFA=1.30
PARAMETRUL DE CONVERGENTA BETA=0.0100
VALORILE PENTRU CORECTIA VARIABILELOR
DELTA(1)=0.1000
DELTA(2)=1.0000
DELTA(3)=0.0100
COORDONATELE PUNCTULUI DE START
X(1)= 25.20
X(2)= 80.00
X(3)=  0.60

   REZULTATELE FINALE ALE OPTIMIZARII
   ==================================
NUMARUL DE ITERATII=50
VALORILE OPTIME ALE VARIABILELOR DE COMANDA:
     X(1)= 0.27931E+02
     X(2)= 0.92318E+02
     X(3)= 0.61899E+00
FUNCTIA OBIECTIV MINIMA:
     F= 0.27807E+03
VALORILE RESTRICTIILOR IMPLICITE:
     X(4)= 0.99963E+00
   DATELE DE IESIRE PENTRUL MARSUL OPTIMIZAT
   *****************************************
APASAREA OPTIMA PE SAPA=27.931(TF)
TURATIA OPTIMA A SAPEI= 92.32(ROT/MIN)
UZURA FINALA A DANTURII=0.619
UZURA FINALA A LAGARELOR=1.000
AVANSAREA SAPEI IN MARSUL OPTIMIZAT= 52.28(M)
TIMPUL DE SAPARE IN MARSUL OPTIMIZAT= 7.38(ORE)
VITEZA MECANICA MEDIE= 7.08(M/ORA)
VITEZA OPERATIVA DE FORAJ= 3.40(M/ORA)
PRETUL MINIM DE COST PE METRU FORAT=278.07(LEI/M)
PRETUL MINIM DE COST PE MARSUL OPTIMIZAT=14537.83(LEI/MA
```

Fig. 2

BIBLIOGRAFIE

1. V. SIMA, A. VARGA, *Practica optimizării asistate de calculator*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1986.
2. D. E. KARRY, *Optimizing deep drilling programs*, World Oil, **9** (1977).
3. GR. TATU, *Conducerea optimală a sistemului de forare a sondelor de petrol şi gaze*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1978.
4. G. CREMENESCU, *Automatizarea forajului sondelor prin utilizarea calculatoarelor de proces*, Teză de doctorat, I.P.G., Ploieşti, 1989.
5. BI-CHONG WANG, L. REIN, *Reliability of optimization procedures for obtaining global optimum*, AIChE Journal, 7 (1978).
6. N. MACOVEI, *Proiectarea regimului de foraj*, IPG Ploieşti, 1978.
7. M. SUCIU, ş.a., *Microprocesoare, microcalculatoare şi roboţi in automatizări industriale*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1986.
8. R. M. ROBSON, *Optimizing for lower cost-per-foot drilling*, World Oil, **9** (1979).

ECHILIBRAJUL ROTORULUI CU MASĂ VARIABILĂ (CU DEZECHILIBRU VARIABIL). CONSIDERAȚII ASUPRA SISTEMULUI DE ECUAȚII DIFERENȚIALE PENTRU MODELUL MATEMATIC ADOPTAT

de GH. PANAIT

Institutul de Petrol și Gaze Ploiești

În lucrare se prezintă o metodă de echilibrare dinamică automată a rotoarelor cu masă variabilă, deci cu dezechilibru variabil. Se demonstrează că orice rotor cu dezechilibru variabil, poate să se autoechilibreze în timpul funcționării cu trei seturi de mase, cîte două pe set, lăsate să se miște liber în canale circulare bine lubrificate.

Pentru studiul ehilibrajului rotorului cu masă variabilă se adoptă modelul lui Alexander propus pentru rotorul cu masă constantă, model prezentat în lucrările [6] și [7]. Acest lucru este posibil deoarece ecuațiile generale de mișcare ale rotorului cu masă variabilă, demonstrate în lucrările [7] și [8]:

$$\begin{aligned} M(t)\cdot\{\bar{\varepsilon}\times\bar{\rho}(t)+\bar{\omega}\times[\bar{\omega}\times\bar{\rho}(t)]\} &= \bar{R}+\bar{\Phi}_r(t)\\ \tau(t)\cdot\bar{\varepsilon}+\bar{\omega}\times\tau(t)\cdot\bar{\omega} &= \bar{M}_e+\bar{M}_r(t), \end{aligned} \tag{1}$$

au aceeași formă cu ecuațiile de mișcare ale rotorului cu masă constantă, lucrarea [2], pag. 640:

$$\begin{aligned} M[\bar{\varepsilon}\times\bar{\rho}+\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{\rho})] &= \bar{R}\\ \tau\bar{\varepsilon}+{}^{\omega}\times\tau\bar{\omega} &= \bar{M}, \end{aligned} \tag{2}$$

deosebirea fiind că primele au coeficienți variabili și mai apare rezultanta forțelor reactive $\bar{\Phi}(t)$ și momentul rezultant al acestor forțe reactive $\bar{M}_r(t)$.

În ecuațiile (1) s-au făcut notațiile:

$M(t)$ — reprezintă masa rotorului la momentul (t);

$\bar{\rho}(t)$ — vectorul de poziție al centrului de masă C (fig. 1);

$\bar{\omega}$ — vectorul viteză unghiulară;

$\bar{\varepsilon}$ — vectorul accelerație unghiulară;

$\tau(t)$ — tensorul momentelor de inerție

$$\tau(t)=\begin{bmatrix} J_{xx}(t) & -J_{xy}(t) & -J_{xz}(t)\\ -J_{yx}(t) & J_{yy}(t) & -J_{yz}(t)\\ -J_{zx}(t) & -J_{zy}(t) & J_{zz}(t)\end{bmatrix} \tag{3}$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM 49, NR. 4, 1990, P. 385—400

$\bar{\Phi}(t)$ — rezultanta forţelor reactive;

$\bar{M}_r(t)$ — momentul rezultant al forţelor reactive;

$\bar{R}$ — rezultanta forţelor active şi de legătură;

$\bar{M}_a$ — momentul rezultant al forţelor active şi de legătură;

Modelul matematic folosit este prezentat în figura 2.

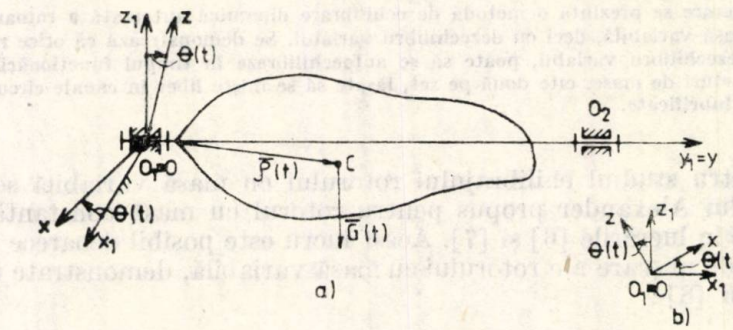


Fig. 1

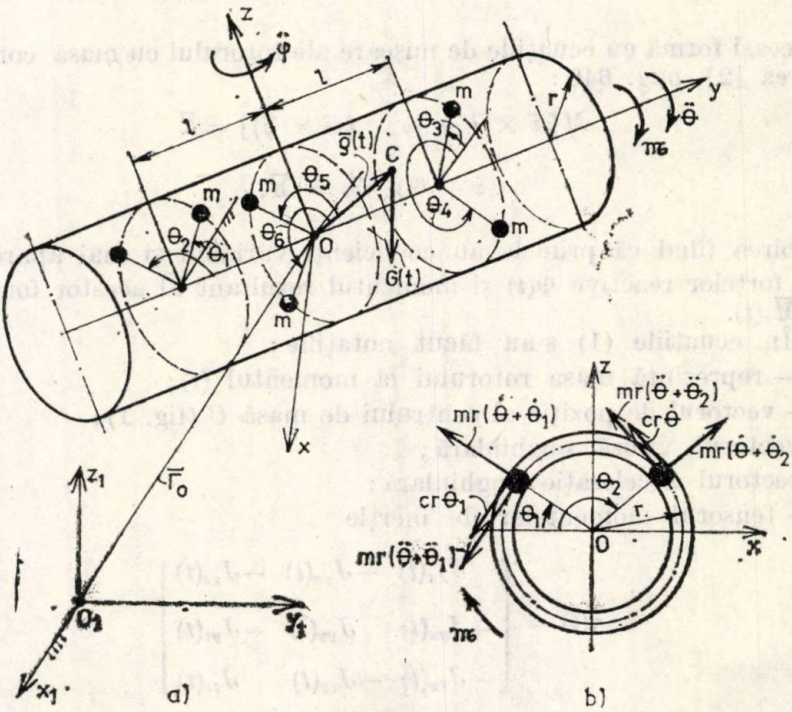


Fig. 2

Ecuațiile de mișcare ale sistemului sînt ecuațiile generale ale solidului rigid liber cu masă variabilă demonstrate în lucrările [7] și [8]:

$$\begin{cases} M(t)\{\bar{a}_0 + \bar{\varepsilon}\times\bar{\rho}(t) + \bar{\omega}\times[\bar{\omega}\times\bar{\rho}(t)]\} = \bar{R} + \bar{\Phi}_r(t) \\ M(t)\cdot\bar{\rho}(t)\times\bar{a}_0 + \tau(t)\bar{\varepsilon} + \bar{\omega}\times\tau(t)\bar{\omega} = \bar{M}_e + \bar{M}_r(t), \end{cases} \tag{4}$$

unde toate mărimile sînt funcții de timp.

Ecuațiile (4) proiectate pe axele $Oxyz$ conduc la sistemul:

$$\begin{aligned}
&M[a_{0x} + \varepsilon_y\zeta - \varepsilon_z\eta + \omega_y(\omega_x\eta - \omega_y\xi) - \omega_z(\omega_z\xi - \omega_x\zeta)] = R_x + \Phi_{r,x} \\
&M[a_{0y} + \varepsilon_z\xi - \varepsilon_x\zeta + \omega_z(\omega_y\zeta - \omega_z\eta) - \omega_x(\omega_x\eta - \omega_y\xi)] = R_y + \Phi_{r,y} \\
&M[a_{0z} + \varepsilon_x\eta - \varepsilon_y\xi + \omega_x(\omega_z\xi - \omega_x\zeta) - \omega_y(\omega_y\zeta - \omega_z\eta)] = R_z + \Phi_{r,z} \\
&M(\eta a_{Cz} - \zeta\cdot a_{0y}) + J_{xx}\varepsilon_x - J_{xy}\varepsilon_y - J_{xz}\varepsilon_z + \omega_y(-J_{zx}\omega_x - J\omega_y + J_{zz}\omega_z) - \\
&\quad - \omega_z(-J_{yx}\omega_x + J_{yy}\omega_y - J_{yz}\omega_z) = M_{e,x} + M_{r,x} \\
&M(\zeta a_{0x} - \xi a_{0z}) - J_{yx}\varepsilon_x + J_{yy}\varepsilon_y - J_{yz}\varepsilon_z - \omega_x(-J_{zx}\omega_x - J_{zy}\omega_y + J_{zz}\omega_z) + \\
&\quad + \omega_z(J_{xx}\omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{xz}\omega_z) = M_{e,y} + M_{r,y} \\
&M(\xi a_{0y} - \eta a_{0x}) - J_{zx}\varepsilon_x - J_{zy}\varepsilon_y + J_{zz}\varepsilon_z + \omega_x(-J_{yx}\omega_x + J_{yy}\omega_y - J_{yz}\omega_z) - \\
&\quad - \omega_y(J_{xx}\omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{xz}\omega_z) = M_{e,z} + M_{r,z}
\end{aligned} \tag{5}$$

Datorită faptului că masele m sînt libere să se miște în canale, pretența lor se caracterizează în ecuațiile generale (5) prin forțele de inerție, forțele de rezistență vîscoasă și momentele lor.

Sistemul general (5) în care toate mărimile sînt funcții de timp, cu excepția maselor m este dificil de abordat.

De aceea, în vederea unei analize calitative a sistemului, se impun modelului următoarele restricții:

1) corpul are posibilitate să translateze numai în lungul axei Ox;

2) axa Ox este paralelă cu axa fixă O_1x_1;

3) corpul are o mișcare de rotație în jurul axei Oy întreținută de cuplul exterior $\mathfrak{M}$;

4) corpul are posibilitate, datorită forțelor de inerție și a momentelor forțelor de inerție, să se rotească în jurul axei Oz, care axă este perpendiculară pe planul xOy;

5) centrul de greutate C al sistemului ocupă o poziție oarecare în raport cu triedrul de referință $Oxyz$ și are coordonatele: $\xi(t)$; $\eta(t)$; $\zeta(t)$;

6) masele constante m sînt libere să se miște în canale lubrificate, canale situate în planul xOz.

În acest caz mărimile din ecuaţiile sistemului (5) devin :

$$a_{0x} = \ddot{x}_0 ; \; a_{0y} = 0 ; \; a_{0z} = 0 ; \; \xi(t) \neq 0 ; \; \eta(t) \neq 0 \; \zeta(t) \neq 0 ;$$

$$\varepsilon_x = 0 ; \; \varepsilon_y = \ddot{\theta} ; \; \varepsilon_z = \ddot{\varphi} ; \; \omega_x = 0 ; \; \omega_y = \dot{\theta} ; \; \omega_z = \dot{\varphi} ;$$

$$R_x = -mr \left\{ \sum_{i=1}^{6} [(\dot{\theta} + \dot{\theta}_i)^2 \cdot \cos(\theta + \theta_i) - (\ddot{\theta} + \ddot{\theta}_i) \cos(\theta + \theta_i)] \right\}$$

$$R_y = 0 ;$$

$$R_z = mr \left\{ \sum_{i=1}^{6} [(\dot{\theta} + \dot{\theta}_i)^2 \cdot \sin(\theta + \theta_i) - (\ddot{\theta} + \ddot{\theta}_i) \cdot \cos(\theta + \theta_i)] \right\} - M(t)g; \quad (6)$$

$$M_{e;x} = mrl \left\{ \sum_{i=1}^{2} [(\dot{\theta} + \dot{\theta}_i)^2 \cdot \sin(\theta + \theta_i) - (\ddot{\theta} + \ddot{\theta}_i) \cdot \cos(\theta + \theta_i)] \right\} -$$

$$- mrl \left\{ \sum_{i=3}^{4} [(\dot{\theta} + \dot{\theta}_i)^2 \cdot \sin(\theta + \theta_i) - (\ddot{\theta} + \ddot{\theta}_i) \cdot \cos(\theta + \theta_i)] \right\} -$$

$$- M(t)\eta(t) \cdot g ;$$

$$M_{e,y} = mr^2 \left[\sum_{i=1}^{6} (\ddot{\theta} + \ddot{\theta}_i) \right] + cr^2 \left[\sum_{i=1}^{6} \dot{\theta}_i \right] + \mathfrak{M} + M(t) \cdot \xi(t) \cdot g ;$$

$$M_{e;z} = mrl \left\{ \sum_{i=1}^{2} [(\dot{\theta} + \dot{\theta}_i)]^2 \cdot \cos(\theta + \theta_i) + (\ddot{\theta} + \ddot{\theta}_i) \cdot \sin(\theta + \theta_i)] \right\} -$$

$$- mrl \left\{ \sum_{i=3}^{4} [(\dot{\theta} + \dot{\theta}_i)^2 \cdot \cos(\theta + \theta_i) + (\ddot{\theta} + \ddot{\theta}_i) \cdot \sin(\theta + \theta_i)] \right\} ;$$

unde g este acceleraţia gravitaţională.

Forţele care lucrează asupra maselor mobile sînt prezentate în figura 3, iar ecuaţiile de mişcare sînt :

$$mr^2(\ddot{\theta} + \ddot{\theta}_i) + mr\ddot{x} \sin(\theta + \theta_1) - mlr\ddot{\varphi} \sin(\theta + \theta_1) + cr^2 \cdot \dot{\theta}_1 = 0$$

$$mr^2(\ddot{\theta} + \ddot{\theta}_2) + mr\ddot{x} \sin(\theta + \theta_2) - mlr\ddot{\varphi} \sin(\theta + \theta_2) + cr^2 \cdot \theta_2 = +0$$

$$mr^2(\ddot{\theta} + \ddot{\theta}_3) + mr\ddot{x} \sin(\theta + \theta_3) + mlr\ddot{\varphi} \sin(\theta + \theta_3) + cr^2 \cdot \dot{\theta}_3 = 0$$

$$mr^2(\ddot{\theta} + \ddot{\theta}_4) + mr\ddot{x}\sin(\theta + \theta_4) + mlr\ddot{\varphi}\sin(\theta + \theta_4) + cr^2 \cdot \dot{\theta}_4 = 0$$

$$mr^2(\ddot{\theta} + \ddot{\theta}_5) + mr\ddot{x}\sin(\theta + \theta_5) + cr^2 \cdot \dot{\theta}_5 = 0 \qquad (7)$$

$$mr^2(\ddot{\theta} + \ddot{\theta}_6) + mr\ddot{x}\sin(\theta + \theta_6) + cr^2 \cdot \theta_6 = 0$$

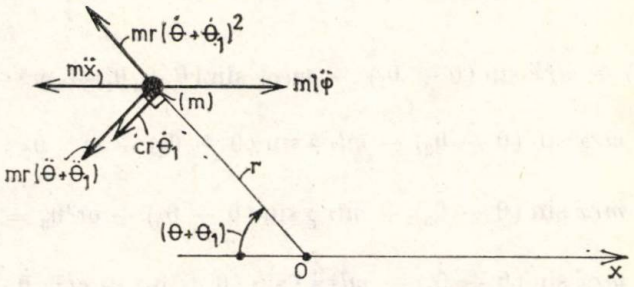


Fig. 3

Restricțiile prezentate mai sus nu influențează negativ scopul urmărit și anume, acela de a demonstra că sistemul se autoechilibrează în timp.

Aceste restricții folosite și de Alexander [6] și prezentate în lucrarea [7], sînt echivalente cu a impune rotorului să se miște între două plane paralele, adică să aibă trei grade de libertate și anume: translație în lungul axei Ox; rotație în jurul axei Oy și mișcare de rotație în jurul axei Oz.

Dacă ținem seama de restricțiile impuse, din sistemul de ecuații (5) se deduc ecuațiile de mișcare pentru un ROTOR LIBER obligat să se miște între două plane paralele cu planul xOy, care împreună cu ecuațiile (7) formează *sistemul de ecuații diferențiale* care modelează *mișcarea modelului de rotor cu masă variabilă* considerat și anume:

$$M(t)[\ddot{x} + \zeta(t)\ddot{\theta} - \eta(t)\ddot{\varphi} - \xi(t)\dot{\theta}^2 - \xi(t)\dot{\varphi}^2] =$$

$$= -mr\left\{\sum_{i=1}^{6}[(\dot{\theta} + \dot{\theta}_i)^2 \cdot \cos(\theta + \theta_i) +\right.$$

$$\left. + (\ddot{\theta} + \ddot{\theta}_i) \cdot \sin(\theta + \theta_i)]\right\} + \Phi_{r,x}(t);$$

$$M(t)\zeta(t)\ddot{x} + J_{yy}(t)\ddot{\theta} - J_{yz}(t)\ddot{\varphi} - J_{xy}(t)\dot{\theta}\dot{\varphi} - J_{xz}(t)\dot{\varphi}^2 =$$

$$= mr^2\left[\sum_{i=1}^{6}(\ddot{\theta} + \ddot{\theta}_i)\right] + cr^2\left[\sum_{i=1}^{6}\dot{\theta}_i\right] +$$

$$+ \mathfrak{M} + M(t)\xi(t)g + M_{r,y}(t);$$

$$-M(t)\eta(t)\ddot{x} + J_{zz}(t)\ddot{\varphi} - J_{zy}(t)\ddot{\theta} + J_{xy}(t)\dot{\theta}^2 + J_{xz}(t)\dot{\varphi}\dot{\theta} =$$

$$= mrl\left\{\sum_{i=1}^{2}[(\dot{\theta}+\dot{\theta}_i)^2\cdot\cos(\theta+\theta_i)+(\ddot{\theta}+\ddot{\theta}_i)\cdot\mathrm{sm}(\theta+\theta_i)]\right\} -$$

$$-mrl\left\{\sum_{i=3}^{4}[(\dot{\theta}+\dot{\theta}_i)^2\cdot\cos(\theta+\theta_i)+(\ddot{\theta}+\ddot{\theta}_i)\cdot\mathrm{sm}(\theta+\theta_i]\right\}+M_{r,z}(t);$$

$$mr^2(\ddot{\theta}+\ddot{\theta}_1)+mr\ddot{x}\sin(\theta+\theta_1)-mlr\ddot{\varphi}\sin(\theta+\theta_1)+cr^2\cdot\dot{\theta}_1=0$$

$$mr^2(\ddot{\theta}+\ddot{\theta}_2)+mrx\sin(\theta+\theta_2)-mlr\ddot{\varphi}\sin(\theta+\theta_2)+cr^2\cdot\dot{\theta}_2=0$$

$$mr^2(\ddot{\theta}+\ddot{\theta}_3)+mr\ddot{x}\sin(\theta+\theta_3)+mlr\ddot{\varphi}\sin(\theta+\theta_3)+cr^2\dot{\theta}_3=0 \qquad (8)$$

$$mr^2(\ddot{\theta}+\ddot{\theta}_4)+mr\ddot{x}\sin(\theta+\theta_4)+mlr\ddot{\varphi}\cdot\sin(\theta+\theta_4)+cr^2\cdot\dot{\theta}_4=0$$

$$mr^2(\ddot{\theta}+\ddot{\theta}_5)+mr\ddot{x}\sin(\theta+\theta_5)+cr^2\dot{\theta}_5=0$$

$$mr^2(\ddot{\theta}+\theta_6)+mr\ddot{x}\cdot\sin(\theta+\theta_6)+cr^2\cdot\dot{\theta}_6=0$$

Sistemul (8) este un sistem de nouă ecuații diferențiale de ordinul doi, cu coeficienți variabili, neliniar și neomogen.

Datele sistemului sînt:

$$M(t);\ \xi(t);\ \eta(t);\ \zeta(t);\ J_{yy}(t);\ J_{zz}(t);\ J_{yz}(t);\ J_{xy}(t);$$

$$J_{xz}(t);\ \Phi_{r,x}(t);\ M_{r,y}(t);\ M_{rz}(t);\ m;\ l;\ c;\ r;\ \mathfrak{M},$$

iar necunoscutele sînt cei nouă parametri:

$$x(t);\ \theta(t);\ \varphi(t);\ \theta_1(t);\ \theta_2(t);\ \theta_3(t);\ \theta_4(t);\ \theta_5(t);\ \theta_6(t).$$

Dacă, în prima ecuație, a mișcării de translație, se neglijează efectul termenilor $\ddot{\varphi}$ și $\dot{\varphi}$; în ecuația mișcării de rotație în jurul axei Oy se neglijează influența termenilor $\ddot{\theta}\dot{\varphi}$ și $\dot{\varphi}$; în ecuația mișcării de rotație în jurul axei Oz se neglijează efectul termenului $\dot{\varphi}\dot{\theta}$ și dacă se consideră că centrul de greutate C se găsește tot timpul în planul xOz ($\eta = 0$), prin neglijarea forțelor reactive și a momentelor forțelor reactive, primele trei ecuații diferențiale din sistemul (8) devin ca formă la fel ca ecuațiile diferențiale scrise de Alexander [6]; [7], pentru modelul său cu masă constantă.

Următoarele șase ecuații diferențiale din sistemul (8) care reprezintă mișcarea maselor libere în canale, sînt identice cu ecuațiile lui Alexander [6]; [7].

Deoarece asupra modelului considerat acționează numai forțele de inerție, forța de greutate și momentele forțelor de inerție, produse de dezechilibrul general al modelului, forțele reactive, momentele forțelor reactive, forțele de inerție și momentele forțelor de inerție ale maselor mobile, putem spune că modelul studiat se *autoechilibrează în timp, dacă sistemul (8) are ca soluție asimptotic stabilă, soluția banală.*

Rezolvarea matematică a sistemului (8) este foarte complicată.

Deoarece ne interesează numai comportarea sistemului în sensul unei autoechilibrări, se poate recurge la o *analiză calitativă a sistemului de ecuații diferențiale*, pe care o prezentăm în cele ce urmează :

a) *Analiza calitativă a sistemului de ecuații diferențiale (8), cînd efectele forțelor și momentelor forțelor reactive sînt neglijabile.*

Dacă în sistemul (8) se neglijează într-o primă aproximație efectul forțelor reactive și momentele forțelor reactive, adică $\Phi_{r,x}(t) = 0$; $M_{r,y}(t)$; $M_{r,z}(t) = 0$, ținînd seama de variația masei și a momentelor de inerție ale rotorului, prin dezvoltarea în serie a termenilor $\sin(\theta + \theta_i)$ și $\cos(\theta + \theta_i)$ și prin reținerea numai a termenilor liniari, se poate obține după lucrările [1]; [4]; [5]; [10] și altele, un sistem de primă aproximație al sistemului (8) care se scrie sub formă matriceală astfel :

$$\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = [p] \cdot \{x\} + \{q(x, t)\} \tag{9}$$

unde :

$$\{q(x, t)\} = [Q(t)] \cdot \{x\}, \tag{10}$$

cu proprietatea $\{q(0, t)\} = 0$.

În relațiile (9) și (10) s-au făcut notațiile :

$$\{x\} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\Phi} \\ \dot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_6 \end{bmatrix} \text{ — matricea necunoscutelor,}$$

$$\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_9}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\Phi} \\ \ddot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \ddot{\theta}_6 \end{bmatrix} \text{ — matricea derivatelor de ordinul unu a necunoscutelor ;}$$

$[P]$ — matricea valorilor medii ale : masei, momentelor de inerţie şi coordonatelor centrului de greutate ale rotorului ;

$[Q(t)]$ — matricea variaţiilor masei, momentelor de inerţie şi a coordonatelor centrului de greutate a rotorului.

În continuare se va demonstra că sistemul de ecuaţii diferenţiale (9) *admite ca soluţie asimptotic stabilă, soluţia banală.*

Se observă că termenii constanţi din sistemul (9) reprezintă sistemul de primă aproximaţie a sistemului de ecuaţii diferenţiale scris de Alexander [6]; [7], pentru rotorul cu masă constantă, care se autoechilibrează cu ajutorul unor mase ce se mişcă liber în canale circulare lubrificate.

Deci acest sistem este de forma :

$$\frac{dx}{dt} = [P] \cdot \{x\} \tag{12}$$

unde $[P]$ este o matrice stabilă, adică rădăcinile λ_k ale ecuaţiei caracteristice :

$$\det[[P] - \lambda \cdot [E]] = 0 \tag{13}$$

unde $[E]$ este matricea unitate, sînt situate în semiplanul stîng al planului complex, deci sînt, fie negative, fie complexe cu partea reală negativă şi în consecinţă sistemul (12) admite ca soluţie asimptotic stabilă, soluţia banală.

În lucrarea [5] se demonstrează că fiind dat un sistem de ecuaţii diferenţiale de tip (9) dacă $[P]$ este o matrice stabilă şi dacă $\{g(x, t)\{$ satisface o condiţie de tip Lipschitz :

$$|\{g(x, t)\}| \leqslant \alpha \cdot |\{x(t)\}| \tag{14}$$

unde α este o constantă pozitivă, atunci sistemul (9) admite soluţia banală, ca soluţie asimptotic stabilă.

În cazul rotorului cu masă variabilă, variaţiile masei, momentelor de inerţie şi coordonatelor centrului de greutate sînt foarte mici faţă de variaţiile medii, deci pot fi puse sub forma $\varepsilon_{ij} f_{ij}(t)$, unde ε_{ij} sînt mărimi foarte mici în comparaţie cu valorile medii ale mărimilor variabile şi $f_{ij}(t)$ sînt funcţii mărginite, rezultă că :

$$|\{g(x, t)\}| = |[Q(t)] \cdot \{x\}| \leqslant \sqrt{\Sigma \varepsilon_{ij}^2 f_{ij}^2} \cdot |\{x\}| \leqslant \alpha \cdot |\{x\}|, \tag{15}$$

cu

$$\alpha = \max \sqrt{\Sigma \varepsilon_{ij}^2 f_{ij}^2(t)} \tag{16}$$

o constantă pozitivă, ceea ce înseamnă că este îndeplinită condiţia de tip Lipschitz (14).

În concluzie, în cazul rotorului de masă variabilă, matricea $[P]$ fiind stabilă și fiind îndeplinită și condiția de tip Lipschitz scrisă sub forma (15), rezultă că sistemul (9) admite soluția banală ca soluție asimptotic stabilă :

$$\lim_{t\to\infty} \{x(t)\} = 0 \tag{17}$$

Sistemul (9) admite ca soluție generală o soluție de forma :

$$\{x(t)\} = e^{[P]\cdot t} \cdot \{x_0\} + \int_0^t e^{[P]\cdot(t-\tau)} \cdot \{g[x(\tau), \tau]\} \cdot d\tau \tag{18}$$

Matricea $[P]$ fiind stabilă adică toate soluțiile λ_k $(k = 1, 2, \ldots n)$ ale ecuației caracteristice (13), sînt situate în semiplanul stîng al planului complex, deci sînt : fie negative, fie complexe cu partea reală negativă, fiind îndeplinită și condiția de tip Lipschitz scrisă sub forma (15), în lucrarea [5] pagina 103, se demonstrează că soluția (18) îndeplinește condiția :

$$|\{x(t)\}| < n\gamma |\{x(\tau)\}| \cdot e^{-(\lambda-\delta)(t-\tau)}, \tag{19}$$

unde n este un număr întreg și pozitiv ; $\gamma > 0$; $\delta = \alpha n\gamma$;

$$0 < \delta < \lambda ;\ 0 < \lambda < \inf\{|\mathrm{Re}(-\lambda_k)|\} ;\ \alpha < \frac{\lambda}{n\gamma} ;\ t > \tau.$$

Din relația (19) rezultă că în aceste condiții :

$$\lim_{t\to\infty} \{x(t)\} = 0 \tag{20}$$

În concluzie, fiind demonstrat că sistemul de primă aproximație (9), admite ca soluție *asimptotic stabilă soluția banală*, rezultă că și sistemul (8) admite o soluție asimptotic stabilă, deci modelul de rotor cu masă variabilă studiat, funcționează din punct de vedere fizic.

b) *Analiza calitativă a sistemului de ecuații diferențiale (8), cînd efectele forțelor reactive și momentelor forțelor reactive nu sînt neglijabile (limitarea în timp a echilibrajului)*

Admitem că nu se mai neglijează efectul forțelor reactive și al momentelor forțelor reactive, adică în ecuații $\Phi_{r,x}(t) \neq 0$; $M_{r,y}(t) \neq 0$; $M_{r,z}(t) \neq 0$.

Forma acestor funcții depinde de modul în care variază masa rotorului. În practică aceste funcții sînt mărginite.

În acest caz, după dezvoltările în serie, reținînd numai partea liniară, se obține un sistem de ecuații diferențiale neomogen de forma :

$$\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = [A(t)] \cdot \{y\} + \{Y(t, y)\}, \tag{21}$$

pentru care se poate aplica teorema 1.7 din lucrarea [4], pag. 64.

Teorema amintită are următorul enunț :

Se consideră sistemul :

$$\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = [A(t)] \cdot \{y\} + \{Y(t, y)\},$$

unde $[A(t)]$ este o matrice mărginită și $|\{Y(t, y)\}| < C \cdot |\{y\}|$, pentru $|\{y\}| < h$, C fiind o constantă suficient de mică.

Dacă soluția banală a sistemului liniar de primă aproximație este uniform asimptotic stabilă, atunci soluția banală a sistemului (21) este uniform asimptotic stabilă.

În cazul problemei studiate sînt îndeplinite condițiile cerute de teorema enunțată mai sus, deoarece sistemul de primă aproximație s-a demonstrat la paragraful (a) că admite soluția banală ca fiind soluție asimptotic stabilă, iar rezultanta forțelor reactive :

$$\bar{\Phi}_r = \sum_{s=1}^{n} \frac{dm_s}{dt} \cdot \bar{w}_s \tag{22}$$

și momentul rezultant al forțelor reactive

$$\bar{M}_r = \sum_{s=1}^{n} \bar{r}_s \times \frac{dm_s}{dt} \bar{w}_s, \tag{23}$$

conțin termeni mărginiți.

Se poate deci trage concluzia că sistemul (21) admite soluția banală ca fiind *soluție uniform asimptotic stabilă.*

Funcția $\{Y(t, y)\}$ din sistemul (21) este întotdeauna dată.

Dacă se aplică formula variației constantelor stabilită în lucrarea [4], rezultă soluția sistemului (21) de forma :

$$\{y(t, t_0, y_0)\} = [c(t\,;t_0)] \cdot \{y_0\} + \int_{t_0}^{t} [C(t, s)] \cdot \{y[s, y(s, t_0, y_0)]\} \cdot ds \tag{24}$$

S-a demonstrat că soluția banală a sistemului (9) este uniform asimptotic stabilă, deci :

$$|[C(t, t_0)]| \leqslant [B] \cdot e^{-\alpha(t-t_0)}, \tag{25}$$

rezultă :

$$|\{y(t, t_0, y_0\}| \leqslant [B] \cdot e^{-\alpha(t-t_0)} \cdot |\{y_0\}| + \int_{t_0}^{t} [B] \cdot e^{-\alpha(t-s)} \cdot |\{Y[s, y(s, t_0, y_0)]\}| \, ds \tag{26}$$

Pentru toate valorile t cu proprietatea :

$$t_0 \leqslant s \leqslant t, \text{ implică}$$
$$|\{y(s, t_0, y_0)\}| < h \tag{27}$$

rezultă forma :

$$|\{y(t, t_0, y_0)\}| \leqslant [B] \cdot e^{-\alpha(t-t_0)} \cdot |\{y_0\}| + [B] \cdot e^{-\alpha t} \cdot \int_{t_0}^{t} C \cdot e^{\alpha s} \cdot |\{y(s, t_0, y_0)\}| \cdot ds \tag{28}$$

În relația (28) se vede că dacă se face $t \to \infty$, lim $|\{y(t, t_0, y_0)\}| \to 0$, deci *soluția banală a sistemului (21) este uniform asimptotic stabilă.*

Deoarece sistemul (21) conține numai partea liniară și termenii dați de forțele reactive și momentele forțelor reactive din sistemul (8), rezultă că termenii care nu s-au luat în considerație constituie *sursa unor perturbații permanente pentru modelul studiat.*

În conformitate cu teorema 1.8, din lucrarea [4], pag. 89, care are următorul enunț :

— dacă soluția banală a sistemului $\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = f(x, t)$, sau scris sub forma (21), este uniform asimptotic stabilă, atunci ea este stabilă și în raport cu perturbații permanente, putem deci trage concluzia că modelul studiat își menține stabilitatea și în cazul unor perturbații permanente.

De asemenea, în lucrarea [4], pag. 91, se demonstrează că mulțimea punctelor pentru care soluția banală este uniform asimptotic stabilă, formează în spațiul parametrilor, *domeniul de stabilitate al sistemului.*

c) *Analiza calitativă a sistemului de ecuații diferențiale (8), cînd are coeficienți variabili periodici*

Dacă sistemul (8) de ecuații diferențiale corespunzătoare modelului studiat, are coeficienți variabili periodici, atunci și sistemul de primă aproximație (9) va avea coeficienți variabili periodici.

Acești coeficienți pot fi de forma unor serii Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t), \tag{29}$$

în care

$$a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t\,;\ a_k = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \cos k\omega t \cdot \mathrm{d}t\,; \tag{30}$$

$$b_k = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \sin k\omega t\,\mathrm{d}t,\ T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ perioada funcției } f(t).$$

De asemenea, coeficienții variabili periodici pot fi funcții *pare*, pentru care seriile Fourier conțin numai cosinusuri, sau funcții *impare*, pentru care seriile Fourier conțin numai sinusuri, astfel:

— pentru *funcții pare* $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t$, cu coeficienții seriei

$$a_0 = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t\,;\ a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos k\omega t\,\mathrm{d}t\,;\ b_k = 0,$$

— iar pentru *funcții impare* $f(t) \cong \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega t\,\mathrm{d}t$, cu coeficienți

$$a_0 = 0\,;\ a_k = 0\,;\ b_k = \frac{4}{T} \cdot \int_0^{T/2} f(t) \cdot \sin k\omega t\,\mathrm{d}t.$$

În continuare se va face analiza calitativă a sistemului (9), cu coeficienți variabili periodici. Fundamentală în teoria sistemelor liniare cu coeficienți periodici este teorema 1.9, lucrarea [4], pag. 105, cu următorul enunț:

Fiind dat sistemul;

$$\left\{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right\} = [A(t)] \cdot \{x\},\ \text{cu}\ [A(t+T)] = [A(t)],$$

există o matrice $[P(t)]$, periodică de perioadă T, nesingulară, astfel încît schimbarea de variabile $\{x\} = [P(t)] \cdot \{y\}$, să transforme sistemul într-un sistem liniar cu coeficienți constanți.

Fie acest sistem cu coeficienți constanți obținut după schimbarea de variabilă,

$$\left\{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right\} = [B] \cdot \{y\}, \tag{31}$$

Din această teoremă rezultă structura soluțiilor sistemului cu coeficienți periodici:

$$\{x(t\,;t_0, x_0)\} = [P(t)] \cdot \{y(t\,;t_0, x_0)\} = [P(t)]\mathrm{e}^{[B]\cdot(t-t_0)} \cdot \{x_0\} \tag{32}$$

De aici se deduce că întreaga comportare a soluțiilor unui sistem liniar cu coeficienți periodici va depinde de valorile proprii ale matricei $[B]$.

Aceste valori proprii sînt de forma :

$$\frac{1}{T} \ln \rho_k, \tag{33}$$

unde ρ_k sînt valorile proprii ale unei matrici

$$[U(T)] = e^{[B] \cdot T} \tag{34}$$

numită matrice de *monodromie.*

Datorită faptului că matricea $[B]$ conține coeficienți constanți, iar sistemul (31) poate fi considerat un sistem de primă aproximație al sistemului de ecuații diferențiale stabilit de *Alexander* pentru modelul său cu masă constantă, lucrările [6] și [7], se poate afirma că matricea $[B]$ este stabilă și se poate scrie :

$$|e^{[B] \cdot (t-t_0)}| < k \cdot e^{-\alpha(t-t_0)}, \tag{35}$$

și sînt îndeplinite prevederile teoremei 1.10 din lucrarea [4], pag. 108, adică $|\rho_k| \leqslant 1$, *și rezultă că soluția banală a sistemului este uniform asimptotic stabilă.*

Se cunoaște de la sistemele liniare cu coeficienți constanți, că : $|e^{[B] \cdot (t-t_0)}| < V$, pentru $t \geqslant t_0$, iar matricea $[P(t)]$ fiind periodică și continuă, este sigur mărginită, cu V o constantă de tip Lipschitz.

Deci se poate scrie că :

$$|\{x(t, t_0, x_0)\}| \leqslant |[P(t)] \cdot |e^{[B] \cdot (t-t_0)}| \cdot |(x_0)\}|, \tag{36}$$

sau ținînd seama de (35), se obține :

$$|\{x(t, t_0, x_0)\}| \leqslant |[P(t)]| \cdot k \cdot e^{-\alpha(t-t_0)} \cdot |\{x_0\}|, \tag{37}$$

unde α este un număr pozitiv mic.

Rezultă că $\lim |\{x(t, t_0, x_0)\}| = 0$, *deci soluția banală a sistemului* :

$$\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = [A(t)] \cdot \{x\}; \quad [A(t + T)] = [A(t)],$$

cu coeficienți periodici, este uniform asimptotic stabilă.

Din analiza calitativă a sistemului de ecuații diferențiale (8) al modelului adoptat pentru studiul echilibrajului rotorului cu masă varia-

bilă sau dezechilibru variabil, analiză care s-a făcut pe baza sistemului de primă aproximație (9), de forma :

$$\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = [P] \cdot \{x\} + \{g(x, t)\}$$

cînd se neglijează efectul forțelor reactive și sistemul (21) de forma $\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = [A(t)] \cdot \{x\} + \{Y(t, x)\}$ cînd nu se neglijează efectul forțelor reactive, avînd la bază rezultatele lui Alexander [6] și [7], obținute pe același model dar cu masă constantă, se pot trage următoarele concluzii ;

1. sistemul (8) admite ca soluție asimptotic stabilă soluția banală, deoarece atît sistemul de primă aproximație (9), cît și sistemul de a doua aproximație (21), *admit soluția banală ca* soluție uniform asimptotic stabilă [$\lim_{t\to\infty} \{x\} = 0$], deci modelul propus funcționează din punct de vedere fizic.

2. soluția banală rămîne uniform asimptotic stabilă și în cazul existenței unor perturbații permanente ;

3. soluția banală este soluție uniform asimptotic stabilă și pentru cazul în care sistemul (8) respectiv sistemul de primă aproximație (9) are coeficienți periodici de perioadă T, de forma seriilor Fourier ;

4. un rotor cu masă variabilă (dezechilibru variabil), se poate *autoechilibra* cu ajutorul a trei seturi de mase, cu cîte două mase în set, libere să se miște în canale circulare bine lubrificate, canale situate în trei plane : în fața, centrul și spatele rotorului (fig. 2, a, b) ;

5. dispozitivul propus, pentru autoechilibrare a unui rotor cu dezechilibru variabil, are mare capacitate de adaptabilitate la perturbații exterioare.

Partea experimentală realizată de autor, a confirmat rezultatele obținute teoretic și este prezentată detaliat în lucrarea [7], cap. 8.

d) *Concluzii asupra echilibrării rotoarelor cu masă variabilă (dezechilibru variabil)*

Din cele prezentate mai sus și avînd în vedere rezultatele experimentale obținute de autor și prezentate în lucrarea [7], cap. 8, se pot trage următoarele concluzii :

1. nu este posibil ca un rotor cu masă variabilă (dezechilibru variabil) să fie echilibrat cu mase constante plasate în poziții fixe ;

2. echilibrarea unui rotor cu masă variabilă este posibil să se realizeze cu mase variabile plasate în poziții fixe, dar din punct de vedere al realizării practice este foarte dificil ;

3. în lucrare s-a tratat metoda echilibrării rotorului de masă variabilă cu mase constante dar cu poziții variabile, producînd efecte similare unor mase variabile.

Procedeul a fost folosit și în cazul rotorului cu masă constantă de către Alexander și prezentat în lucrările [6] și [7]. Alexander demonstrează validitatea metodei prin simulații pe un calculator analog ;

4. un rotor cu masă variabilă sau cu dezechilibru variabil poate fi echilibrat dinamic cu mase mobile, lăsate libere să se miște în canale circulare, bine lubrificate.

Modelul prezentat figurile 2, a, b, a fost studiat pentru cazurile: a) cînd efectele forțelor reactive și momentelor forțelor reactive sînt neglijabile; b) cînd efectele forțelor reactive nu sînt neglijabile; c) cînd ecuațiile diferențiale (8) au coeficienți variabili periodici;

5. rezultatele teoretice au fost verificate experimental pe un stand de probe cu rotori de masă variabilă (dezechilibru variabil);

6. masele libere pot avea forma unor cuzinești și experiențele au arătat că bune rezultate se obțin cînd unghiul lor la centru este mic și au lățime cît mai mare posibil;

Pot fi de formă sferică și bune rezultate se obțin cu asemenea mase la rotoare sub formă de disc, și la arbori cu diametrul $d < 100$ mm și lungime mare în comparație cu diametrul;

7. metoda propusă de echilibrare automată a rotoarelor cu masă variabilă sau dezechilibru variabil, are un vast domeniu de aplicabilitate practică. Se poate adapta la orice tip de rotor și la orice corp cu mișcare de rotație sau rototranslație, cum ar fi spre exemplu: discurile abrazive ale mașinilor de rectificat; discurile abrazive ale polizoarelor; rotoarele tuturor mașinilor electrice; rotoarele turbosuflantelor; rotoarele turbinelor cu gaze și aburi; rotoarele ventilatoarelor; arborii principali ai mașinilor unelte; arbori cotiți; arborii centrifugelor și supercentrifugelor; arborii pompelor centrifugale; arborii filtrelor rotative; arborii mașinilor de spălat; arborii amestecătoarelor etc.

8. pentru obținerea unor bune rezultate cu metoda propusă, trebuie să se cunoască domeniul dezechilibrului rotorului, pentru a se putea calcula mărimea maselor mobile și raza canalelor circulare;

9. dispozitivul are capacitate mare de a prelua dezechilibre variabile în timpul funcționării (indiferent care este cauza variației dezechilibrului). Viața rotoarelor echipate cu acest dispozitiv este mult mărită, deci intervalul între reparații va crește, de aici cheltuieli mult diminuate cu întreținerea și reparația;

10. dispozitivul propus dă foarte mare siguranță în exploatare, el fiind încorporat în rotor, deci nu poate fi vorba de accidente tehnice și umane provocate de utilizarea lui;

11. dispozitivul nu ridică probleme dificile din punct de vedere tehnologic, fiind simplu de adaptat și de realizat la orice tip de rotor;

12. dispozitivul are o foarte mare capacitate de a răspunde la modificările dezechilibrului și asigură echilibrarea dinamică într-un anumit domeniu de dezechilibru, indiferent de legea după care se face variația masei sau dezechilibrului în timp;

13. la rotoarele care au diametrul mult mai mare decît lățimea și cu distanța între lagăre de același ordin de mărime cu lățimea rotorului, ca de exemplu: pietrele abrazive ale polizoarelor, pompele centrifuge cu un singur rotor, ventilatoarele etc., bune rezultate se obțin cu un singur set de mase mobile, format din trei mase, plasate într-un singur canal circular;

14. metoda propusă pentru echilibrarea dinamică a rotoarelor cu masă variabilă sau dezechilibru variabil, se recomandă a fi folosită pentru dezechilibre nu prea mari, altfel implică mase mari pentru masele mobile;

15. echilibrarea rotoarelor cu masă variabilă, deci cu dezechilibru variabil — fiind o problemă nouă în mecanica tehnică, fără îndoială lucrarea prezentată constituie abia un început;

16. cercetările viitoare pot fi canalizate spre adaptarea corespunzătoare a dispozitivului pe diferite tipuri de rotoare: pentru determinarea formei optime a maselor mobile, a canalelor în care se mișcă liber aceste mase și pentru rezolvarea optimală a lubrificației.

Primit în redacție la 26 iulie 1989

BIBLIOGRAFIE

1. R. P. VOINEA, D. VOICULESCU, V. CEAUȘU, *Mecanică*. Edit. didactică și pedagogică, București, 1983.
2. V. VÎLCOVICI, ȘT. BĂLAN, R. P. VOINEA, *Mecanică teoretică*, Edit. tehnică, București, 1968.
3. D. MANGERON, N. IRIMICIUC, *Mecanica rigidelor cu aplicații în inginerie*, vol. **II**, *Mecanica sistemelor rigide*, Edit. tehnică, București, 1980.
4. A. HALANAY. *Teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale*, Edit. Academiei, București, 1963.
5. C. LEFSET, *Geometricescaia teoria diferențialnîh uravnenii*, Gheometricescaia izdatelstvo inostranoi literaturi, Moscova, 1961.
6. J. D. ALEXANDER, *An automatic dynamic balancer development in theoretical and applied mechanics*, vol. **2**, edited by W. A. Show, New York, 1965, p. 415—416.
7. GH. PANAIT, *Contribuții la studiul echilibrajului rotorilor cu masă variabilă*. Teză de doctorat, Institutul Politehnic, București, 1978.
8. GH. PANAIT, *Contribuții la studiul dinamicii corpurilor cu masă variablă*, St. cerc. mec. apl., **40**, 2 (1981).
9. GH. PANAIT, *Echilibraj optim în medie de primă aproximație a rotorului cu masă variabilă (dezechilibru variabil)*, st. cerc. mec. apl., **40**, 3 (1981).
10. R. BELIMAN, *Introducere în analiza matriceală*, Edit. tehnică, București, 1969.

CĂI DE ÎMBUNĂTĂȚIRE A VARIATOARELOR ELASTOHIDRODINAMICE

de I. M. CIORNEI

Institutul de Învățămînt Superior Suceava

În lucrare se prezintă o analiză a tuturor surselor de focare dintr-un variator elastohidrodinamic și parametrii care le influențează, indicîndu-se măsuri de reducere a lor, în vederea optimizării acestor transmisii mecanice.

GENERALITĂȚI

În foarte multe ramuri industriale procesele tehnologice, care trebuie să se desfășoare la indici de productivitate maximă, au loc cu unul sau mai mulți paramteri variabili în timp ; de regulă, ca parametru variabil se utilizează turația, care poate fi variată cu ajutorul unor transmisii mecanice numite variatoare.

Datorită succeselor înregistrate, în ultimii ani, în lămurirea fenomenelor lubrificației EHD, variatoarele mecanice care funcționează prin peliculă de ulei, numite și variatoare EHD, li se acordă o atenție din ce în ce mai mare [3] [5] [12]. S-au conceput un număr mare de variante constructive, care pe lîngă cantitatea imensă de fantezie inginerească, înglobează multe studii teoretice și experimentale.

Întrucît performanțele variatoarelor EHD depind de pierderile prin frecare, se impune, cu necesitate, studierea surselor de frecare, în vederea diminuării lor.

SURSELE DE FRECARE DIN VARIATOARELE ELASTOHIDRODINAMICE

Ca proces fizic frecarea din variatoarele EHD depinde de mulți factori, printre cei mai importanți numărîndu-se macro și microgeometria elementelor componente, deformațiile de contact, dependente de sarcină, proprietățile fizico-chimice ale materialului elementelor componente și lubrifiantul folosit, procedeul concret de ungere, etanșările, pierderile prin ventilarea aerului în vederea răcirii ș.a.

Actualmente este mult mai ușor să se măsoare frecarea globală din variatoare, decît să se estimeze pe cale teoretică componentele ei, ceea ce limitează încă posibilitățile de optimizare a acestor transmisii din punct de vedere al randamentului.

Deși acest fenomen a stat, și stă în atenția a numeroși cercetători, [2], încă nu a fost efectuată o sinteză sistematică a principalelor surse de frecare din variatoarele EHD.

După cum se poate constata din figura 1, care prezintă schematic, sursele de frecare din variatoarele EHD, frecarea globală are patru componente principale, și anume :

— frecarea în cuplele cinematice ;

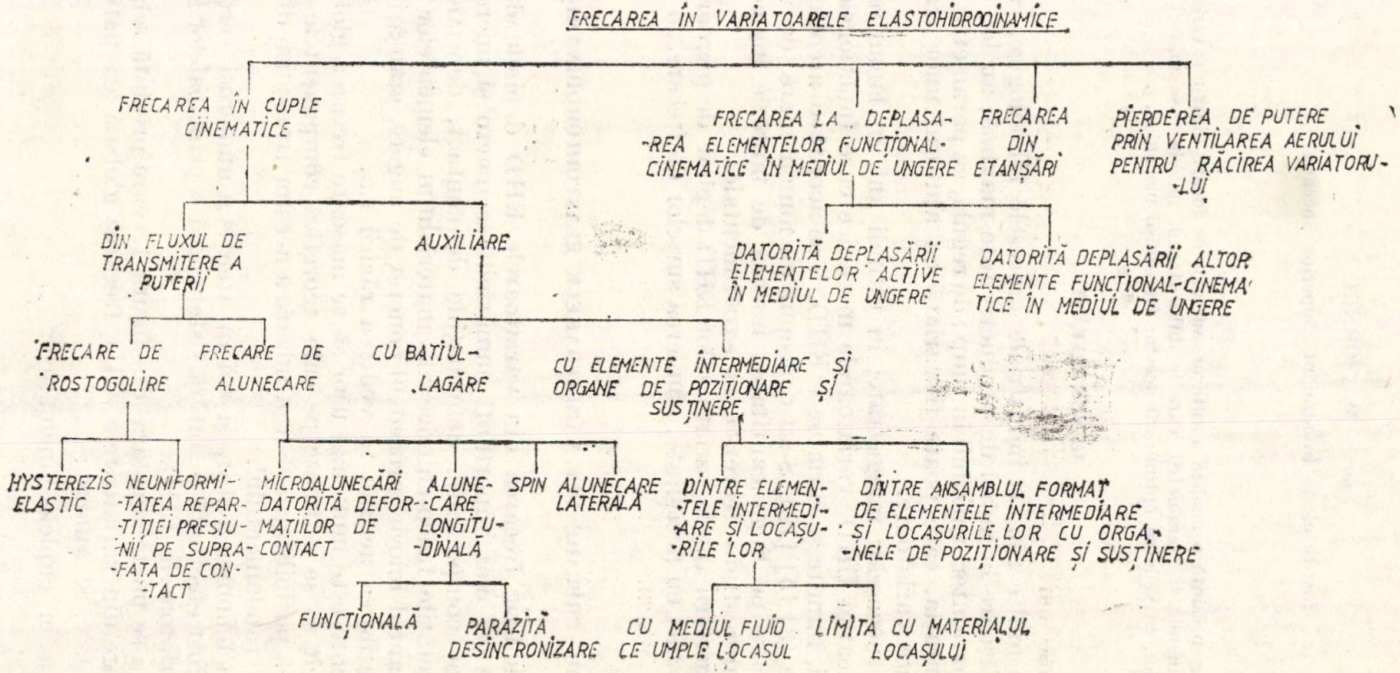


Fig. 1 . — Sursele de frecare dintr-un variator elastohidrodinamic

— rezistența la deplasare a elementelor funcțional-cinematice în mediul de ungere;

— pierderea de putere prin ventilarea aerului în vederea răcirii ventilatorului.

La rîndul lor, componentele menționate mai sus rămîn fenomene complexe (mai ales primele două), materializîndu-se ca o însumare a mai multor surse de frecare. Astfel frecarea din cuplele cinematice poate fi despărțită în două mari componente și anume, cea din cuplele din fluxul de transmitere a puterii și cea din cuplele auxiliare. Frecarea din cuplele de transmitere a puterii este cauzată din pierderile prin hysterezis elastice și neuniformitatea repartiției presiunii pe suprafața de contact, care alcătuiește frecarea de rostogolire, și din frecarea de alunecare, generată de microalunecările datorită deformațiilor de contact, alunecare longitudinală, fie funcțională, fie parazită, din cauza desincronizării, spinului și alunecarea laterală.

Frecarea din cuplele auxiliare este alcătuită din frecarea din lagăre și cea cu elementele intermediare și organele de poziționare și susținere.

Fiecare din sursele menționate mai sus își manifestă existența prin cîte un moment de frecare specific care, este component al momentului global de frecare din variator.

Pierderile prin hysterezis elastic. În timpul funcționării unui variator EHD, zona din suprafața de contact orientată în direcția de rostogolire este supusă la încărcare, iar cea de ieșire, la descărcare; aria cuprinsă între curbele încărcare-descărcare reprezintă energia pierdută prin hysterezis elastic, în volumul tensionat, pe un ciclu.

Cercetările detalialte, în acest domeniu, efectuate de Drutovski [10], Pineghin, [14], au evidențiat că pierderile prin hysterezis sînt dependente de:

— proprietățile elastice ale materialelor în contact, cu cît materialul este mai apropiat de o comportare perfect elastică, pierderile prin hysterezis sînt mai mici; din contră, materialele vîsco-elastice se caracterizează prin pierderi mari prin hysterezis;

— tensiunile de contact; cu cît aceste tensiuni sînt mai mici, materialul se comportă mai liniar și pierderile prin hysterezis sînt mai mici; la sarcini mari abaterile de la comportarea perfect elastică sînt mai mari și ca urmare cresc pierderile prin hysterezis;

— volumul de material afectat de tensiuni semnificative; încercările experimentale efectuate prin rostogolirea unei bile între două plăci plane au demonstrat o dependență aparent liniară între frecarea de rostogolire și volumul tensionat, [10]:

— în genere pierderea de energie prin hysterezis elastic este mică în comparație cu alte tipuri de pierderi; de exemplu coeficientul de frecare atribuit de Drutovski, [10], este de ordinul lui 10^{-4};

— influența hysterezisului în frecarea totală crește pe măsura măririi razei transversale de curbură a căii de rulare, care conduce la mărirea volumului încărcat, respectiv descărcat, de tensiuni.

Pierderile datorită distribuției neuniforme a presiunii pe suprafața de contact. În cazul variatoarelor EHD distribuția neuniformă a presiunii pe suprafața de contact se datorește efectelor hidrodinamice din peliculă,

care conduc la o deplasare, către intrarea în contact, a rezultantei presiunii față de forța normală exterioară aplicată.

Investigațiile efectuate, [1] [8] [11], au arătat că majoritatea frecării de rostogolire rezultă din presiunea care acționează pe suprafața înclinată de intrare; pentru domeniul de pînă la $\frac{\eta_0 u}{E'R} = 10$, coeficientul de frecare are valoarea $\mu = 10^{-3}$, fiind legat de grosimea filmului de lubrifiant. La valori mai mari ale produsului menționat mai sus, frecarea de rostogolire are variații mai mari decît grosimea filmului de lubrifiant, [11].

Pierderile din microalunecările datorită deformațiilor de contact. S-a arătat că elementele active ale unui variator EHD sînt supuse la tensiuni mari de contact, contact care se realizează pe o arie; numai o parte din punctele acesteia se află pe axoide, așa încît între celelalte puncte apar și viteze mici de microalunecare, formîndu-se zone pe care apar eforturi tangențiale dirijate parțial în sensul mișcării și parțial în sens opus mișcării. Rezultanta acestor tensiuni este opusă direcției de rostogolire și reprezintă forța de frecare care se opune rostogolirii, ca urmare a microalunecărilor de contact. Pentru calculul microalunecărilor s-au elaborat relații de calcul, [17], care arată o creștere a lor cu sarcina și cu excentricitatea contactului.

Pierderile datorită alunecării longitudinale. Alunecarea longitudinală poate fi funcțională, cauzată de forța tangențială sub care se transmite puterea, și parazită datorită desincronizării elementelor intermediare.

Alunecarea longitudinală funcțională este determinată de comportarea la forfecare a peliculei de ulei, comportare caracterizată de coeficientul de tracțiune, care, poate varia de la 0,1, pentru uleiul sintetic Santotrac la 0,28 pentru uleiul indigen nespecializat T90, [3] [5] (aceasta din urmă măsurată într-un variator cu rulmenți încărcați), orice creștere a ei are ca efect creșterea temperaturii, făcînd posibilă intrarea variatorului în regim de patinare, [13].

Pentru diminuarea alunecării longitudinale funcționale se recomandă utilizarea de lubrifianți specializați, viteză cît mai mică, suficientă pentru formarea unei pelicule de lubrifiant, și o temperatură cît mai scăzută, [3] [5], deși sarcinile de apăsare mari, conduc la o creștere a coeficientului de tracțiune, ele au efect negativ asupra durabilității elementelor din contact și duc la o creștere a mărimii componentelor frecării menționate mai sus, la care se adaugă și cea din rulemnți.

Alunecarea longitudinală parazită datorită desincronizării apare atunci cînd între elementul conducător și cel condus sînt utilizate mai multe elemente intermediare care, datorită unor imprecizii de execuție și montaj au viteze unghiulare diferite, formîndu-se lanțuri închise de putere. O primă cale de îmbunătățire a sincronizării elementelor intermediare constă în mărirea preciziei de execuție și de montaj a elementelor variatorului, soluție care conduce la ridicarea însemnată a prețului de cost. A doua cale de sincronizare constă în introducerea unor mecanisme suplimentare care să asigure poziționarea corectă a elementelor intermediare, dar care complică construcția și ridică prețul de cost al variatorului, [5].

Pierderi datorită spinului. Forfecarea datorită spinului apare din cinematica contactului, fiind subiectul a numeroase lucrări de specialitate, [3] [4] [5] [7] [8] [13] [16] [18]. Analiza rezultatelor experimentale arată clar influența negativă a spinului asupra tracțiunii, ducînd la scăderea pantei curbelor de tracțiune, efect mai pronunțat cu cît viteza de rostologire este mai mare, deci la pelicule mai groase, figura 2.

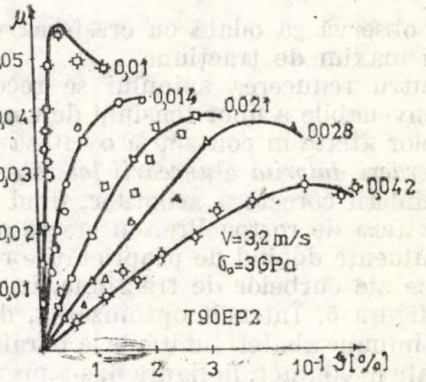


Fig. 2. — Curbe de tracțiune în prezența spinului.

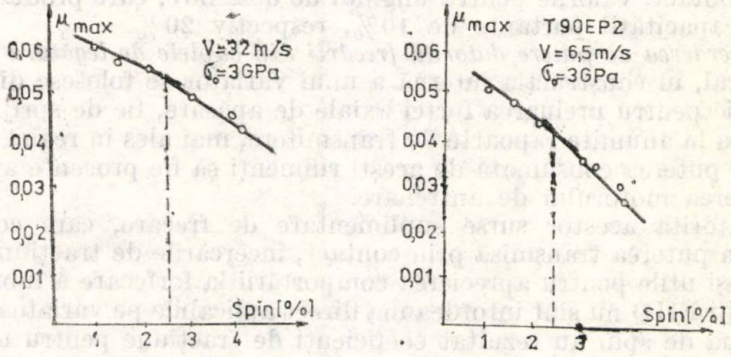


Fig. 3. — Influența spinului asupra coeficientului maxim de tracțiune

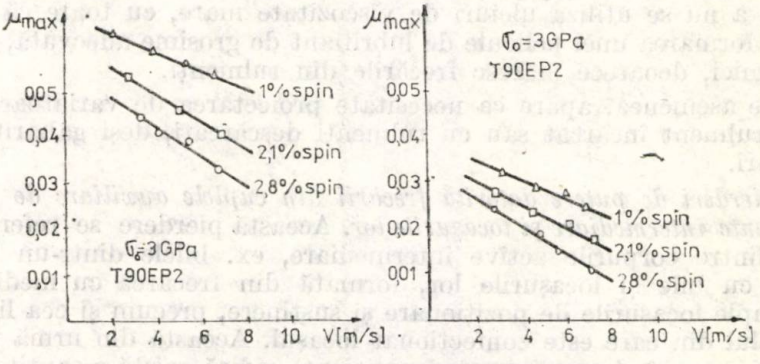


Fig. 4. — Influența vitezei asupra coeficientului maxim de tracțiune la diverși parametri ai spinului.

De asemenea, spinul are o influență deosebită și asupra coeficientului maxim de tracțiune, figura 3. Se observă că la început panta de scădere este destul de mică, după care aceasta crește, stabilindu-se în acest fel pragul spinului; pentru uleiurile testate el capătă valoarea de aproximativ 2,5%, după această valoare, influența devine drastică. Experimental s-a determinat și variația coeficientului maxim de tracțiune la diverși parametri adimensionali ai spinului, funcție de viteza de rostogolire, figura 4.

Se observă că odată cu creșterea vitezei are loc o scădere a coeficientului maxim de tracțiune.

Pentru reducerea spinului se recomandă alegerea unei game de reglaj convenabile a unor tensiuni de contact cît mai mici, o optimizare a elementelor aflate în contact și o viteză unghiulară cît mai mică.

Pierderi datorită alunecării laterale. Alunecarea laterală apare datorită nealinierii corecte a arborilor, fiind o deplasare relativă perpendiculară pe viteza de rostogolire, cu efecte comparabile cu cele ale spinului; aceste influențe depind de proprietățile reologice ale lubrifianților. Aspectele tipice ale curbelor de tracțiune, în prezența alunecării laterale, sînt date în figura 5. Întrucît optimizarea, din punct de vedere al alunecării laterale, impune abateri limită de la paralelismul celor două axe ale elementelor aflate în contact, în figura 6, s-a prezentat, funcție de tensiunea maximă de contact, valorile pentru unghiul de dezaxare, care produc o reducere a capacității portante de 10%, respectiv 20%.

Pierderea de putere datorită frecării din cuplele de legătură cu batiul. În general, în construcția internă a unui variator se folosesc diverși rulmenți, fie pentru preluarea forței axiale de apăsare, fie de sprijin, și este posibil ca la anumite rapoarte de transmitere, mai ales în regim de multiplicator, puterea consumată de acești rulmenți să fie procente apreciabile din puterea motorului de antrenare.

Datorită acestor surse suplimentare de frecare, care consumă o parte din puterea transmisă prin contact, încercările de tracțiune pe contacte, deși utile pentru aprecierea comportării la forfecare a lubrifianților în condiții EHD nu sînt întotdeauna direct aplicabile pe variatoare. Astfel pe mașina de spin au rezultat coeficienți de tracțiune pentru uleiul T90 $\mu = 0{,}06$, [2], pe cînd măsurătorile pe variator au indicat un coeficient de tracțiune $\mu = 0{,}028$, [3] [5]. Din aceste considerente s-au făcut recomandări de a nu se utiliza uleiuri de vîscozitate mare, cu toate că acestea asigură formarea unei pelicule de lubrifiant de grosime adecvată, chiar la viteze mici, deoarece măresc frecările din rulmenți.

De asemenea, apare ca necesitate proiectarea de variatoare cu un singur rulment încărcat sau cu rulmenți descărcați, deși gabaritele sînt mai mari.

Pierderi de putere datorită frecării din cuplele auxiliare de legătură cu elemente intermediare și locașurile lor. Această pierdere se referă la frecarea dintre corpurile active intermediare, ex. bilele dintr-un variator frontal cu bile și locașurile lor, formată din frecarea cu mediul fluid care umple locașurile de poziționare și susținere, precum și cea limită cu materialul din care este confecționat locașul. Această din urmă pierdere este mai mare cînd ungerea este insuficientă, adică există o cantitate mică de lubrifiant. În cazul variatoarelor EHD există lubrifiant, așa că se

poate vorbi numai de frecarea cu mediul fluid ce umple locaşurile de poziţionare şi susţinere şi care depinde de o serie de factori, şi anume : diametrul corpului de rostogolire, greutatea, mărimea, turaţia elementului de poziţionare şi susţinere etc., frecare foarte mică, aproape neglijabilă.

Pierderea de putere datorită frecării dintre ansamblul format de elementele intermediare şi locaşurile lor cu organele de poziţionare şi susţinere.

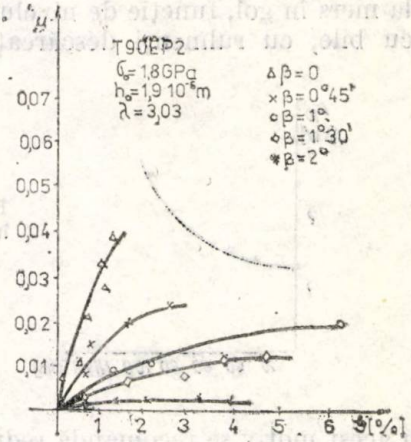


Fig. 5. — Curbe de tracţiune în prezenţa alunecării laterale.

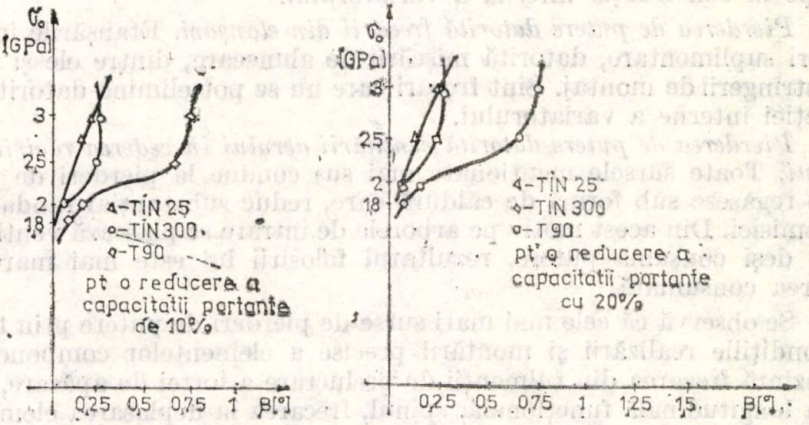


Fig. 6. — Valorile admisibile pentru abaterea de la paralelism.

Această pierdere se referă la frecarea din rulmenţii de poziţionare a coliviei, cazul variatoarelor frontale, cu bile, rulmenţii de sprijin a elementului intermediar, cazul variatoarelor toroidale, Kopp B, Kopp K etc. Ea are valoare mică, întrucît în aceşti rulmenţi acţionează numai forţa de tracţiune, de valoare redusă în comparaţie cu forţa normală.

Pierderea de putere datorită frecării la deplasarea elementelor funcţional-cinematice în mediul de ungere. Aceasta cuprinde frecarea datorită deplasării elementelor active şi a altor elemente funcţional-cinematice în mediul de ungere. Ea depinde de mai mulţi factori şi anume : vîscozitatea

și temperatura uleiului, caracteristicile sale fizice, viteza relativă a elementelor menționate mai sus față de lubrifiant, dacă ungerea se execută prin barbotare sau dacă uleiul este pompat direct în contact. Întrucît variatoarele EHD folosesc uleiuri cu vîscozitate mare, mai ales variantele cu rulmenți descărcați, dacă ungerea se execută prin barbotare, atunci este posibil ca numai datorită frecării menționate mai sus, să se consume puterea de pînă la sute de watti, [9], figura 7, (această figură prezintă puterea la mers în gol, funcție de nivelul de ulei, măsurată la un variator frontal cu bile, cu rulmenți descărcați).

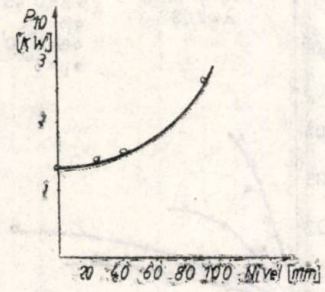


Fig. 7.— Puterea la mers în gol funcție de nivelul de ulei.

Din acest motiv se recomandă reducerea lubrifiantului chiar în zona de contact, și aceasta se poate realiza, simplu, prin încorporarea unei pompe în construcția internă a variatorului.

Pierderea de putere datorită frecării din etanșări. Etanșările introduc frecări suplimentare, datorită mișcării de alunecare, dintre ele și arbore, și a strîngerii de montaj. Sînt frecări care nu se pot elimina datorită construcției interne a variatorului.

Pierderea de putere datorită ventilării aerului în vederea răcirii variatorului. Toate sursele menționate mai sus conduc la pierderi de putere, ce se regăsesc sub formă de căldură care, reduc substanțial randamentul transmisiei. Din acest motiv pe arborele de intrare se plasează ventilatorul care, deși consumă putere, rezultatul folosirii lui este mai mare decît puterea consumată.

Se observă că cele mai mari surse de pierderi de putere prin frecare, în condițiile realizării și montării precise a elementelor componente, o reprezintă frecarea din rulmenții de prelucrare a forței de apăsare, alunecarea longitudinală funcțională, spinul, frecarea la deplasarea elementelor funcțional-cinematice în mediul de ungere.

Frecarea din rulmenți reprezintă una din sursele cele mai importante de pierdere, mai ales, în cazul variantelor constructive cu rulmenți încărcați. Pentru o astfel de variantă, atunci cînd se folosește lubrifiant nespecializat, cu vîscozitate mare, pentru a forma peliculă la viteze mici, este posibil că la anumite rapoarte de transmitere, mai ales în regim de multiplicator, pierderea de putere datorită frecării din rulmenți să devină comparabilă cu cea transmisă de variator. Din acest motiv singura soluție o reprezintă proiectarea de variante cu rulmenți descărcați, deși gabaritic vor rezulta mai mari, cu atît mai mult cu cît în România nu se produc lubrifianți sintetici.

Pierderea de putere datorită alunecării longitudinale funcţionale nu poate fi redusă total, constituind chiar principiul funcţional al acestor transmisii, în schimb ea poate fi diminuată prin alegerea corespunzătoare a lubrifiantului, sarcinii, turaţiei şi temperaturii de lucru.

Spinul, altă sursă importantă de pierdere de putere, se poate diminua prin alegerea geometriei optime a elementelor aflate în contact şi a unei game de reglaj convenabile.

Pierderea de putere datorită deplasării elementelor funcţional-cinematice în mediul de ungere, poate fi mult diminuată prin utilizarea de dispozitive speciale de aducere a lubrifiantului în zona de contact; aceasta se realizează prin încorporarea în construcţia internă a variatorului a unei pompe.

CONCLUZII

În lucrare s-au analizat, critic, toate sursele de frecare din variatoarele EHD în vederea măririi randamentului lor. Pe baza sintezei efectuate se pot trage următoarele concluzii:

— Creşterea performanţelor variatoarelor EHD este posibilă prin reducerea alunecării longitudinale funcţionale, adică utilizarea unor

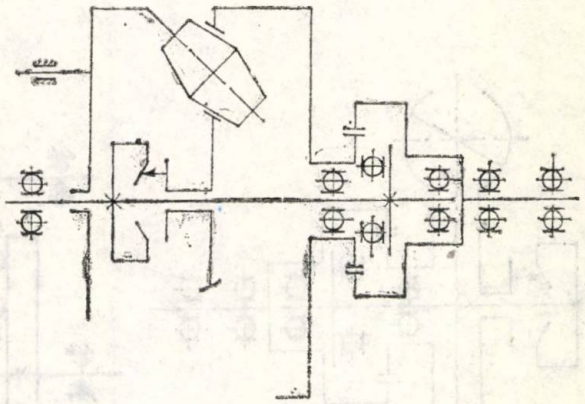


Fig. 8. — Variator Kopp K cu un singur rulment încărcat.

lubrifianţi cu bune proprietăţi de tracţiune, corelată cu o răcire cît mai bună a variatorului, viteză de rostogolire a elementelor din contact să fie cît mai redusă, suficientă pentru formarea unei pelicule de lubrifiant, de grosime adecvată.

— Performanţele generale ale unui variator se pot îmbunătăţi substanţial prin optimizarea geometriei elementelor aflate în contact, deci reducerea spinului; se recomandă ca parametrul adimensional al spinului să nu depăşească valoarea de 2,5%.

— Executarea şi montarea precisă a elementelor active, ceea ce reduce alunecarea laterală, constituie altă cale de reducere a frecării din variatoarele EHD.

— Introducerea de mecanisme suplimentare care să asigure poziţionarea corectă a elementelor intermediare, ceea ce elimină nesincronizarea şi va duce la creşterea performanţelor variatoarelor EHD.

— Frecarea din rulmenţi trebuie redusă, mai ales în condiţiile folosirii de lubrifianţi nespecializaţi, şi aceasta se poate realiza prin proiec-

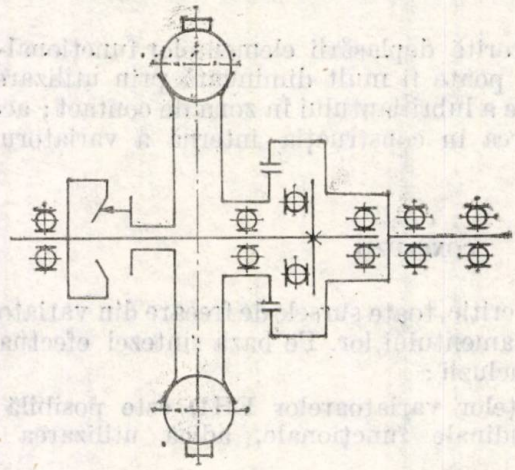


Fig. 9. — Variator Kopp B cu un singur rulment încărcat.

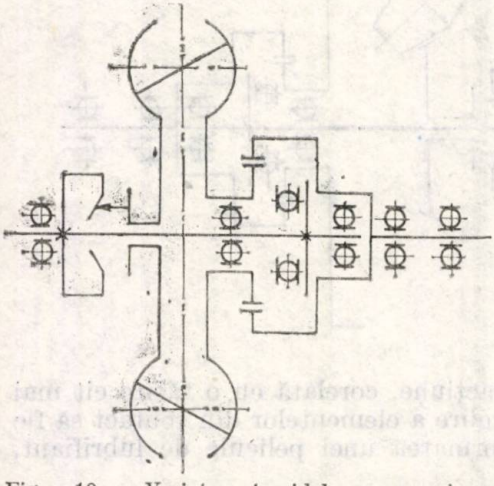


Fig. 10. — Variator toroidal cu un singur rulment încărcat.

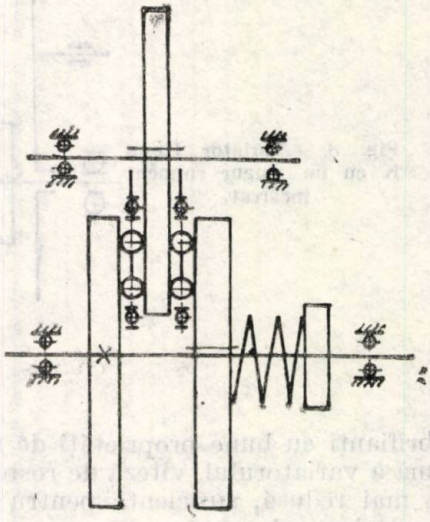


Fig. 11. — Variator frontal cu bile cu rulmenţi descărcaţi.

tarea de noi variante constructive cu un singur rulment încărcat sau cu rulmenţi decărcaţi. În acest context se propun patru asemenea variante în figura 8, Kopp K cu un singur rulment încărcat, figura 9, Kopp B cu un singur rulment încărcat, figura 10, toroidal cu un singur rulment încărcat şi figura 11, frontal cu bile cu rulmenţi descărcaţi.

— Pentru reducerea pierderilor de putere datorită deplasării elementelor funcţional-cinematice în mediul de ungere se recomandă încorporarea în construcţia internă a variatorului a unor dispozitive, pompe, pentru aducerea lubrifiantului chiar în zona de contact şi menţinerea unui nivel redus al lubrifiantului în baie.

Primit în redacţie la 22 martie 1989

BIBLIOGRAFIE

1. D. R. ADAMS, W. HIRST, *Frictional Traction in EHD lubrication*, Proc. Roy. Soc. Lond. **332** (1973).
2. R. CECIL, W. C. PIKE, N. R. RAJE, *Development of Methods for evalusting traction Fluids*, Wear, 26 (1973).
3. I. M. CIORNEI, *Utilizarea efectelor elastohidrodinamice în construcţia variatoarelor de turaţie de tip frontal cu bile*, Teză de doctorat, Institutul Politehnic Bucureşti, 1986.
4. I. M. CIORNEI, *Implications of Spin in EHD Traction Drives*, International Scientific Conference on Friction Wear and Lubricants, Taschkent, 1985.
5. O. S. CREŢU, *Cercetări privind capacitatea portantă şi durabilitatea variatoarelor cu role toroidale cu aplicaţie la maşini-unelte*, Teză de doctorat, Institutul Politehnic Iaşi, 1981.
6. A. W. CROOK, *The Lubrication of Rollers*, Phil. Trans. Roy, (1963).
7. B. K. DANIELS, *Non-Newtonian Thermo-viscoelastic EHD Traction from Combined Slip and Spin*, ASLE, **23** (1980).
8. B. K. DANIELS, *Traction Contact Optimisation*, ASLE, **24** (1980).
9. E. N. DIACONESCU, A. G. GRAUR, *Influenţa nivelului de ulei din baie asupra performanţelor variatorului EHD*, VAREHD 2, Suceava 1982, p. 249—257.
10. R. C. DRUTOVSKI, *Energy bases of Balls Rolling an Plotes*, ASME, series D, Journal of Basic Enginering, **81** (1959).
11. B. I. KLEMZ, BOHAR. A. CAMERON, *Photoelastic Stadies of Lubricated Line Contact*, Proc. Inst. Mech. Engrs. (1971).
12. GH. MILOIU, F. DUDIŢĂ, *Transmisii mecanice moderne*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1980.
13. H. S. NAGARAF, D. M. SANBORN, W. O. WINER, *Surface Temperature Measurements in Rolling and Linding EHD Contacts*, ASLE Trans., **22**, 3 (1979).
14. S. N. PINEGHIN, *Contactnai Procinosti i Coprotivlenia Caceniu*, Maşinostroeni, Moscwa, 1969.
15. S. I. POON, *Some Calculations to Assess the Effect of Spin an the Practike Capacity o Rolling Contact Drives*, Proc. Inst. Mech. Engrs., **186** (1971).
16. J. L. TEVAARWERK, K. L. JOHNSON, *The Influence of Fluid Theology on the Performance of Traction Drives*, ASME, Series F, July (1979).
17. A. V. SPISEVSCHI, *Podupniki Kacenia*, Maşinostroenia, Moscva, 1969.
18. W. WERNITZ, *Friction at Hertzian Contact with Combined Roll and Twist*, Rolling Contact Phenomena 132—156, Amsterdam, 1962.

SCENARII DE TURBULENȚĂ ÎN CADRUL HAOSULUI DETERMINIST *)

de ADELINA GEORGESCU
Institutul de Matematică
București

C. VAMOȘ
Centrul de Prevedere a Vremii
Cluj

N. SUCIU
Institutul de Meteorologie și Hidrologie București

În lucrare se analizează cîteva noi direcții în matematica aplicată (haos determinist, turbulență și fractali).

FLUCTUAȚII EXTERNE

Între cele două regimuri principale (laminar și turbulent) de mișcare a fluidelor există un regim de trecere, numit tranziție, care prezintă atît proprietăți laminare, cît și turbulente. Curgerile laminare sînt descrise macroscopic cu ajutorul unor cîmpuri fundamentale (viteza, presiunea, densitatea, temperatura), care constituie soluția clasică a modelului Navier-Stokes-Fourier (N—S—F) diferențial sau integral. Să considerăm pentru simplitate cazul materialelor ne micropolare. Atunci acest model constă din patru ecuații de bilanț (pentru următoarele mărimi fizice: masă, impuls, energie și entropie) și condiții la limită și inițiale, în clase de funcții Riemann integrabile. Forma diferențială a unei astfel de ecuații de bilanț este

$$\frac{dg}{dt} = f + p + s$$

unde: g, f, p și s sînt respectiv densități ale mărimii fizice considerate ale fluxului, producției și aportului de astfel de mărime. Specificarea materialului se face postulînd pe bază experimentală sau deducînd din teoria constitutivă legături între f, p și s pe de o parte și acești g pe de alta, în legături (ecuații constitutive) aparînd presiunea și temperatura. Anumiți coeficienți care apar datorită liniarității ecuațiilor constitutive se deter-

*) Lucrare prezentată pe data de 14 III 1989 în cadrul Seminarului de Mecanica Fluidelor condus de Prof. V. N. Constantinescu.

mină experimental macroscopic sau pe baze statistice. Deja de aici sînt posibile două interpretări ale mărimilor caracteristice fundamentale:

a) ele sînt medii statistice ale mărimilor aleatoare ce caracterizează mişcarea la nivel microscopic. În acest caz mărimile nou apărute în ecuaţiile constructive au interpretări pur macroscopice, coeficienţii se determină experimental, iar caracteristicile fundamentale sînt ne aleatoare. Această interpretare conduce la existenţa unui prag (limita continuumului) de valabilitate a modelării;

b) caracteristicile fundamentale sînt mărimi aleatoare, dar în modelare intră doar media lor statistică şi anume: în membrul stîng al lui (1) g reprezintă media mărimii $\tilde{g}$, iar f, p şi s sînt legături macroscopice care modelează efectul fluctuaţiilor $\tilde{g} - g$ microscopice la scară macroscopică. Această interpretare nu este obişnuită în cazul laminar.

În mişcarea turbulentă, cîmpurile g nu mai sînt fizic relevante, iar aparatura de măsură folosită în regim laminar, aici nu mai este adecvată. Turbulenţa este un regim de curgere principial distinct de cel laminar: în cazul turbulent modelul N—S—F îşi păstrează valabilitatea, dar cîmpurile (instantanee) furnizate de el nu mai sînt folositoare, datorită variaţiilor deosebit de rapide şi complicate, practic aleatoare. O variaţie asemănătoare are loc pentru funcţia $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x^{-1}$ care, pentru x mari, este lent variabilă în vreme ce variaţia sa devine din ce în ce mai rapidă, cînd $x \to 0$. Cu toate acestea f este infinit diferenţiabilă dar stabilirea valorii sale într-un punct x_0 apropiat de 0 este dificilă, cerînd o precizie din ce în ce mai mare. Foarte aproape de 0 este practic imposibilă o astfel de determinare, o mică abatere în specificarea lui x_0 conducînd pentru $f(x_0)$ la orice valoare cuprinsă între -1 şi $+1$ (fig. 1). Literatura

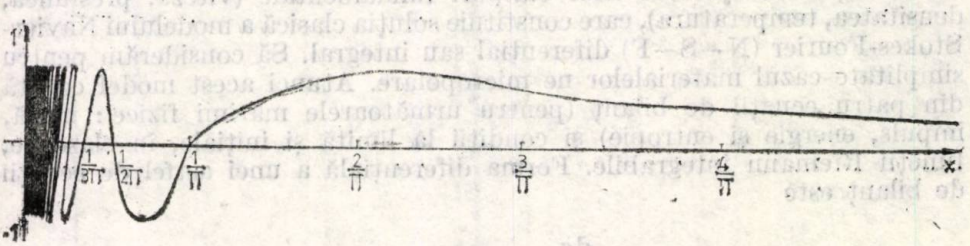


Fig. 1

oferă multe exemple de comportamente complicate ale unor funcţii ce descriu dinamici deterministe. Deci, caracterul complicat al traiectoriilor în mişcare turbulentă şi rapida variaţie a cîmpurilor menţionate, nu implică neapărat cerinţa ca aceste cîmpuri să fie aleatoare şi deci ca modelul N—S—F să fie considerat în clase de funcţii aleatoare. Totuşi, practic, acest model nu mai este adecvat pentru descrierea la scară macroscopică a turbulenţei, tot aşa cum în regimul laminar nu era relevantă o descriere microscopică discretă. Atunci, avem două posibilităţi analoage lui a) şi b): a') mărimile caracteristice mişcării turbulente sînt medii statistice ale celor laminare, iar f, p şi s sînt legate de acestea prin postulări de modele de turbulenţă şi fără să legăm pe f, p şi s de vreo caracteristică a mişcării laminare. În acest caz, mediile statistice din turbulenţă apar ca duble medieri ale mărimilor microscopice; b') caracteristicile turbulente sînt

mărimile aleatoare (sau mai bine zis puternic variabile și complete) întîlnite în modelarea laminară în timp ce f, p și s sînt rezultatul la scara turbulenței a fluctuațiilor din caracteristicile laminare. Aceste interpretări țineau seama de modelul N—S—F valabil în cazul laminar. Există însă și o altă posibilitate și anume de a nu mai lega caracteristicile turbulente de cele laminare și a postula de la început că mărimile caracteristice tulbulenței sînt aleatoare, dar că acelea fizic relevante sînt mediile lor statistice legate de o scară molară, f, p și s incluzînd efectul macroscopic al fluctuațiilor la aceea scară [1], [2]. Atunci, în loc de modelul N—S—F determinist, avem unul stocastic, în clase de astfel de funcții aleatoare. În teoriile clasice ale turbulenței se postulează tacit că în regim turbulent este valabil un model stochastic în clase de funcții aleatoare, fără să se specifice legătura între mediile statistice ale acestor funcții și mărimile din modelul N—S—F determinist (care la numere Reynold mici era laminar) și fără să se lege scara continuumului turbulent, continuu construit pornindu-se de la un sistem discret de grupări de molecule (moli) care pot să joace rolul moleculelor din cazul laminar. Această nespecificare face imposibilă o comparare și o legătură între mișcarea laminară și cea turbulentă, deoarece cele două regimuri sînt caracterizate de modele distincte și pe de altă parte provoacă serioase dificultăți în interpretarea fizică a rezultatelor teoretice. Se pare că modelul lungimii de amestec al lui Prandtl, bazat pe experimentele lui Nikuradze, ia în considerație scara molară drept scara microscopică a turbulenței, ceea ce explică concordanța sa deosebită cu rezultatele măsurătorilor. Acest punct de vedere este actualmente dezvoltat de școala sovietică condusă de V. V. Struminskii [2].

Caracterul aleator al soluției modelului N—S—F stocastic provine din caracterul aleator al datelor (condiții inițiale, condiții la limită, vîscozitate turbulentă, forțe exterioare aleatoare). De aceea în acest model fluctuațiile au natură exterioară (zgomot) [11]), sînt introduse în sistemul fluid și nu se dezvoltă din perturbații. În consecință, modelul N—S—F este adecvat descrierii turbulenței dezvoltate și nu tranziției.

Modelele matematice efectiv folosite în investigarea turbulenței dezvoltate se obțin simplificînd modelul N—S—F stocastic într-un mod diferit decît în cazul laminar, deoarece aici vîscozitatea, nestaționaritatea și amestecul sînt condiții necesare de turbulență. Aceste simplificări se fac diferențiat, ținîndu-se seama de proprietățile mediilor și corelațiilor și a legăturii dintre ele. Astfel, în teoriile statistice naive de tip Reynolds se postulează relația de închidere (modele de turbulență) de tip algebric, diferențial, integral sau mixt între medii temporale și corelații. În teoriile statistice propriu-zise se folosesc medii probabilistice, dar și aici se introduc ipoteze simplificatoare : asupra mediilor și anume izotropia (în teoria lui Kolmogorov), sau se postulează relații între spectre și corelații (ca în teoria lui Heisenberg) sau se prescriu ordinele de mărime ale corelațiilor (în teoria lui Kraichnan) [3]. Teoria statistică a lui Hopf pare cea mai naturală și generală, singura care să permită o trecere spre interpretări laminare. Complexitatea acestei teorii face ca interesul actual pentru ea să fie pur teoretic. Pe baza ei s-a dezvoltat teoria soluțiilor statistice bidimensionale ale lui Foiaș, de asemenea, deocamdată, numai de

interes teoretic, datorită gradului mare de abstracţie al aparatului matematic, folosit, dar care deja a zdruncinat credinţa de un secol că orice mişcare tubulentă este tridimensională [4].

HAOSUL DETERMINIST

În turbulenţă, simplificările nu privesc mărimile instantanee, ci mediile, corelaţiile sau spectrele lor; rezultă că în interacţiunile model fizic — model matematic — experiment, modelul fizic este cel mai important, deşi el este mereu corectat de experiment şi teorie (fig. 2). A se compara cu situaţia mai simplă din cazul laminar (fig. 3). Să remarcăm con-

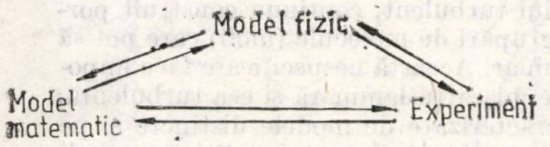


Fig. 2

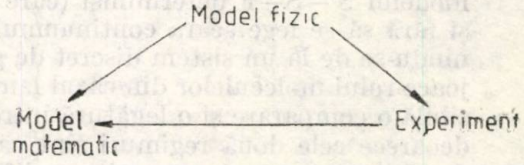


Fig. 3

diţionarea experimentului de către ideea fizică, obligatorie, de altfel, în toată fizica [5], [6], [7]; de aceea, în laboratoarele de prestigiu, experimentatorii sînt aleşi dintre cei mai buni cunoscători ai teoriilor fizice. Pe de altă parte, se constată că dacă în cazul general matematicienii depind de ideiile fizice şi de datele experimentale, în turbulenţă ei furnizează în plus, sugestii fizicienilor şi experimentatorilor, apărînd astfel, concepte fizice, gîndite iniţial matematic. În acest fel, a luat naştere matematica fizică, care apare în toate situaţiile în care ideile fizice sînt complexe, ne intuitive, ci sugerate de modelul matematic, deci ea apare mult şi în turbulenţă.

Problema principială, majoră a mecanicii fluidelor este apariţia comportamentului turbulent aleator, haotic dintr-un comportament regulat, laminar; cum ajung perturbaţiile interne, caracterizate de mărimi nealeatoare, să se transforme în fluctuaţii (aleatoare) fără aport de stocasticitate din exterior. Cunoaşterea diferitelor tipuri particulare de turbulenţe date de teoriile clasice menţionate este importantă practic dar stăpînirea mecanismului originii turbulenţei ar fi covîrşitoare, deoarece ea ar permite adevăratul control al turbulenţei, adică folosirea în profunzime, dirijată, a caracteristicilor turbulenţei şi nu în ultimul rînd a energiei sale mari. În plus, observarea structurilor coerente laminare dezvoltate în mişcări turbulente sporesc impasul în care se găsesc fundamentele teoriei turbulenţei. Dificultăţile semnalate se întîlnesc în forme specifice în studiul celor mai diferite sisteme fizice şi ele se formulează astfel: de ce evoluţiile ordonate devin haotice şi de ce pe un fond de dezordine poate apare ordinea? Un răspuns la aceste întrebări îl oferă teoriile bazate pe conceptul de haos determinist: evoluţiile complet deterministe conţin în ele însele germenii dezordinii, fără aport de zgomot din exterior. Din punct de vedere matematic *haosul determinist* este o dinamică parti-

culară în spațiul fazelor (atașat evoluției sistemului fizic, evoluție ce depinde de anumiți parametri) în care portretul de fază are proprietăți probabiliste. De aceea, haosul deterministe este numit și *haos de fază* sau haos din spațiul fazelor. Interpretarea și caracterizarea sa matematică aparține matematicii fizice în care fenomenul fizic este interpretat pornindu-se de la concepte matematice atașate dinamicii din spațiul fazelor. Astfel, evoluția unui sistem fizic se numește haotică, dacă sistemul dinamic atașat are un comportament haotic. Dinamica haotică de fază are diferite definiții. De exemplu, după Yorke, dinamica este haotică dacă mulțimea atractivă din spațiul fazelor conține o infinitate de orbite periodice, o infinitate numărabilă de orbite neperiodice și majoritatea orbitelor sînt hiperbolice, iar după Mandelbrot, dacă sistemul dinamic are un atractor fractal. Indiferent de definiția matematică, haosul determinist implică o dezordine macroscopică, constatată experimental sau observată direct. Trecerea de la dinamică regulată la una haotică, rămînînd în cadrul determinist, are loc conform unor „scenarii", „drumuri spre turbulență" tipice. Prin turbulență, aici se înțelege o dinamică analoagă turbulenței dezvoltate a fluidelor și caracterizată de mărimi aleatoare. Haosul determinist este capătul „drumului", pe cînd generarea sa are loc pe parcursul unei întregi zone de variație a parametrilor fizici, corespunzătoare tranziției laminar — turbulent.

EXEMPLE MODEL

În marea lor majoritate, fenomenele lumii vii sau nevii sînt modelate de probleme pentru ecuații cu derivate parțiale al căror comportament este departe de a fi înțeles. În anumite situații (e.g. cazul disipativ) unui astfel de fenomen i se atașează o problemă Cauchy pentru un sistem de ecuații diferențiale ordinare, numită *exemplu model*, care păstrează caracteristicile esențiale de fază ale fenomenului fizic. Ideea reducerii studiului calitativ al unei ecuații cu derivate parțiale la acela al unei ecuații diferențiale ordinare este una dintre cele mai profunde din ultimii ani. Ea a apărut în urma prelucrării unei cantități imense de rezultate obținute la calculator, cu care ocazie s-a observat că mulțimea soluțiilor anumitor ecuații cu derivate parțiale se „aplatisează" ținînzînd, pe măsura depărtării de momentul inițial ($t = 0$), către o mulțime de dimensiune finită (varietate inerțială) de soluții ale exemplului model [8]. Teoretic, Foiaș a ajuns să definească această varietate stabilind margini superioare ale numărului modurilor necesare să descrie (pentru $t \to \infty$) mulțimea soluțiilor către care tinde mulțimea tuturor soluțiilor modelului Navier-Stokes.

Uneori, exemplele model conțin tot ecuații cu derivate parțiale dar mult mai simple. În alte situații, echivalența ecuației cu derivate parțiale cu cea diferențială ordinară se referă nu la proprietăți asimptotice pentru $t \to \infty$ (ca în cazul problemelor de stabilitate și atractivitate menționate) ci $\lambda \to 0$ sau $\lambda \to \infty$ unde λ este un parametru fizic.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁR

nu este contracţie, atunci atractorul poate fi format dintr-un număr finit sau infinit de orbite parţial atractive. O mulţime atractivă care nu este varietate se numeşte *atractor straniu* sau *atractor haotic*; ea conţine o infinitate de orbite parţial atractive (i.e. al căror bazin de atracţie este strict conţinut în M) între care orbitele neatractive rătăcesc haotic. Caracterul determinant al dinamicii de fază rezultă din aceea că T_n sînt funcţii, deci duc un x_0 într-un singur $T_n(x_0)$. Dar cu tot acest caracter determinist, cînd T posedă un atractor straniu dinamica de fază este haotică. Prin *dinamică haotică* se înţelege un portret de fază format din orbite complicat de descris (din cauza ordinei aproape întîmplătoare a termenilor săi), orbite care tind indecis cînd către o orbită a atractorului straniu, cînd către alta, nu părăsesc vecinătatea acestuia, dar nici nu tind către el după o regulă simplă, deşi această tindere este complet specificată de valorile $T_n(x_0)$. Deci, mişcarea unui punct $x_0 \in M$ este haotică dacă, deşi deterministă, ea are proprietăţi nepredictibile (stocastice). Această dualitate: determinism pe de o parte (deoarece T_n sînt funcţii) şi *imprevizibilitatea* practică (datorită complexităţii lui $T_n(x_0) = g^n(x_0)$) se numeşte *haos determinist* [12].

Se remarcă că acelaşi tip de haos determinist, deşi într-o măsură mult mai mică, era cuprins şi în funcţia $\sin x^{-1}$. Dar acest haos nu este încă *turbulenţă*, deoarece el este teoretic predictibil, determinist, în timp ce prin definiţie dinamică turbulentă este caracterizată de mărimi aleatoare. Cu toate acestea, haosul determinist este un capăt de drum spre turbulenţă, deoarece dinamica de fază este impredictibilă practic, dar are anumite proprietăţi statistice comune cu turbulenţa. În acest fel, dacă sistemul dinamic T depinde de un parametru real λ şi, pe măsură ce λ creşte, mulţimea atratică a lui T se modifică, din atractor devenind atractor straniu, rezultă că odată cu creşterea lui λ se parcurge un drum spre turbulenţă şi acest drum este un scenariu care depinde de sistemul dinamic T concret. S-a constatat că există mai multe scenarii tipice pe care le vom expune la sfîrşitul lucrării după ce vom fi introdus şi alte noţiuni.

Sistemele dinamice discrete pot fi generate şi de funcţii complexe, de variabilă complexă. Mult studiate sînt funcţiile raţionale (cît de două polinoame) care posedă atractori bogaţi şi dinamici haotice.

În cazul sistemelor dinamice continue numite şi *curgeri*, toate definiţiile şi rezultatele de mai sus se transcriu corespunzător.

Dimensiunea unui sistem dinamic este dată de dimensiunea spaţiului fazelor. Sistemele dinamice continue finit dimensionale sînt generate de soluţii ale problemei Cauchy, pentru care soluţia există şi este unică,

$$\vec{x}(0) = \vec{x}_0, \tag{1}$$

pentru o ecuaţie (vectorială) diferenţială ordinară, autonomă

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \vec{f}(\vec{x}) \tag{2}$$

($\vec{f}$ se numeşte cîmp de vectori), dacă (1), (2) are soluţie unică şi anume

$$T_t(\vec{x}_0) = \vec{x}(t, \vec{x}_0) \tag{3}$$

unde $\vec{x}(t, \vec{x}_0)$ este soluția acelei probleme. De fapt, sistemul dinamic este generat de mulțimea acestor probleme corespunzătoare tuturor datelor $\vec{x}_0 \in M$ sau, echivalent, de problema Cauchy a cărei dată inițială descrie pe M. Invers, oricărui sistem dinamic T, ale cărui valori T_t sînt definite de (3), i se poate atașa o problemă Cauchy (1), (2) a cărei soluție să genereze pe T. Specificarea lui x_0 în scrierea soluției lui (1), (2) arată că acea soluție corespunde datei inițiale $\vec{x}_0$. Aceeași scriere ușurează și o interpretare dinamică bazată pe definiția (3) : orbita (traiectoria) lui $\vec{x}_0$ este imaginea funcției $\vec{x}(t, \vec{x}_0)$ de t (cu $\vec{x}_0$ fixat). Cînd variază atît t cît și $\vec{x}_0$ se obține portretul de fază al lui T și, corespunzător, mulțimea soluțiilor tuturor problemelor Cauchy ale căror date inițiale sînt în spațiul fazelor M, care este izomorf cu $\mathbb{R}^n$ și deci îl alegem drept $\mathbb{R}^n$. Traiectoriile de fază ale sistemelor dinamice continue sînt deci curbe din $\mathbb{R}^n$, variabila independentă t a problemei (1), (2) jucînd rol de parametru pe acele traiectorii. Caracterizarea de continuu atribuită lui T se datorește faptului că traiectoriile sale sînt continuu muri matematice (fiind curbe). 1-ciclurilor din cazul discret le corespund aici soluțiile staționare ale lui (2) deci vectorii constanți $x^* \in \mathrm{R}$, numiți *puncte de echilibru*, sau, simplu, *echilibre*, care satisfac ecuația

$$\vec{f}(\vec{x}^*) = 0, \tag{4}$$

un analog al k-ciclurilor fiind torurile T^{k-1} din $\mathbb{R}^n$. Curbele de pe T^k sînt k-periodice în raport cu t. În particular, T^1 este orice curbă închisă topologic echivalentă cu cercul și deseori este numit *ciclu limită*.

Deși, Poincaré a fost primul care a observat că sistemele dinamice neliniare (i.e. cu $\vec{f}$ neliniar) pot avea mulțimi atractive bizare (i.e. atractorii stranii), totuși, începînd cu el, o atenție deosebită a fost acordată unor orbite atractive speciale : punctele de echilibru și ciclurile limită. Îndepărtarea atenției de la atractorii stranii a avut un efect negativ asupra dezvoltării teoriei sistemelor dinamice ; probabil însă că aceasta nu putea fi evitat, deoarece acești atractori intrau în categoria mulțimilor ciudate, ocolite de toți matematicienii. Însuși Cantor cînd a dedus mulțimea care-i poartă numele a exclamat : „văd dar nu cred". Abia după anii 1975, odată cu introducerea fractalilor de către Mandelbrot, mulțimile neobișnuite au început să fie studiate sistematic în cadrul teoriei geometrice a măsurii.

Spre deosebire de cazul discret în care traiectoriile de fază sînt șiruri de puncte discrete, în sistemele dinamice continue traiectoriile de fază sînt curbe. Acestea se pot intersecta în spațiul fazelor dar nu în spațiul fazelor extins, care acum este $\mathbb{R} \times M$, deoarece T_t sînt funcții și, corespunzător, problema Cauchy (1), (2) are soluție unică. Mișcării pe traiectorie a unui singur punct $\vec{x}_0$ din spațiul fazelor îi corespunde variația în timp a soluției $\vec{x}(t, \vec{x}_0)$ a problemei Cauchy atașată în care $\vec{x}_0$ este fixat. O problemă Cauchy pentru o ecuație diferențială ordinară neautonomă de tipul (3) în care $\vec{f} = \vec{f}(t, \vec{x})$ generează, dacă soluția sa există și este unică un sistem dinamic $n + 1$ dimensional, deoarece în acest caz t se ia drept a $n + 1$-a componentă a lui $\vec{x}$.

$d_c(A) = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0{,}63$. Pentru diferite tipuri de mulţimi se pot defini diferite tipuri de dimensiuni. Atractorii pot fi caracterizaţi cu ajutorul dimensiunii topologice care este un număr întreg egal cu dimensiunea spaţiului euclidian local izomorf cu acea varietate. Tipurile celelalte de dimensiuni sînt necesare pentru atractorii haotici pentru care nu se poate defini dimensiunea topologică, deci acele dimensiuni ale atractorilor haotici sînt numere neîntregi. De exemplu, atractorul straniu al lui Lorenz este o mulţime de puncte din $\mathbb{R}^3$ care seamănă cu o suprafaţă, dar care are o anumită grosime mică, dimensiunea sa Hausdorff fiind 2,06.

Faptul că un atractor este straniu rezultă din aceea că, cel mai mare exponent Liapunov $\lambda = \int_0^1 P(X)\left[\ln\left|\frac{dg}{dX}\right|\right]dX$, unde $P(X)$ este probabilitatea de a găsi o aplicaţie g în intervalul $(X, X + dX)$, este pozitiv. Pentru caracterizarea stocasticităţii atractorilor haotici cu ajutorul exponenţilor lui Liapunov recomandăm [14].

O proprietate importantă a atractorilor stranii este aceea că mişcarea asimptotică spre ei este haotică (aparent) şi sensibilă de punctul de plecare (data iniţială), această haoticitate (exprimată prin proprietăţile probabilistice menţionate) fiind intrinsecă, fără aport de zgomot. Atractorii stranii sînt structural stabili (adică orbitele lor nu sînt afectate semnificativ de mici perturbaţii). Posibilitatea apariţiei atractorilor stranii este importantă, deoarece prin aceasta, comportarea pe timp lung a soluţiilor este de natură aparent aleatoare, ceea ce nu este de aşteptat din punctul de vedere tradiţional al sistemelor dinamice. Această imprevizibilitate pe termen lung este o consecinţă a proprietăţii de hiperbolicitate a sistemului dinamic, deci de aplatisare a spaţiului fazelor în general în infinit de multe direcţii. De această proprietate este legată noţiunea de varietate inerţială.

MULŢIMI FRACTALE

Mulţimile fractale sau, pe scurt, *fractalii*, sînt mulţimi care nu pot fi caracterizate relevant de o dimensiune topologică a lor sau a oricărei părţi conexe a lor, ci de o dimensiune Hausdorff fracţionară. Ele sînt neobişnuite, parţial sau total discrete, pot fi sub formă de curbe dense, suprafeţe subţiri, pot avea arie nulă dar conţin linii în orice direcţie şi multe alte ciudăţenii. Cu toate acestea ele sînt întîlnite peste tot, formează regula şi nu excepţia. Neregularitatea lor caracteristică îndepărtează de ele pe cel obişnuit cu simetriile şi formele simple ale geometriei euclidiene : punct, dreaptă, plan, spaţiu euclidian. Noţiunea de fractal a fost introdusă în 1975 de B. Mandelbrot drept mulţime care are dimensiunea Hausdorff mai mare ca dimensiunea topologică (a oricărei părţi conexe) a sa. Cei mai mulţi fractali nu sînt varietăţi. Cel mai simplu fractal este mulţimea triadică a lui Cantor. Alte exemple : prafurile dense, traiectoriile browniene, coastele mărilor şi oceanelor, crestele munţilor, frontierele bazinelor de atracţie ale anumitor aplicaţii. Unele mulţimi fractale sînt autosimilare

(asemenea cu părți ale lor); fractalii autosimilari pot fi generați iterativ. Deoarece, atractorii stranii cunoscuți nu sînt varietăți și posedă dimensiune Hausdorff fracționară, ei sînt fractali, de aceea atractorii haotici se mai numesc și atractori fractali.

SCENARII DE TURBULENȚĂ

În experimentele numerice și în multe studii teoretice au fost puse în evidență drumuri tipice de trecere spre turbulență cînd parametrul λ al sistemului dinamic crește. De obicei în orice evoluție se întîlnesc mai multe astfel de scenarii.

Scenariul lui Landau și Hopf (L—H) de bifurcații statice repetate (fig. 5): există un număr infinit de puncte de bifurcație ale mulțimii soluțiilor unei probleme staționare, în fiecare astfel de puncte apărînd noi

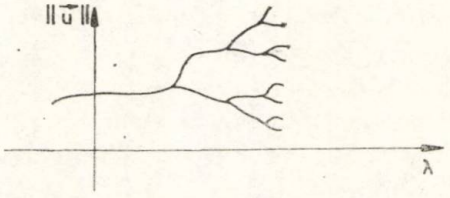


Fig. 5

soluții liniar stabile pe seama destabilizării soluțiilor din care au provenit. La turbulență se ajunge cu o mișcare cvaziperiodică. În particular, acest scenariu este observat în mișcarea Couette și în convecțiile termice. Acest scenariu a fost sugerat de modelul lui Burgers [15], apărînd și în [16].

Scenariul lui Ruelle și Takens (R—T): trecerea spre turbulență implică numai trei bifurcații. După prima apare o orbită periodică printr-o bifurcație Hopf, după cea de a doua apare o orbită cvaziperiodică (tor), iar după cea de a treia apare un atractor haotic. La fiecare bifurcație are loc și o pierdere de stabilitate [17]. Experimental acest scenariu a fost pus în evidență în particular în mișcarea lui Couette. Acest scenariu a fost găsit prin experimente numerice, încă nefundamentate, asupra sistemului dinamic tridimensional al lui Lorenz. Remarcăm numărul finit de bifurcații necesare pentru turbulentizarea (haoticizarea) orbitelor sistemului dinamic prevăzut de acest scenariu.

Dintre inconvenientele scenariului L—H semnalăm: conduce la o statistică gaussiană care nu se observă în realitate; complexitatea dinamicii este gradată spre deosebire de observația experimentală că turbulența apare la un anumit număr Reynolds bine definit; starea turbulentă prezisă de acest scenariu nu depinde sensibil de datele inițiale, contrar observațiilor. Se constată prin comparație că aceste neajunsuri sînt înlăturate de scenariul R—T. Conform acestui scenariu, trecerea spre turbulență se face prin mișcări aperiodice (atractorii) ce posedă anumite proprietăți statistice. Scenariile L—H și R—T se referă la sisteme dinamice continue.

ÎN DEZBATERE O NOUĂ TEORIE A GRAVITAȚIEI

de C. I. BORȘ

Universitatea „Al. I. Cuza", Iași

Sub acest titlu, am citit în săptămînalul „Flacăra" din 30 septembrie 1988 un grupaj de articole, toate concurînd către o prezentare extrem de elogioasă a monografiei „Gravitația", elaborată de dr. Ioan N. Popescu și tipărită de Editura Științifică și Enciclopedică în anul 1982.

În acel material, printre altele, s-a menționat o carte care citează monografia respectivă de 180 ori, dar s-a apreciat că această lucrare ar trebui să rețină într-o măsură mai mare atenția specialiștilor; s-a lansat chiar ideea că ea merită să fie propusă pentru un mare premiu.

În cele ce urmează, îmi voi spune și eu părerea cu privire la această carte. Se știe de multă vreme, chiar de la Newton, că modelul sistemului solar, folosit de Newton, este un model simplificat.

Autorul „Gravitației" își propune să elaboreze, pentru sistemul solar, un model mai complex. El renunță, de exemplu, la spațiul interplanetar vid, ajungînd la un „nou model" pe care l-a numit gravitovortex. O astfel de tentativă este lăudabilă, și dacă ar fi corect elaborată, ea ar putea să ducă la noi rezultate care să motiveze unele fenomene observate dar care nu au încă o explicație în cadrul mecanicii newtoniene, și, de ce nu, la descoperirea unor noi fenomene.

După părerea mea, modul în care autorul a abordat problema propusă, este departe de a fi satisfăcător. De aceea, găsesc nimerit să atrag atenția asupra faptului că în această carte, autorul face unele confuzii. Mă voi limita la a semnala unele din ele.

Pentru aceasta, voi expune într-o primă parte, notată (I), unele rezultate din mecanica newtoniană cu ajutorul cărora se va comenta, într-o a doua parte, notată (II), unele pasaje extrase din „Gravitația".

I. UNELE REZULTATE DIN MECANICA NEWTONIANĂ

Înainte de a ne ocupa de gravitovortex, vom expune, pe scurt, acele rezultate din mecanica newtoniană care vor interveni frecvent în discutarea unor puncte de vedere din „Gravitația".

Ecuația de mișcare a unei particule materiale de masă m și asupra căreia acționează forța $\bar{F}$, față de un reper inerțial, este dată de

$$m\ddot{\bar{r}} = \bar{F}, \tag{1}$$

unde $\bar{r}$ este poziția particulei în raport cu originea O a reperului inerțial față de care studiem mișcarea, iar $\ddot{\bar{r}} = d^2\bar{r}/dt^2$ este accelerația particulei.

Ecuația de mișcare a particulei va fi aceeași, față de orice reper care se găsește în mișcare rectilinie și uniformă față de reperul cu originea în O. Ecuația de mișcare (1) este valabilă numai în repere inerțiale, deoa-

ST. CERC. MEC. APL., TOM 49, NR. 4, 1990, P. 429—444

Făcînd calculele, pentru mișcarea particulei P pe raza vectoare, se obține

$$m\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} = -G\frac{m(m+M)}{r^2} + \frac{C^2m}{r^3}. \tag{10}$$

În cele de mai sus, s-a ținut seama de faptul că $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$, de unde s-a obținut integrala primă a ariilor

$$r^2\dot{\theta} = C \text{ (const.)}. \tag{11}$$

Termenul ultim care a apărut în ecuația (10) poartă numele de forță centrifugă. Apariția forței centrifuge nu are nimic misterios, totul decurgînd din logica interioară a mecanicii newtoniene.

Dacă am considera că punctul S este fix, atunci ecuația (10) devine :

$$m\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{GMm}{r^2} + \frac{C^2m}{r^3}. \tag{12}$$

Înmulțind ecuația (12) cu $\mathrm{d}r$ și avînd în vedere că $\mathrm{d}r = \dot{r}\,\mathrm{d}t$, putem scrie

$$\mathrm{d}\left(\frac{\dot{r}^2}{2}\right) = -\frac{GM}{r^2}\mathrm{d}r + \frac{C^2}{r^3}\mathrm{d}r,$$

de unde obținem

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 = -\frac{C^2}{2}\frac{1}{r^2} + GM\frac{1}{r} + h, \tag{13}$$

care este integrala primă a energiei ; h este o constantă ce se determină din datele inițiale. Rădăcinile ecuației

$$-\frac{C^2}{2}\frac{1}{r^2} + GM\frac{1}{r} + h = 0 \tag{14}$$

se pot pune sub forma

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{a(1+e)}, \quad \frac{1}{r_2} = \frac{1}{a(1-e)}$$

și se poate arăta că, în cazul cînd traiectoria este o elipsă, a reprezintă semiaxa mare, iar e excentricitatea. Folosind ecuația (14), avem

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{2}{a(1-e^2)} = \frac{2GM}{C^2},$$

de unde obținem

$$C^2 = GMa(1-e^2). \tag{15}$$

Dacă traiectoria este un cerc $e = 0$, $a = r$, și (15) devine

$$C^2 = GMr. \tag{16}$$

II. UNELE REZULTATE DIN „GRAVITAȚIA"

În cele ce urmează, din cartea în discuție, vom extrage cîteva pasaje și unele formule pe care vom încerca să le comentăm. Formulele extrase vor păstra numerotația din original, scrisă în partea din dreapta. Trimiterile la formule care au între paranteze un singur număr înseamnă trimiteri la formule din partea I, iar trimiterile la formule cu două numere între paranteze, înseamnă trimiteri la formule din carte, unele din ele putînd fi printre cele ce sînt în pasajele extrase. Citatele din carte sînt subliniate.

a. *Forța centrifugă.* La pagina 36, pe o altă cale decît cea expusă mai sus, se ajunge la ecuația

$$m\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{mk}{r^2} + \frac{mC^2}{r^3} \tag{2.55}$$

care descrie mișcarea lui P pe raza vectoare și care coincide cu (12). În legătură cu ea, se fac următoarele comentarii:

„*Comparînd acum această expresie a ecuației mișcării într-un cîmp de forțe centrale cu ecuația generală a mișcării* $ma = F$, *constatăm cu surprindere că, de fapt, în ecuația mișcării planetelor, conform teoriei newtoniene, pe lîngă forța gravitațională* F_N, *descoperită și clarificată de Newton și care variază invers proporțional cu pătratul distanței, figurează și o altă forță* F_C

$$ma_r = m\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} = F_N + F_C \tag{2.26}$$

care variază invers proporțional cu cubul distanței și despre care teoria newtoniană a gravitației nu ne-a spus absolut nimic! Ce fel de forță poate fi aceasta? ..."

Tot în legătură cu forța centrifugă, drept concluzie a unor observații privind mișcările planetelor, la pagina 78 mai citim:

„*După cum se vede, forța centrifugă este relevată doar de experiență și de interpretarea conform legilor mecanicii a mișcării planetare date, dar nu are o explicație coerentă în teoria gravitației a lui Newton, care se mulțumește să o încorporeze ca pe un fait accommpli al naturii*".

Dacă urmărim modul în care a fost dedusă ecuația (10) și, în particular (12), se vede că forța centrifugă are o explicație coerentă în cadrul mecanicii newtoniene.

În mecanica newtoniană, teoria gravitației descrie un anumit tip de forțe de interacțiune dintre particulele unui sistem dat. Forțele centrifuge apar în sistem datorită faptului că reperul, față de care îi studiem mișcarea, nu este inerțial; ele nu sînt forțe de interacțiune, adică nu sînt

ția newtoniană și forța de transport. Nu se poate spune că ea descrie interacțiunea dintre cele două corpuri deoarece dacă am studia mișcarea lui S în jurul lui P forța care ar acționa asupra lui S ar fi $G\frac{M+m}{r^2}M\frac{\bar{r}}{r}$ și cele două forțe nu satisfac principiul acțiunii și reacțiunii. Interacțiunea dintre cele două particule este descrisă de o parte a forței (3.12) anume de componenta atracției universale $G\frac{Mm}{r^2}\frac{\bar{r}}{r}$. Și în calculele făcute în carte, interacțiunea dintre cele două particule materiale a fost descrisă tot timpul de legea lui Newton, după cum se poate vedea din ecuațiile (3.3) și (3.4). Simple calcule, fără a se adăuga ipoteze noi, nu ne pot scoate în afara modelului pe care l-am adoptat.

d. *Legea atracției universale și reperele inerțiale.* În numeroase locuri, se afirmă că legea lui Newton este valabilă numai în repere inerțiale, iar mecanica newtoniană este valabilă în orice reper (v. de ex. pag. 77). Lucrurile stau tocmai invers. În legea atracției universale forța este invers proporțională cu pătratul distanței r dintre cele două particule materiale și, după cum se știe, distanța este aceeași în orice reper.

Legea fundamentală a dinamicii ne dă ecuația de mișcare a unei particule materiale stabilind o legătură între accelerație, masă și forța care acționează asupra particulei. O astfel de legătură va fi valabilă numai în anumite repere privilegiate (repere inerțiale) deoarece accelerația depinde de reper. Putem scrie, pentru o particulă materială și ecuații de mișcare față de orice reper cu condiția să adăugăm, la forța care acționează asupra particulei și așa-zisele forțe complementare.

e. *Din nou-despre forța centrifugă și despre o greșeală a lui Newton.* La pagina 311 citim :

„*Considerînd mai departe mișcarea circulară în largul cîmpului interplanetar al Soarelui, observăm că forța centripetă variază (ca și forța centrifugă de altfel), invers proporțional cu cubul distanței*

$$F_C = \frac{mv^2}{r} = \frac{mr^2v^2}{r^3} = \frac{mC^2}{r^3} = \frac{Const}{r^3}, \tag{8.72}$$

unde C reprezintă constanta ariilor. Identificînd în acest cîmp forța centripetă (k_1/r^3) cu forța gravitațională (k_2/r^2) Newton scrie, de fapt,

$$\frac{k_1}{r^3} = \frac{k_2}{r^2} \tag{8.73}$$

ceea ce nu poate fi adevărat decît pentru

$$r = \frac{k_1}{k_2} = \text{const.} \tag{8.74}$$

Mai concret, considerînd forța centrală-gravitovortex ca fiind identică cu forța centripetă, relația (8.71) *devine*

$$F_V = -\frac{m\rho\Gamma^2}{4\pi^2\rho' r^3} = -\frac{m\theta_s}{r^3} = \frac{GMm}{r^2} = F_N, \tag{8.75}$$

de unde ar rezulta

$$\theta_s = GMr = \text{const} = C^2. \tag{8.76}$$

Într-adevăr, teoria newtoniană preia exact relația (8.76) *pentru mișcarea circulară pe care o extinde și la cea eliptică sub forma cunoscută*

$$C^2 = GMa(1 - e^2) = \text{const}. \tag{8.77}$$

. . . . . .

Drept concluzie, autorul spune :

„Este oare posibil să fi făcut Newton o greșeală atît de gravă încît să identifice o forță F_V, care variază invers proporțional cu cubul distanței cu o forță F_N, care variază invers proporțional cu pătratul distanței. Din cele spuse mai sus aceasta pare a fi situația".

Mai întîi, nu poate fi vorba de o identificare dintre două forțe care au expresii matematice diferite (și Newton nici nu face o astfel de identificare). Explicația acestei neînțelegeri este destul de simplă. Planeta, într-o mișcare circulară în jurul Soarelui, este în echilibru relativ pe raza vectoare deoarece $\ddot{r} = 0$ în acest caz. Cînd Soarele este presupus fix se folosește ecuația (12) și condiția de echilibru ne dă

$$-G\frac{mM}{r^2} + m\frac{C^2}{r^3} = 0,$$

de unde obținem (8.76), pentru care „Newton" nu a făcut o greșeală identificînd nepermis cele două forțe, ci a „scris" corect o condiție de echilibru. Cît privește ecuația (8.77), ea nu este o extindere prin analogie a cazului circular la cazul eliptic, întrucît, așa cum am văzut, ea se poate demonstra (a se vedea (15) și (16)).

Dacă cercetăm cartea lui Newton, ne putem da seama lesne că acea „greșeală" ce i se atribuie provine dintr-o neînțelegere de limbaj. Newton prin forță centripetă înțelegerea chiar forța pe care el a numit-o gravitație ; astăzi, prin forță centripetă înțelegem cu totul altceva. Acest lucru reiese limpede chiar din textul extras de autor din opera lui Newton. Astfel, la pagina 31, citim :

„La acest stadiu al demonstrației sale, Newton scrie în scolia propoziției a V-a, teorema a V-a : „Pînă acum am numit forță centripetă, forța cu care corpurile cerești sînt menținute pe orbitele lor. Dar constatăm că ea este aceeași cu gravitația și, de aceea, de acum înainte, o vom numi gravitație". Această generalizare permite să explicităm . . ."

Citatul respectiv din Newton este reprodus și la pagina 309, cu comentarii suplimentare (a se vedea și pagina 423).

Textul reprodus din Newton este deosebit de clar, și, totuși, autorul nu a scăpat de confuzia în care a căzut și care l-a făcut să mai scrie (v. pag. 309) :

Pentru a obține această corecție, care rezultă natural în gravitovortex, Newton a fost obligat să inventeze cunoscutul său artificiu matematic (§3.1) *al mișcării în jurul „punctului fix în univers"...*"

să analizăm acum textul citat.

Se știe că potențialul newtonian creat de o masă distribuită, verifică, în interiorul domeniului ocupat de masa atractivă, ecuația lui Poisson-Laplace, care, în cazuri particulare, se reduce la (8.109) (acest lucru este semnalat și în carte în §2.4); deoarece se face apel la ecuația lui Poisson-Laplace rezultă că potențialul U dat de (8.110) ar trebui considerat în punctele din interiorul masei atractive. Dar cine este această masă atractivă? Prima parte $\frac{GM}{r}$ a potențialului U este o funcție armonică și ea corespunde unei particule materiale de masă M plasată în origine. Densitatea ρ din membrul al doilea este, deci, legată de cel de al doilea termen al potențialului U; este oare ρ densitatea pulberii interplanetare?

Dar potențialul (8.110) nu este newtonian căci, după cum se vede din (8.112), el nu verifică ecuația lui Poisson-Laplace.

Ținînd seama de definiția (8.84) a lui f, se va transcrie, în final ecuația (8.112) (care nu este adevărată) sub forma (8.114); uitîndu-se că f era deja precizat, se ia (8.114) drept ecuație de definiție a lui f și se găsește expresia (8.115). Pentru că la numărătorul unui termen din (8.115) apare o expresie ce sugerează masa unei sfere, se trage concluzia că, dacă r crește la infinit, acolo va fi masa Universului și se găsește pentru f formula (8.116). Să nu uităm că nu am putut preciza cine este ρ. Apoi, trebuie observat că ipoteza unui univers de masă finită nu este compatibilă cu ipoteza că această masă ar fi repartizată uniform în tot spațiul; in felul cum s-au făcut calculele se vede însă că ρ a fost considerat constant. Apoi, dacă la infinit $\frac{4\pi}{3}\rho r^3$ coincide cu M_0 rezultă că f dat de (8.115) este negativ pentru orice r, calitate pe care nu o avea cînd era dat de (8.84). Fără discuție, pe nesimțite, s-a alunecat către un alt model.

Mai departe, apare și o planetă de masă m. În final, f devine de data aceasta, pur și simplu o constantă și se regăsește „corecția" pe care Newton ar fi făcut-o legii atracției universale; dar, inițial, gravitovortexul pretinde că completează tocmai acel rezultat găsit de Newton.

Peripețiile acestui misterios f nu s-au epuizat. Vom mai semnala încă una din ele.

La pagina 328, citim:

„*Dacă dorim să luăm ca referință viteza luminii, atunci din* (8.95) *rezultă* $f = v^2/c^2$.

. . . . . .

Cel mai simplu este să regăsim în gravitovortex legea relativistă de variație a masei cu viteza. ...

Această lege rezultă direct din (8.116) *dacă ținem cont de* (8.95),

$$\frac{\frac{4\pi}{3}\rho r^3}{M_0} = \frac{M_0}{M} = 1 + f = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \sim \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{8.125}$$

de unde

$$M = \frac{M_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{8.126}$$

Din această relație rezultă că ..."

Formula (8.95) ne spune că $f = v^2/c^2$ așa că în (8.125) este și o greșeală de calcul(s-a introdus fctorul $\frac{1}{2}$). Tipic pentru expunerile din „Gravitația" sînt analogiile forțate : rezultate care sînt valabile într-o anumită problemă sub anumite ipoteze se extind la cazuri cînd ipotezele respective nu se mai realizează.

Un exemplu pentru cele menționate este și acest ultim citat.

Dacă formula (8.126) ar fi cea corespunzătoare din teoria relativității, atunci M_0 și M ar reprezenta masa de mișcare și masa de repaus ale acelеiași particule. În ecuația (8.116), din care s-a dedus (8.126), nu poate fi vorba de așa ceva.

g. *Mișcarea cu expansiune-contracție.* În §9.4, se expun mai întîi unele rezultate cunoscute ale mecanicii, din care extragem de la pagina 392, textul ce urmează :

„*Să considerăm, conform cu exemplu de mai sus, două funcții Lagrange,* $L(q, \dot{q}, t)$ *și* $L'(q, \dot{q}, t)$, *care diferă între ele printr-o funcție oarecare de coordonate* (q) *și de tip* (t), $\psi(q, t)$

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \psi(q, t). \tag{9.87}$$

Acțiunile S *și* S' *corespunzătoare funcțiilor* L *și* L', *respectiv integralele* (9.63), *calculate cu ajutorul celor două funcții, sînt legate prin relația*

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L'(q, \dot{q}, t)\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \psi\,(q, t)\mathrm{d}t = S + \int_{t_1}^{t_2} \psi(q, t)\mathrm{d}t. \tag{9.98}$$

Se vede ușor din această relație că dacă funcția $\psi(q, t)$ *este derivata totală în raport cu timpul a unei funcții oarecare de coordonate și timp*

$$\psi(q, t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(q, t), \tag{9.89}$$

Este într-adevăr remarcabil să constatăm, conform celor mai noi rezultate de specialitate, că densitatea nulceului central al pămîntului este și astăzi $\rho \sim 17\ g \cdot \mathrm{cm}^{-3}$.

. . . . . .

Să calculăm acum dimensiunea acestui Pămînt aflat în poziția heliocentrică inițială r_0. *Din* (12.4) *rezultă*

$$R_0 = R \sqrt[3]{\frac{\rho}{\rho_0}} = R \sqrt[3]{\frac{5{,}52}{17}} \sim 0{,}686\ R \tag{12.16}$$

sau

$$R_0 = 6376 \times 0{,}686 \sim 4400\ \mathrm{km}. \tag{12.17}$$

Regăsim deci prin calcul o valoare aproape perfect egală cu cea dedusă din date de observație în reconstituirile lui..."

După cum am văzut, mai înainte, formula (12.10) nu a fost demonstrată. Nu vom ține seama de faptul dacă unele din formulele folosite sînt corecte sau nu, ci vom urmări doar unele confuzii ce se fac de la un rînd la altul.

În ecuația (12.9) și în (12.11), r și ρ trebuie considerăți la același moment și dacă aceste ecuații sînt concomitent adevărate rezultă $r =$ const, $\rho =$ const și nu avem expansiune-contracție.

Ecuația (12.14) nu este corect scrisă, deoarece r_0 este socotit la momentul „inițial", iar ρ la momentul actual. Urmează că și rezultatele din (12.15) și (12.17) sînt puse sub semnul întrebării.

Lista rezultatelor de felul celor semnalate poate fi încă completată. Aș semnala doar faptul că pe ici pe colo se mai împart și vectorii (v. pag. 637). Atenție la ecuațiile (9.35), (9.38), respectiv ecuațiile (11.20), (11.22), care au consecințe nedorite; și mai sînt și cele 11 secunde/secol. de la pag. 343; etc. etc.

Primit în redacție la 29 iunie 1989

W. FRESENIUS, W. SCHNEIDER, B. BÖHNKE, K. PÖPPINGHAUS (sub red.), *Waste Water Technology. Origin, Collection, Treatment and Analysis of Waste Water* (Tehnologia apei uzate — proveniența, transportul, epurarea și analizele apei uzate), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1989, 1182 p., 301 fig.

Publicația se adresează specialiștilor care lucrează în domeniul canalizării și epurării apelor uzate orășenești și industriale. Sînt abordate probleme practice care servesc activităților de proiectare, execuție și exploatare a sistemelor de canalizare. Volumul este structurat pe zece capitole. Primele trei capitole privesc clasificarea, compozițiile și bazele calculului debitelor de ape uzate menajere orășenești, ape meteorice și ape industriale. Pentru specialiștii preocupați de problemele reducerii consumurilor de apă prin refolosire este interesant de semnalat că în publicație sînt incluse liste cuprinzînd caracteristici de calitate și norme specifice de cantități de apă uzată pentru o largă varietate de unități administrative, sociale, industriale și agricole; la unitățile industriale cantitățile specifice de apă pe unitatea de produs, precum și indicatorii de calitate, sînt prezentați pe procese componente ale tehnologiilor de producție aplicate. De asemenea, sînt evidențiate problemele specifice sistemelor de canalizare din zonele rurale.

Capitolul următor constituie un îndrumar de proiectare a sistemelor de canalizare, incluzînd și elemente de execuție și exploatare a construcțiilor și instalațiilor din rețelele de canalizare.

Capitolele cinci și șase se referă la condițiile de calitate pe care trebuie sl le îndeplinească apele uzate în vederea descărcării în rețelele publice de canalizare, sau în mediul natural, precum și la metodele de epuizare a apelor uzate și de tratare a nămolurilor în vederea depozitării, sau valorificării. Sînt trecute în revistă tehnologiile de epurare care se aplică pentru apele uzate provenite de la majoritatea unităților industriale.

Este interesant de urmărit modul de abordare a problemelor de valorificare a apelor uzate și nămolurilor în agricultură. În baza concluziilor reieșite din cercetările efectuate în unele țări, spre exemplu, în R.F. Germania, în anul 1981 au apărut reglementări în ceea ce privește conținutul în metale grele al nămolurilor care ar urma să fie folosite în agricultură: plumb 600 mg/kg; cadmiu — 10 mg/kg; crom — 600 mg/kg; cupru — 80 mg/kg; nichel — 100 mg/kg; mercur — 10 mg/kg; zinc — 200 mg/kg. În țara noastră cercetările în acest domeniu sînt în curs de desfășurare.

Capitolul șapte al lucrării se referă la metodele de prelevare și analizare a caracteristicilor apelor uzate și nămolurilor. Unele teste, deocamdată, nu se aplică la noi în țară, iar prezentarea detaliată a procedurilor ar putea constitui surse de inspirație pentru specialiștii care lucrează în acest domeniu.

Spre exemplu, testul piscicol servește la determinarea efectelor toxice ale unor anumite ape uzate care sînt descărcate în emisari și la obținerea factorului de diluție necesar (cea mai mică valoare a raportului dintre volumul apă uzată plus apa de referință și volumul de apă uzată, în care toate exemplarele de pești folosiți în test supraviețuiesc).

În partea finală a lucrării (capitolele 8—10) se prezintă referințele bibliografice (195), un index alfabetic, tematic și o anexă care cuprinde textele documentațiilor întocmite de către Organizația Mondială a Sănătății și Ministerul Cooperării Economice din RFG, în cadrul programului Deceniului Internațional al Apei.

În concluzie, această carte constituie un manual — „Instrument practic pentru inginerii care lucrează în domeniul hidrotehnicii edilitare și în același timp, idei noi care pot reprezenta surse de inspirație pentru specialiști.

+ 2557 ty

ACADEMIA ROMÂNĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

5—6

TOMUL 49

septembrie — decembrie

1990

1991 -06- 14

EDITURA ACADEMIEI ROMÂNE

CONSILIUL DE CONDUCERE

Acad. IOAN ANTON, *redactor şef*

Membri :

Acad. ŞTEFAN BĂLAN
Acad. CAIUS IACOB
Acad. DAN MATEESCU
Acad. RADU VOINEA
Acad. GHEORGHE BUZDUGAN
Acad. NICOLAE PATRAULEA
Prof. RADU C. BOGDAN
Prof. VIRGILIU N. CONSTANTINESCU
Prof. NICOLAE CRISTESCU
Prof. TRAIAN DEMIAN
Prof. LAZĂR DRAGOŞ
Prof. CONSTANTIN IAMANDI
Prof. DUMITRU MANGERON
Dr. ing. DAN PANTAZOPOL
Prof. DAN PAVELESCU
Prof. CRISTIAN PELECUDI
Dr. ing. MIRCEA RADEŞ
Prof. GHEORGHE SILAŞ
Dr. doc. VIOREL VISARION

Prof. TEODOR OROVEANU, *secretar de redacţie*

COLEGIUL DE REDACŢIE

Acad. IOAN ANTON, *redactor şef*

Membri :

Acad. ŞTEFAN BĂLAN
Prof. TRAIAN DEMIAN
Dr. ing. DAN PANTAZOPOL

Prof. TEODOR OROVEANU, *secretar de redacţie*

Toate comenzile externe pentru lucrările apărute în Editura Academiei Române se vor adresa la : ROMPRESFILATELIA, sectorul export-import presă, P. O. Box 12 — 201, telex : 10376 prsfi r, Calea Griviţei nr. 64 — 66, 78104 Bucureşti, România ; în ţară, abonamentele se primesc la oficiile poştale.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice corespondenţă se trimit pe adresa Colegiului de redacţie al revistei, 79717 Bucureşti 22, Calea Victoriei 125.

EDITURA ACADEMIEI ROMÂNE
79717 Bucureşti 22, Calea Victoriei 125, sectorul 1

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 49, nr. 5—6 septembrie — decembrie 1990

SUMAR

W. KECS şi W. W. KECS, Aplicaţii ale algebrei cîturilor de convoluţie în vîscoelasticitate 449

C. BERBENTE şi P. CIZMAŞ, O extindere a utilizării transformării conforme a reţelelor de plăci plane la reţele de formă dată 467

GH. CREMENESCU şi I. DUMITRESCU, Modelarea adaptivă asistată de calculator a avansului sapei de foraj 477

M. POPESCU şi P. VLASE, Studiul hidraulic experimental al unui nou tip de clapet antiretur 489

Al. D. STAN, Corecţia debitului de gaze aparente la o înregistrare în bandă a parametrilor 493

I. M. CIORNEI, Optimizarea variatoarelor sferice din punct de vedere al spinului. . . . 509

G. ONU, Referitor la o propunere pentru calculul tablierelor de pod 519

INDEX ALFABETIC 529

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Articolele, originale și de înalt nivel științific, vor fi redactate într-un stil concis, evitîndu-se introducerile foarte lungi. Articolele vor fi dactilografiate la două rînduri, pe hîrtie albă de bună calitate, în două exemplare. Prima pagină trebuie să conțină titlul lucrării, numele autorului (autorilor) și locul de muncă precum și un rezumat de cel mult 150 cuvinte. Toate datele științifice și tehnice prezentate trebuie formulate în unități SI. Formulele trebuie dactilografiate sau scrise cu cerneală, clar și indicîndu-se caracterul literelor (aldine, italice etc.). Indicii inferiori și superiori trebuie indicați clar, pentru evitarea confuziilor. Ca semn zecimal se va utiliza virgula. Tabelele vor fi dactilografiate pe foi separate, cu indicarea titlurilor și cu numerotarea în cifre arabe. Desenele și diagramele trebuie executate în tuș, pe hîrtie de calc, la dimensiuni aproximativ duble față de acelea finale și cu litere scrise cu îngrijire și suficient de mari pentru a fi vizibile după reproducere. Referințele bibliografice vor fi menționate, pe cît posibil, în ordine alfabetică, la sfîrșitul articolului. În text vor fi indicate prin numărul din lista referințelor, în paranteze drepte.

Referințele din reviste vor conține inițiala și numele autorului (autorilor), titlul articolului (subliniat cu o linie), numele revistei (prescurtat conform uzanțelor internaționale), numărul volumului (subliniat dublu), numărul fasciculei și anul de apariție în paranteză, de exemplu :

1. S. AIZICOVICI, C. FETECĂU, Existence of Couette flows in second grade fluids Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., 31, 5 (1986).

Referirea la o carte se face indicînd inițiala și numele autorului (autorilor), titlul cărții (subliniat cu o linie), editura, orașul, anul apariției și numerele paginilor, dacă referirea se face la o parte a cărții, de exemplu :

3. W. FLÜGGE, Tensor Analysis and Continuum Mechanics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1972, p. 93—99.

Manuscrisele vor fi trimise la adresa : 79717 București 22, Calea Victoriei 125.

APLICAȚII ALE ALGEBREI CÎTURILOR DE CONVOLUȚIE ÎN VÎSCOELASTICITATE

de W. KECS

Institutul de Mine Petroșani

W. W. KECS

Centrul de Calcul Petroșani

În această lucrare autorii urmînd metodologia lui J. Mikusiński, elaborează bazele algebrei cîturilor de convoluție Q'_+, unde $\frac{a}{b} \in Q'_+$; $a, b \in \mathscr{D}'_+$ și pe baza proprietăților ei se arată forma operațională de aplicare a principiului corespondenței la rezolvarea problemelor vîscoelasticității. Se stabilește o teoremă cu ajutorul căreia se dă soluția unei clase de probleme din vîscoelasticitate, exemplificîndu-se în cazul spațiului și semispațiului vîscoelastic acționat de o sarcină concentrată și încovoierea unei bare vîscoelastice acționată la capete de cupluri variabile.

1. INTRODUCERE

Între metodele de rezolvare a problemelor vîscoelasticității principiul corespondenței enunțat de T. Alfrei și E. H. Lee [9] ocupă un loc central. Aceasta reprezintă o metodă indirectă de rezolvare a problemelor vîscoelasticității deoarece se bazează pe cunoașterea soluției unei probleme corespondente din elastodinamică [6], [12]. Aplicarea acestui principiu se realizează prin utilizarea transformatei Laplace sau Fourier care impune o serie de restricții și conduce implicit la limitarea clasei în care se caută soluția problemei abordate. Lărgirea cadrului de aplicabilitate a principiului corespondenței se obține prin utilizarea calculului operațional bazat pe algebra cîturilor de convoluție Q'_+.

2. ALGEBRA CÎTURILOR DE CONVOLUȚIE Q'_+

Fie $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ spațiul lui Schwartz al funcțiilor indefinit variabile și cu suport compact, iar $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ spațiul distribuțiilor corespunzătoare. Vom nota cu $\mathscr{D}'_+$ subspațiul distribuțiilor din $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ avînd suporturile în $[0, \infty)$.

Fie $f, g \in \mathscr{D}'_+$. Atunci distribuția $h = f * g \in \mathscr{D}'_+$ definită prin relația :

$$(h(t), \varphi(t)) = ((f * g)(t), \varphi(t)) = (f(t), (g(y), \varphi(t + y))), \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) \quad (2.1)$$

reprezintă produsul de convoluție al distribuției f prin g.

Spațiul vectorial $\mathscr{D}'_+$ în raport cu produsul de convoluție definit prin (2.1) formează o algebră comutativă fără divizori ai lui zero, numită algebra de convoluție $\mathscr{D}'_+$.

Elementul unitate în algebra de convoluție $\mathscr{D}'_+$ este distribuția lui Dirac $\delta(t) \in \mathscr{D}'_+$.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 49, NR. 5–6, 1990, P. 449–466

Fie ecuaţia de convoluţie în $\mathscr{D}'_+$:

$$f * X = g,\ f, g, X \in \mathscr{D}'_+ \tag{2.2}$$

Definiţia 1. Numim soluţie fundamentală corespunzătoare ecuaţiei (2.2) distribuţia $E \in \mathscr{D}'_+$ avînd proprietatea $f * E = \delta(t)$.

Definiţia 2. Spunem că distribuţia $f \in \mathscr{D}'_+$ este inversabilă în algebra de convoluţie $\mathscr{D}'_+$, dacă există distribuţia $g = f^{-1} \in \mathscr{D}'_+$ cu proprietatea $g * f = \delta(t) \Leftrightarrow g = f^{-1}$.

De aici rezultă că inversa $f^{-1} \in \mathscr{D}'_+$ a elementului $f \in \mathscr{D}'_+$ reprezintă o soluţie fundamentală a ecuaţiei (2.2). Reciproca în general nu este adevărată.

Fie $h \in \mathscr{D}'_+$ distribuţia lui Heaviside :

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Atunci $h^{-1} = \delta'(t) \in \mathscr{D}'_+$ deoarece $h * \delta' = (h * \delta)' = h' = \delta(t)$.

Ţinînd seamă de [5] p.2.12 putem enunţa :

Propoziţia 1. *Fie $f, g, X \in \mathscr{D}'_+$ şi f inversabilă în $\mathscr{D}'_+$. Atunci inversa $f^{-1} \in \mathscr{D}'_+$ este unică, reprezintă soluţia fundamentală a ecuaţiei $f * X = g$ şi această ecuaţie are o singură soluţie : $X = f^{-1} * g$.*

Propoziţia 2. *Fie $f, g \in \mathscr{D}'_+$. Dacă f şi g sînt inversabile în $\mathscr{D}'_+$ atunci $f * g$ este inversabilă în $\mathscr{D}'_+$ şi avem : $(f * g)^{-1} = f^{-1} * g^{-1}$.*

Ecuaţia de convoluţie :

$$f * X = g\ ;\quad f,\ g,\ X \in \mathscr{D}'_+$$

se va scrie şi sub formele :

$$f \cdot X = g \Leftrightarrow \{f(t)\}\,\{X(t)\} = \{g(t)\} \tag{2.4}$$

Dacă $f \neq 0$ atunci deoarece algebra de convoluţie $\mathscr{D}'_+$ nu are divizori ai lui zero, rezultă că ecuaţia (2.4) dacă are soluţie, atunci această soluţie este unică.

Conform propoziţiei 2 dacă $\exists\, f^{-1} \in \mathscr{D}'_+$ atunci ecuaţia (2.4) are soluţie unică în $\mathscr{D}'_+$ anume $X = gf^{-1}$ care se va scrie şi sub forma :

$$X = \frac{g}{f} = gf^{-1} = f^{-1}g \tag{2.5}$$

şi se va numi cîtul de convoluţie al distribuţiilor g şi f din $\mathscr{D}'_+$.

Dacă ecuaţia (2.4) nu are soluţie în $\mathscr{D}'_+$ atunci expresia $\frac{g}{f}$ se va numi cît de convoluţie generalizat. În felul acesta putem spune că ecuaţia (2.4) are întotdeauna soluţie, fie în algebra $\mathscr{D}'_+$ fie soluţia generalizată.

Exemplu. Fie ecuaţia : $\{\delta(t-1)\}\,\{X(t)\} = \{\delta(t)\}$.

Sub formă operațională avem: $\{\delta(t-1)\}X = 1$, de unde $X = \dfrac{1}{\{\delta(t-1)\}}$.

Observăm că acest cît de convoluție nu aparține algebrei $\mathscr{D}'_+$ deoarece în $\mathscr{D}'_+$ ecuația este echivalentă cu $X(t) * \delta(t-1) = \delta(t)$ de unde $X(t-1) = \delta(t)$, adică $X(t) = \delta(t+1)$. Dar $\delta(t+1) \notin \mathscr{D}'_+$ pentru că $\operatorname{supp}\delta(t+1) = \{-1\}$. Deci $\dfrac{1}{\{\delta(t-1)\}}$ reprezintă un cît de convoluție generalizat.

Definiția 3. Numim cît de convoluție Q'_+ mulțimea perechilor ordonate $(a, b) = \dfrac{a}{b}$; $a, b \in \mathscr{D}'_+$, $b \neq 0$ care verifică următoarele axiome:

$$I_1) \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc (b, d \neq 0)$$

$$I_2) \quad \underset{\alpha \in \mathbb{C}}{\forall} \alpha \cdot \frac{a}{b} = \frac{\alpha a}{b}$$

$$I_3) \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$$

$$I_4) \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$I_5) \quad \frac{a}{b} \quad \frac{c}{c} = \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \; (c \neq 0)$$

Observăm că condiția I_1 reprezintă o relație de echivalență în mulțimea Q'_+ deoarece este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Cuplul $(a, b) = \dfrac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ este un reprezentant al clasei sale de echivalență. Elementul neutru față de operația de adunare definită de I_3 este elementul $\dfrac{0}{b}, b \neq 0$ și se va nota cu 0, deci $\dfrac{0}{b} = 0 (b \neq 0)$. Elementul unitate în raport cu operația de înmulțire I_4 este elementul $\dfrac{c}{c} (c \neq 0)$ și va fi notat cu 1.

Avem $\dfrac{c}{c} = \dfrac{b}{b} = 1$ $(c, b \neq 0)$. Elementul unitate 1 reprezintă distribuția lui Dirac $\{\delta(t)\}$ și aparține algebrei $\mathscr{D}'_+$. Putem deci scrie $1 = \dfrac{c}{c} = \{\delta(t)\}$, $c \neq 0$, $c \in \mathscr{D}'_+$. Conform terminologiei lui I. Mikusiński elementele lui Q'_+ adică cîturile de convoluție $\dfrac{a}{b}$ $(a, b \in \mathscr{D}'_+, b \neq 0)$ precum

și elementele $a, b \in \mathscr{D}'_+$ se numesc operatori. Evident $a, b \in \mathscr{D}'_+$ sînt cazuri particulare de operatori care se pot reprezenta sub forma : $a = a \cdot \frac{c}{c} = \frac{ac}{c}$ $(c \neq 0,\ c \in \mathscr{D}'_+)$.

Relațiile I_1, I_2, I_3 definite în mulțimea Q'_+ ne arată că acesta are o structură de spațiu vectorial peste corpul complecșilor $\mathbb{C}$. Operațiile I_4 și I_5 ne permit să verificăm că spațiul vectorial Q'_+ constituie o algebră comutativă cu element unitate.

Deoarece, orice element $\gamma \in Q'_+ (\gamma \neq 0)$ admite un invers, deci $\exists \gamma^{-1} \in Q'_+$ astfel încît $\gamma \cdot \gamma^{-1} = 1$ înseamnă că Q'_+ are o structură de corp comutativ în raport cu operația de adunare și produsul de convoluție.

Operatorul de derivare s. Considerăm operatorul de tip distribuție :

$$s = \{\delta'(t)\} \in \mathscr{D}'_+ \subset Q'_+, \text{ supp } \delta'(t) = \{0\} \text{ și fie } f \in \mathscr{D}'_+.$$

Avem :

$$sf = \{\delta'(t)\}\{f(t)\} = \{\delta'(t) * f(t)\} = \{f'(t)\} = f'.$$

Deci

$$sf = f',\ f \in \mathscr{D}'_+ \tag{2.6}$$

Datorită acestei proprietăți operatorul $s = \{\delta'(t)\} \in \mathscr{D}'_+ \subset Q'_+$ se va numi operatorul de derivare (în sensul distribuțiilor) în algebra cîturilor de convoluție Q'_+.

Din (2.6) rezultă :

$$s^n f = f^{(n)},\ f \in \mathscr{D}'_+ \subset Q'_+, n \in \mathbb{N}. \tag{2.7}$$

Fie $f, g \in \mathscr{D}'_+ \subset Q'_+$. Atunci avem :

$$s(fg) = \{\delta'(t) * (f(t) * g(t))\} = \{f'(t) * g(t)\} = \{f(t) * g'(t)\}$$

deci

$$s(fg) = f(sg) = g(sf). \tag{2.8}$$

Fie $f \in \mathscr{D}'_+$ o distribuție de tip funcție (Operator de tip distribuție) de clasa $C^1(\mathbb{R})$ cu excepția punctelor $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m$ unde are discontinuități de speța întîi cu salturile :

$$S_{t_i}(f) = f(t_i + 0) - f(t_i - 0),\quad i = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

În ipotezele considerate avem :

$$sf = \{f'(t)\} = \left\{ \tilde{f}'(t) + \sum_{i=0}^{m} S_{t_i}(f)\delta(t - t_i) \right\}$$

Dacă notăm cu $\tilde{s}$ operatorul de derivare în sens obișnuit atunci relația precedentă se poate scrie sub forma:

$$sf = \tilde{s}f + \sum_{i=0}^{m} S_{t_i}(f)\{\delta(t - t_i)\} \tag{2.9}$$

În particular, dacă f are doar originea punct de discontinuitate de speța întîi atunci obținem:

$$sf = \tilde{s}f + S_0(f) \tag{2.10}$$

Au loc formulele:

$$\frac{1}{(s-\alpha)^n} = \left\{h(t)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\alpha t}\right\},\ n = 1, 2, \ldots;\ \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\frac{1}{s^\beta} = \left\{h(t)\frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\right\},\ \beta \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\beta > 0 \tag{2.11}$$

(t) fiind distribuția lui Heaviside.

De exemplu putem scrie:

$$s\{h(t)\,e^{\alpha t}\} = \tilde{s}\{h(t)\,e^{\alpha t}\} + 1 = \alpha\{h(t)\,e^{\alpha t}\} + 1$$

de unde

$$\frac{1}{s-\alpha} = \{h(t)\,e^{\alpha t}\}.$$

Prin inducție în raport cu n se obține (2.11).

Operatorul de integrare h. Fie ecuația operațională:

$$sX = 1 \tag{2.12}$$

a cărei soluție este $X = s^{-1} = \frac{1}{s}$.

Ecuația (2.12) scrisă în $\mathscr{D}'_+$ înseamnă:

$$\delta'(t) * X(t) = \delta(t)$$

Deci $X(t) = (\delta'(t))^{-1} = h(t)$ unde $h(t) \in \mathscr{D}'_+$ reprezintă distribuția lui Heaviside. În consecință avem:

$$X = s^{-1} = h. \tag{2.13}$$

Operatorul $h = s^{-1} \in \mathscr{D}'_+$ se va numi operatorul de integrare în algebra cîturilor de convoluție Q'_+.

În particular dacă $f \in \mathscr{D}'_+$ este distribuție de tip funcție generată de o funcție local integrabilă atunci putem scrie :

$$hf = \{h(t) * f(t)\} = \left\{\int_{\mathbb{R}} \{h(\tau)f(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} = \left\{h(t)\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right\}. \quad (2.14)$$

De asemenea avem :

$$h^\alpha f = \left\{h(t)\int_0^t f(\tau)\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\mathrm{d}\tau\right\},\ \alpha \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\,\alpha > 0$$

Operatorul h^α se numește operatorul de integrare de ordin fracționar α.

În particular avem :

$$h^\alpha = \left\{h(t)\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right\},\ \mathrm{Re}\,\alpha > 0$$

Operatori scalari

Fie $\alpha \in \mathbb{C}$ un număr complex. Acestuia putem să-i asociem distribuția de tip funcție :

$$\{\alpha h(t)\} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \alpha, & t \geqslant 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

Definiția 4. Operatorul

$$[\alpha] = \{\alpha\delta(t)\} \in \mathscr{D}'_+ \subset \mathscr{Q}'_+, \quad (2.16)$$

se numește operator scalar asociat numărului complex $\alpha \in \mathbb{C}$.

Acest operator se poate reprezenta sub forma :

$$[\alpha] = \{\alpha\delta(t)\} = \frac{\{\alpha h(t)\}}{h} \quad (2.17)$$

Prin calcul direct se verifică proprietățile :

$$[\alpha] + [\beta] = [\alpha + \beta],\ [\alpha][\beta] = [\alpha\beta],\ [\alpha]\{f(t)\} = \{\alpha f(t)\} = \alpha\{f(t)\},$$

$$[\alpha]\frac{f}{g} = \frac{\{\alpha f(t)\}}{g};\ f, g \in \mathscr{D}'_+.$$

Remarcăm că $\alpha\{f(t)\}$ reprezintă produsul obișnuit dintre un scalar și distribuția $f \in \mathscr{D}'_+$ pe cînd $[\alpha]\{f(t)\}$ este considerat în sensul produsului de convoluție, deci operațional.

În particular avem :

$$[1] = \frac{h}{h} = 1,\ [0] = \frac{\{0\}}{h} = 0 \quad (2.18)$$

Operatori transformabili Laplace

Fie operatorul $a \in Q'_+$ având expresia $a = \frac{f}{g}$; $f, g \in \mathcal{D}'_+$.

Definiția 5. Operatorul $a = \frac{f}{g}$ spunem că este transformabil Laplace, dacă există în sensul distribuțiilor imaginabile Laplace

$$\hat{f}(p) = L[f](p), \quad \hat{g}(p) = L[g](p).$$

Definiția 6. Numim imagine Laplace a operatorului transformabil Laplace $a = \frac{f}{g}$ funcția complexă de variabilă complexă p având expresia:

$$\hat{a}(p) = L[a](p) = L\left[\frac{f}{g}\right] = \frac{L[f](p)}{L[g](p)} \tag{2.19}$$

Se poate arăta că $\hat{a}(p)$ nu depinde de alegerea reprezentantului $a = \frac{f}{g} \in Q'_+$ și că există o corespondență biunivocă între a și $\hat{a}$. Astfel elementelor 1 și 0 din Q'_+ le corespund în spațiul imaginilor Laplace, funcțiile 1 și 0.

Au loc formulele:

$$L[s](p) = \hat{s} = p \tag{2.20}$$

Într-adevăr deoarece $s = \{\delta'(t)\} = \frac{\{\delta'(t)\}}{\{\delta(t)\}}$ avem:

$$L[s](p) = \frac{L[\{\delta'(t)\}]}{L[\{\delta(t)\}]} = \frac{p}{1} = p.$$

$$L[s^n](p) = L[\{\delta^n(t)\}] = (L[\{\delta'(t)\}])^n = p^n.$$

Au loc proprietățile:

$$L[a + b] = L[a] + L[b], \; L[ab] = L[a]L[b], \; L[[\alpha]f] = \alpha L[f] \tag{2.21}$$

unde

$$a, b \in Q'_+, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \tag{2.21}$$

Fie operatorul rațional:

$$\mathcal{R}(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{a_0 + a_1 s + \ldots + a_n s^n}{b_0 + b_1 s + \ldots + b_m s^m}, \; a_i, b_i \in \mathbb{C} \tag{2.22}$$

Deoarece operațiile algebrice în Q'_+ satisfac proprietățile de comutativitate, asociativitate și distributivitate, putem să tratăm funcțiile raționale după regulile obișnuite algebrice. Astfel putem utiliza diviziunea polinoamelor și descompunerea în fracții simple. Orice polinom $P(s)$ reprezintă în fond o distribuție singulară avînd suportul $\{0\}$.

Avem :

$$L[\mathscr{R}(s)] = \frac{L[P(s)]}{L[Q(s)]} = \frac{a_0 + a_1 p + \ldots + a_m p^n}{b_0 + b_1 p + \ldots + b_m p^m} = \frac{P(p)}{Q(p)} \tag{2.23}$$

Într-adevăr acest rezultat se obține imediat ținînd seamă de (2.19) și (2.20).

Observație. Fie operatorul $a = \frac{f}{g}$; $f, g \in \mathscr{D}'_+$. Dacă operatorul $a \in Q'_+$ este transformabil Laplace atunci imaginea ei Laplace este : $L[a] = \frac{L[f]}{L[g]}$. În cazul că funcția complexă $F(p) = \frac{L[f]}{L[g]}$ este mărginită de un polinom în raport cu $|p|$ deci $|F(p)| \leqslant \mathscr{P}(|p|)$ atunci [15] există distribuția $a^*(t) \in \mathscr{D}'_+$ astfel ca $L[a^*](p) = F(p)$. Dacă condiția $|F(p)| \leqslant \mathscr{P}(|p|)$ nu este îndeplinită vom spune că $F(p)$ reprezintă imaginea Laplace a unui operator $a \in Q'_+$ care nu este de tip distribuție.

3. APLICAȚII ALE CÎTULUI DE CONVOLUȚIE Q'_+ ÎN VÎSCOELASTICITATE

Ceea ce deosebește solidul liniar elastic de solidul liniar vîscoelastic este legea constitutivă. Astfel, pentru solidul elastic izotrop legea constitutivă în $\mathscr{D}'_+$ este :

$$\sigma_{ij}(\bar{r}, t) = \lambda(\bar{r})\, \varepsilon(\bar{r}, t)\, \delta_{ij} + 2\mu(\bar{r})\, \varepsilon_{ij}(\bar{r}, t) \tag{3.1}$$

unde $\lambda(\bar{r})$, $\mu(\bar{r})$, $\bar{r} \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ reprezintă constantele elastice ale lui Lamé. Dacă solidul elastic este și omogen atunci λ și μ sînt constante.

Pentru solidul vîscoelastic izotrop [6] legea constitutivă în $\mathscr{D}'_+$ este :

$$\sigma_{ij}(\bar{r}, t) = \lambda^*(\bar{r}, t)\, \delta_{ij} \underset{t}{*} \varepsilon(\bar{r}, t) + 2\mu^*(\bar{r}, t) \underset{t}{*} \varepsilon_{ij}(\bar{r}, t) \tag{3.2}$$

unde

$$2\mu^*(\bar{r}, t) = \frac{\partial \psi_1(\bar{r}, t)}{\partial t},\ 3K^*(\bar{r}, t) = \frac{\partial \psi_2(\bar{r}, t)}{\partial t},\ K^*(\bar{r}, t) = \lambda^* + \frac{2}{3}\mu^* \tag{3.3}$$

În relațiile (3.1), (3.2), (3.3), $\bar{r} \in \Omega$ se consideră parametru iar σ_{ij}, ε_{ij}, ε, λ^*, μ^*, K^* distribuții din $\mathscr{D}'_+$ în raport cu variabila $t \in \mathbb{R}$.

Distribuțiile $\psi_1, \psi_2 \in \mathscr{D}'_+$ se numesc distribuții de relaxare iar K^* modulul de relaxare la dilatarea volumică.

În ceea ce privește distribuțiile de fluaj φ_1, $\varphi_2 \in \mathscr{D}'_+$ acestea se definesc prin relațiile:

$$\frac{\partial \varphi_i(\bar{r}, t)}{\partial t} \underset{t}{*} \frac{\partial \psi_i(\bar{r}, t)}{\partial t} = \delta(t); \quad i = 1, 2. \tag{3.4}$$

În cazul solidului vîscoelastic omogen și izotrop distribuțiile de fluaj φ_1, φ_2 precum și distribuțiile de relaxare depind numai de variabila temporală $t \in \mathbb{R}$.

Forma operațională în Q'_+ a relațiilor (3.2), (3.3) și (3.4) este:

$$\sigma_{ij} = \lambda^* \varepsilon \delta_{ij} + 2\mu^* \varepsilon_{ij} \tag{3.2'}$$

$$2\mu^* = s\psi_1, \quad 3K^* = s\psi_2 = 3\lambda^* + 2\mu^*, \quad \varphi_i \psi_i = \frac{1}{s^2}; \quad i = 1, 2 \tag{3.3'}$$

În particular să presupunem că operatorii $\lambda^*, \mu^* \in Q'_+$ sînt operatori scalari, deci

$$\lambda^* = [\lambda^*] = \{\lambda^*(\bar{r})\delta(t)\}, \quad \mu^* = [\mu^*] = \{\mu^*(\bar{r})\delta(t)\} \tag{3.5}$$

În aceste condiții legea constitutivă (3.2') a solidului vîscoelastic izotrop devine:

$$\sigma_{ij} = [\lambda^*]\varepsilon\delta_{ij} + [\mu^*]2\varepsilon_{ij} = \lambda^*(\bar{r})\varepsilon\delta_{ij} + \mu^*(\bar{r})2\varepsilon_{ij} \tag{3.2''}$$

Observăm că ecuația (3.2'') coincide cu legea constitutivă (3.1) a solidului elastic izotrop, de unde:

Propoziția 3. *Solidul elastic izotrop reprezintă un caz particular al solidului vîscoelastic izotrop cînd operatorii* $\lambda^*, \mu^* \in Q'_+$ *sînt operatori scalari în algebra cîturilor de convoluție* Q'_+.

Această propoziție are un corespondent în ce privește aplicarea sub formă operațională a principiului corespondenței la rezolvarea problemelor vîscoelasticității. Putem enunța:

Propoziția 4. *Fie* $\gamma(\bar{r}, t) \in \mathscr{D}'_+$, $\bar{r} \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$ *o mărime mecanică (tensiune, deplasare, etc.) corespunzător unei probleme din elastodinamică avînd expresia:*

$$\gamma(\bar{r}, t) = \sum_{k=0}^{m} R_k(\lambda, \mu) f_k(\bar{r}, t) \tag{3.6}$$

unde $f_k \in \mathscr{D}'_+$, $\lambda(\bar{r})$, $\mu(\bar{r})$ *constantele lui Lamé, iar* $R_k(\lambda, \mu)$ *funcție rațională în* λ *și* μ. *Dacă* f_k *admite imagine Laplace, atunci mărimea mecanică* $\gamma^*(\bar{r}, t)$, *corespunzătoare problemei solidului vîscoelastic izotrop, operațional are expresia:*

$$\gamma^*(\bar{r}, t) = \sum_{k=0}^{m} R_k(\lambda^*, \mu^*) f_k(\bar{r}, t) \tag{3.7}$$

sau explicit:

$$\gamma^*(\bar{r}, t) = \sum_{k=0}^{m} R_k(\lambda^*, \mu^*) \underset{t}{*} f_k(\bar{r}, t) \tag{3.8}$$

Demonstrație. Conform principiului corespondenței pentru a obține imaginea Laplace a mărimii mecanice γ^* corespunzătoare problemei vîscoelastice se aplică operatorul Laplace L în distribuții ecuației (3.6) și se înlocuiește λ și μ respectiv cu $\hat{\lambda}^* = L[\lambda^*]$ și $\hat{\mu}^* = L[\mu^*]$. În felul acesta obținem :

$$L[\gamma^*(\bar{r}, t)] = \sum_{k=0}^{m} R_k(\hat{\lambda}^*, \hat{\mu}^*) \hat{f}_k(\bar{r}, p), \quad \hat{f}_k = L[f_k](p) \tag{3.9}$$

Ținînd seamă că R_k este o funcție rațională, atunci avem :

$$L[R_k(\lambda^*, \mu^*)] = R_k(\hat{\lambda}^*, \hat{\mu}^*). \tag{3.10}$$

În consecință relația (3.9) devine :

$$L[\gamma^*(\bar{r}, t)] = \sum_{k=0}^{m} L[R_k(\lambda^*, \mu^*)] L[f_k] \tag{3.9'}$$

și datorită bijectivității dintre operatorul $a \in Q'_+$ și imaginea ei Laplace $\hat{a} = L[a]$ obținem relația (3.8). Cu aceasta propoziția este demonstrată.

Remarcăm că expresia $R_k(\lambda^*, \mu^*) \in Q'_+$ reprezintă un operator rațional în algebra de convoluție Q'_+ care numai în anumite cazuri se reduce la un operator de tip distribuție din $\mathscr{D}'_+$.

În continuare vom ilustra prin trei exemple modul de aplicare a propoziției stabilite.

Exemplul 1. Semispațiul vîscoelastic omogen și izotrop acționat în origine de o forță normală $P(t) \in \mathscr{D}'_+$ (fig. 1).

Această problemă a fost considerată de E. H. Lee [9], p. 180, și soluția efectivă a fost dată pe baza principiului corespondenței pentru solidul vîscoelastic de tip Voigt-Kelvin.

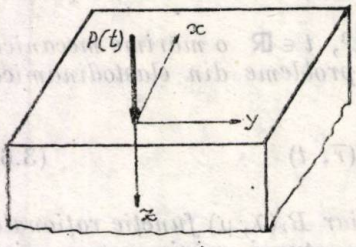


Fig. 1

Problema asociată din elastodinamică corespunde semispațiului elastic acționat în origine de o forță normală constantă P. Utilizînd coordonatele cilindrice [16] p. 403 formula 211, avem de exemplu pentru componenta tensiunii σ_r expresia :

$$\sigma_r = \frac{P}{2\pi}\left\{(1-2\nu)\left(\frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2}(r^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\right) - \right. \tag{3.11}$$
$$\left. - 3r^2 z(r^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}\right\}$$

Observăm că sîntem în condițiile de aplicare a propoziției 4 și funcția rațională $R(\lambda, \mu)$ în cazul componentei σ_r este :

$$R(\lambda, \mu) = 1 - 2\nu = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \tag{3.12}$$

deoarece coeficientul lui Poisson ν are expresia : $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$. În consecință în algebra cîturilor de convoluție Q'_+ componenta σ_r^* corespunzătoare problemei cvasistatice a semispațiului vîscoelastic are expresia :

$$\sigma_r^* = \frac{\{P(t)\}}{2\pi} \left\{ \frac{\mu^*}{\lambda^* + \mu^*} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right) - \right.$$

$$\left. - 3r^2 z (r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \right\} \tag{3.13}$$

Ținînd seama de (3.3') avem :

$$\lambda^* + \mu^* = \frac{s}{6} (\psi_1 + 2\psi_2)$$

Deci

$$R(\lambda^*, \mu^*) = \frac{\mu^*}{\lambda^* + \mu^*} = \frac{3\psi_1}{\psi_1 + 2\psi_2} \tag{3.14}$$

Substituind în (3.13) obținem în definitiv :

$$\sigma_r^* = \frac{3}{2\pi} \frac{\{P(t)\}\psi_1}{\psi_1 + 2\psi_2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right) -$$

$$- \frac{3}{2\pi} \{P(t)\} r^2 z (r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}$$

unde $\{P(t)\}$, ψ_1, ψ_2 se consideră operatori din Q'_+.

În particular pentru solidul vîscoelastic de tip Voigt-Kelvin [6] p. 407 distribuțiile de relaxare și fluaj sînt :

$$\psi_1 = \eta\delta(t) + Eh(t), \quad \psi_2 = 3K_0 h(t)$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{E} (1 - e^{-\frac{E}{\eta} t}) \, h(t), \quad \varphi_2 = \frac{h(t)}{3K_0} \tag{3.15}$$

$h(t)$ fiind distribuția lui Heaviside.

Sub formă operațională aceste expresii se scriu astfel :

$$\psi_1 = \eta + Eh, \quad \psi_2 = 3K_0 h, \quad \varphi_1 = \frac{h}{E} - \frac{1}{E} \cdot \frac{1}{s + \frac{E}{\eta}}, \quad \varphi_2 = \frac{1}{3K_0} h \tag{3.16}$$

Ținînd seamă că $sh = 1$ putem scrie :

$$\frac{\mu^*}{\lambda^* + \mu^*} = \frac{3(E + \eta s)}{6K_0 + E + \eta s} = 3 - \frac{18K_0}{\eta} \cdot \frac{1}{s + \frac{6K_0 + E}{\eta}}$$

Deci

$$\frac{\mu^*}{\lambda^* + \mu^*} = 3 - \frac{18K_0}{\eta} \left\{ e^{-\frac{6K_0 + E}{\eta} t} h(t) \right\}$$

În consecință vom obține pentru σ_r^* în Q'_+ expresia :

$$\sigma_r^* = \frac{3}{2\pi} \{P(t)\} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right) - \frac{9K_0}{\pi\eta} \{P(t)\} \{ e^{-\frac{6K_0 + E}{\eta} t} h(t) \} -$$

$$- \frac{3}{2\pi} \{P(t)\} (r^2 z (r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}) .$$

Explicitînd obținem :

$$\sigma_r^* = \frac{2P(t)}{\pi} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right) - \frac{9K_0}{\pi\eta} P(t) * h(t) e^{-\frac{6K_0 + E}{\eta} t} -$$

$$- \frac{3}{2\pi} P(t) r^2 z (r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} .$$

Exemplul 2. Încovoierea simplă a unei bare vîscoelastice.

Considerăm o bară vîscoelastică omogenă și izotropă de lungime l și secțiune constantă acționată la capete de cuplurile variabile $M(t)$, $-M(t)$ (fig. 2).

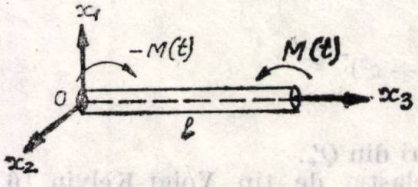


Fig. 2

Prin neglijarea forțelor inerțiale vom obține o problemă cvasistatică. Pentru determinarea stării de deplasare vom considera problema asociată din elastostatică privind încovoierea simplă a unei bare elastice omogene și izotrope acționată la capete de momentele constante M, $-M$.

Utilizînd rezultatele din [6] p 357, deplasările $u_i (i = \overline{1, 3})$ pentru problema elastostatică au expresiile :

$$u_1 = -\frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} M\alpha_{11} + \frac{\mu + \lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} M\alpha_{12}$$

$$u_2 = -\frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} M\alpha_{21} - \frac{\mu + \lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} M\alpha_{22} \qquad (3.17)$$

$$u_3 = \frac{\mu + \lambda}{\mu(2\mu + 3\lambda)} M\alpha_{31}$$

unde

$$\alpha_{11} = \frac{1}{\Delta}\left[-\frac{I_{11}}{2}(x_1^2 - x_2^2) + I_{12}x_1x_2\right], \quad \alpha_{12} = \frac{I_{11}}{\Delta}x_3^2, \quad \alpha_{22} = \frac{I_{12}}{\Delta}x_3^2$$

$$\alpha_{21} = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{I_{12}}{2}(x_2^2 - x_1^2) - I_{11}x_1x_2\right], \quad \alpha_{31} = \frac{x_3}{\Delta}(-I_{11}x_1 + I_{12}x_2) \tag{3.17'}$$

$\Delta = I_{11}I_{22} - I_{12}^2$ iar I_{11}, I_{22}, I_{12} reprezintă respectiv momentele de inerție în raport cu axele Ox_1, Ox_2 și momentul de inerție centrifugal în raport cu axele Ox_1, Ox_2.

Funcțiile raționale de λ și μ ce figurează în (3.17) au expresiile :

$$R_1(\lambda, \mu) = \frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)}, \quad R_2(\lambda, \mu) = \frac{\lambda + \mu}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} \tag{3.18}$$

În consecință deplasările u_i^* corespunzătoare problemei cvasistatice de încovoiere a solidului vîscoelastic supus momentelor variabile $-M(t)$ și $M(t)$ se obțin conform propoziției 4 înlocuind în (3.17) pe λ, μ cu λ^*, μ^* și pe M cu $M(t)$. Operatorul rațional $R_2(\lambda, \mu) = \dfrac{\lambda^* + \mu^*}{2\mu^*(2\mu^* + 3\lambda^*)}$ se poate descompune sub forma :

$$R_2(\lambda^*, \mu^*) = \frac{1}{3}(2\mu^*)^{-1} + \frac{1}{6}(2\mu^* + 3\lambda^*)^{-1}.$$

Ținînd seamă de (3.3') avem :

$$R_2(\lambda^*, \mu^*) = \frac{s}{6}(2\varphi_1 + \varphi_2) \tag{3.19}$$

Deoarece pentru solidele vîscoelastice tridimensionale [6] p. 431, $\varphi_2 = \dfrac{h}{3K_0}$ atunci $\psi_2 = 3K_0h (K_0 > 0)$ și obținem pentru operatorul rațional $R_2(\lambda^*, \mu^*) \in Q_+'$ expresia :

$$R_2(\lambda^*, \mu^*) = \frac{1}{6}\left(2s\varphi_1 + \frac{1}{3K_0}\right) \tag{3.20}$$

Procedînd în mod analog vom obține pentru operatorul rațional $R_1(\lambda^*, \mu^*) = \dfrac{\lambda^*}{2\mu^*(2\mu^* + 3\lambda^*)}$ expresia :

$$R_1(\lambda^*, \mu^*) = \frac{1}{3}(2\mu^*)^{-1} - \frac{1}{3}(2\mu^* + 3\lambda^*)^{-1} =$$

$$= \frac{s}{3}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{3}\left(s\varphi_1 - \frac{1}{3K_0}\right) \tag{3.21}$$

Ţinînd seamă de (3.20), (3.21) şi aplicînd propoziţia 4 vom obţine sub formă operaţională pentru starea de deplasare la încovoiere sub acţiunea momentelor — $M(t)$, $M(t) \in \mathscr{D}'_+$, aplicate la capetele barei vîsco-elastice, expresiile :

$$u_1^* = -\frac{1}{3}\left(s\varphi_1 - \frac{1}{3K_0}\right) M\alpha_{11} + \frac{1}{6}\left(2s\varphi_1 + \frac{1}{3K_0}\right) M\alpha_{12}$$

$$u_2^* = -\frac{1}{3}\left(s\varphi_1 - \frac{1}{3K_0}\right) M\alpha_{21} + \frac{1}{6}\left(2s\varphi_1 + \frac{1}{3K_0}\right) M\alpha_{22} \qquad (3.22)$$

$$u_3^* = \frac{1}{6}\left(2s\varphi_1 + \frac{1}{3K_0}\right) M\alpha_{31}$$

unde u_i^* s, φ_1, $M \in Q'_+$ sînt operatori iar $\alpha_{ij}(\vec{r})$, $\vec{r} \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ parametrii daţi de (3.17′).

Sub formă explicită deplasările u_i^* se pot scrie sub forma :

$$u_1^*(\vec{r}, t) = \frac{\alpha_{12} - \alpha_{11}}{3} \varphi_1'(t) * M(t) + \frac{2\alpha_{11} + \alpha_{12}}{18K_0} M(t)$$

$$u_2^*(\vec{r}, t) = \frac{\alpha_{22} - \alpha_{21}}{3} \varphi_1'(t) * M(t) + \frac{2\alpha_{21} + \alpha_{22}}{18K_0} M(t) \qquad (3.23)$$

$$u_3^*(\vec{r}, t) = \frac{\alpha_{31}}{3} \varphi_1'(t) * M(t) + \frac{\alpha_{31}}{18K_0} M(t)$$

CAZURI PARTICULARE

1. ÎNCOVOIEREA SIMPLĂ PENTRU SOLIDUL DE TIP VOIGT-KELVIN

Ţinînd seamă de (3.15) şi (3.16) în acest caz avem :

$$s\varphi_1 = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{1}{s + \frac{E}{\eta}}$$

şi în consecinţă deplasările u_i^* devin :

$$u_1^*(\vec{r}, t) = \frac{\alpha_{12} - \alpha_{11}}{3\eta} e^{-\frac{E}{\eta}t} h(t) * M(t) + \frac{2\alpha_{11} + \alpha_{12}}{18K_0} M(t)$$

$$u_2^*(\vec{r}, t) = \frac{\alpha_{22} - \alpha_{21}}{3\eta} e^{-\frac{E}{\eta}t} h(t) * M(t) + \frac{2\alpha_{21} + \alpha_{22}}{18K_0} M(t)$$

$$u_3^*(\vec{r}, t) = \frac{\alpha_{31}}{3\eta} e^{-\frac{E}{\eta}t} h(t) * M(t) + \frac{\alpha_{31}}{18K_0} M(t)$$

II. ÎNCOVOIEREA SIMPLĂ PENTRU SOLIDUL DE TIP MAXWELL

În acest caz [6] p. 415, distribuția de fluaj φ_1 are expresia :

$$\varphi_1(t) = h(t)\left(\frac{1}{E} + \frac{t}{\eta}\right) \tag{3.24}$$

Operațional aceasta se va scrie :

$$\varphi_1 = \frac{h}{E} + \frac{h^2}{\eta} \tag{3.25}$$

În consecință avem :

$$s\varphi_1 = \frac{1}{E} + \frac{1}{\eta}h \tag{3.26}$$

și astfel pentru deplasări obținem expresiile :

$$u_1(\bar{r}, t) = \left(\frac{\alpha_{12} - \alpha_{11}}{3E} + \frac{2\alpha_{11} + \alpha_{12}}{18K_0}\right) M(t) + \frac{\alpha_{12} - \alpha_{11}}{3\eta} h(t) * M(t)$$

$$u_2^*(\bar{r}, t) = \left(\frac{\alpha_{22} - \alpha_{21}}{3E} + \frac{2\alpha_{12} + \alpha_{22}}{18K_0}\right) M(t) + \frac{\alpha_{22} - \alpha_{21}}{3\eta} h(t) * M(t)$$

$$u_3^*(\bar{r}, t) = \left(\frac{\alpha_{31}}{3E} + \frac{\alpha_{31}}{18K_0}\right) M(t) + \frac{\alpha_{31}}{3\eta} h(t) * M(t)$$

Exemplul 3. Spațiul vîscoelastic supus acțiunii unei forțe concentrate variabile.

Pentru determinarea deplasărilor $u_i^*(\bar{r}, t)$, $(\bar{r}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$ cazului cînd spațiul vîscoelastic omogen și izotrop este supus în origine acțiunii unei forțe concentrate variabile $\vec{P}(P_1(t), P_2(t), P_3(t) \in \mathscr{D}'_+$ vom utiliza [5] p. 293 soluția în deplasări $u_i^*(r)$, $\bar{r} \in \mathbb{R}$ corespunzător problemei statice a spațiului elastic. Evident problema vîscoelastică considerată este cvasistatică. Conform celor arătate în [5] p. 293, deplasările u_i corespunzătoare spațiului elastic supus în origine unei forțe concentrate constante $\vec{P}(P_1, P_2, P_3)$ au expresiile :

$$u_i(\bar{r}) = -\sum_{j=1}^{3} P_j E_{ij}(\bar{r}, \lambda, \mu) \quad i = \overline{1, 3} \tag{3.27}$$

unde

$$E_{ij}(\bar{r}, \lambda, \mu) = -\frac{\delta_{ij}}{4\pi\mu}\cdot\frac{1}{r} - \frac{1}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)}\cdot\frac{x_i x_j}{r^3} \quad (i, j = \overline{1, 3}) \tag{3.28}$$

δ_{ij} fiind simbolul lui Kronecker.

Observăm că funcţiile raţionale depinzînd de constantele lui Lamé λ şi μ ce intervin în expresiile deplasărilor $u_i(\vec{r})$ sînt :

$$R_1(\lambda, \mu) = \frac{1}{2\mu}, \quad R_2(\lambda, \mu) = \frac{1}{2\mu(2\mu + \lambda)} \tag{3.29}$$

Deplasările $u_i^*(\vec{r}, t)$ corespunzătoare problemei vîscoelastice considerate se pot determina pe baza propoziţiei 4 şi astfel sub formă operaţională în algebra cîturilor de convoluţie Q'_+ obţinem :

$$u_i^*(\vec{r}, t)\} = -\sum_{j=1}^{3} \{P_j(t)\} E_{ij}(\vec{r}, \lambda^*, \mu^*) \tag{3.30}$$

Deoarece

$$\lambda^* = \frac{s(\psi_2 - \psi_1)}{3}, \quad 2\mu^* = s\psi_1, \quad \varphi_i\psi_i = \frac{1}{s^2} \quad (i = 1, 2)$$

avem :

$$R_1(\lambda^*, \mu^*) = \frac{1}{2\mu^*} = \frac{1}{s\psi_1} = s\varphi_1$$

$$R_2(\lambda^*, \mu^*) = \frac{1}{2\mu^*(2\mu^* + \lambda^*)} = (2\mu^*)^{-1}(2\mu^* + \lambda^*)^{-1} = \frac{3}{s^2\psi_1(\psi_2 + 2\psi_1)} \tag{3.31}$$

Ţinînd seamă de (3.28) şi (3.31) vom obţine pentru operatorii $E_{ij}(\vec{r}, \lambda^*, \mu^*) \in Q'_+$ expresiile :

$$E_{ij}(\vec{r}, \lambda^*, \mu^*) = -s\varphi_1 \frac{\delta_{ij}}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} - \frac{3}{4\pi} \frac{1}{s^2\psi_1(\psi_2 + 2\psi_1)} \cdot \frac{x_i x_j}{r^3} \tag{3.32}$$

Substituind în (3.30) obţinem :

$$\{u_i^*(\vec{r}, t)\} = \sum_{j=1}^{3} \{P_j(t)\} \left[s\varphi_1 \frac{\delta_{ij}}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} + \frac{3}{4\pi} \frac{1}{s^2\psi_1(\psi_2 + 2\psi_1)} \cdot \frac{x_i x_j}{r^3} \right] \tag{3.33}$$

formule care ne dau deplasările u_i^* în algebra Q'_+ corespunzător problemei spaţiului vîscoelastic supus în origine acţiunii unei forţe concentrate variabile $\vec{P}(P_1(t), P_2(t), P_3(t)) \in \mathscr{D}'_+$.

CAZURI PARTICULARE

I. SOLIDUL VÎSCOELASTIC DE TIP VOIGT-KELVIN

Ţinînd seamă de (3.16) şi (3.31) obţinem :

$$R_1(\lambda^*, \mu^*) = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{1}{s + \frac{E}{\eta}}$$

$$R_2(\lambda^*, \mu^*) = \frac{3}{(E + s\eta)(2E + 3K_0 + 2\eta s)} = \frac{K_0}{\eta^3}\{(e^{-\frac{Et}{\eta}} - e^{-\frac{2E+3K_0}{2\eta}t}) h(t)\}$$

Substituind aceste expresii în (3.33) vom obține pentru deplasările u_i^* expresiile :

$$u_i^*(\bar{r}, t) = \sum_{j=1}^{3} P_j(t) * \left[\frac{\delta_{ij}}{2\pi\eta} \frac{1}{r} e^{-\frac{E}{\eta} t} + \frac{K_0 x_i x_j}{4\pi\eta^3 r^3} (e^{-\frac{E}{\eta} t} - e^{-\frac{2E+3K_0}{2\eta} t}) \right] h(t).$$

II. SOLIDUL VÎSCOELASTIC DE TIP MAXWELL

Distribuțiile de fluaj și de relaxare [6] p. 432 au expresiile :

$$\psi_1 = E\{h(t)\, e^{-\frac{E}{\eta} t}\} = \frac{E}{s + \frac{E}{\eta}}, \quad \psi_2 = 3K_0 h$$

$$\varphi_1 = \frac{h}{E} + \frac{1}{\eta} \{th(t)\} = \frac{h}{E} + \frac{h^2}{\eta}, \quad \varphi_2 = \frac{h}{3K_0}, \quad \varphi_i \psi_i = \frac{1}{s^2}, \quad i = 1, 2$$

Avem :

$$R_1(\lambda^*, \mu^*) = s\varphi_1 = \frac{1}{E} + \frac{h}{\eta}$$

$$R_2(\lambda^*, \mu^*) = \frac{3s\varphi_1}{s(\psi_2 + 2\psi_1)} = \frac{3s\varphi_1}{3K_0 + \frac{2Es}{s + \frac{E}{\eta}}} = \frac{3}{E\eta} \left[\frac{\eta}{3K_0 + 2E} + \frac{E}{3K_0} \cdot \frac{1}{s} - \right.$$

$$\left. - \frac{4}{3} \frac{E^3}{K_0(3K_0 + 2E)^2} \cdot \frac{1}{s + \frac{3K_0 E}{\eta(3K_0 + 2E)}} \right]$$

de unde obținem :

$$R_2(\lambda^*, \mu^*) = \frac{3}{E(3K_0 + 2E)} + \frac{h}{\eta K_0} - \frac{4E^2}{K_0\eta(3K_0 + 2E)^2} \{h(t)\, e^{-\frac{3K_0}{\eta(3K_0+2E)} t}\} \tag{3.35}$$

Substituind expresiile (3.34), (3.35) în (3.33) vom obține deplasările :

$$\mu_i^* = \sum_{j=1}^{3} P_j [\beta_{ij} + \beta_{ij}^* h + \beta_{ij}^{**} \{h(t)\, e^{-\frac{3K_0}{\eta(3K_0+2E)} t}\}]$$

unde

$$\beta_{ij}(\bar{r}) = \frac{\delta_{ij}}{2\pi E r} + \frac{3x_i x_j}{4\pi E r^3 (3K_0 + 2E)}, \beta_{ij}^*(\bar{r}) = \frac{\delta_{ij}}{2\pi\eta r} +$$

$$+ \frac{x_i x_j}{4\pi\eta K_0 r^3}, \quad \beta_{ij}^{**}(\bar{r}) = - \frac{x_i x_j}{\pi K_0 \eta (3K_0 + 2E)}$$

Explicit putem scrie :

$$u_i^*(\bar{r}, t) = \sum_{j=1}^{3} [\beta_{ij}(\bar{r}) P_j(t) + \beta_{ij}^*(\bar{r}) P_j(t) * h(t) +$$

$$+ \beta_{ij}^{**}(\bar{r}) P_j(t) * \{h(t)\, e^{-\frac{3K_0E}{\eta(3K_0+2E)}t}\}]$$

Primit în redacție la 8 aprilie 1989

BIBLIOGRAFIE

1. L. BERG, *Einfürung in die Operatorenrechnung*, Berlin, 1962.
2. M. A. GOLBERG, H. BOWMAN, *Mikusiński operators without the Titchmarsh theorem*, Amer. Math. Montrly, **87**, 7.
3. V. DITKINE, A. PROUDNIKOV, *Calcul opérationnel*, Éditions Mir., Moscou, 1979.
4. A. ERDÉLY, *Calcul opérationnel et functions généralisées*, Dunod, Paris, 1971.
5. W. KECS, *The convolution product*, Edit. Academiei, București, D. Reidel Publishing Company, 1982.
6. W. KECS, *Elasticitate și viscoelasticitate*, Edit. tehnică, București, 1986.
7. W. KECS, P. P. TEODORESCU, *Applications of the theory of distributions in mechanics*. Edit. Academiei, București, Abacus Press, Tunbridge Wells, Kent, 1974.
8. G. KRABBE, *Operational calculus*, A. Plenum/Rosetta edition 1975.
9. E. H. LEE, Stress analysis in Visco-Elastic Bodies, Quarterly of Applied Mathematics, **13**, 2(1955).
10. J. MIKUSIŃSKI, *Operational calculus*, vol. **I**, PWN Pergamon Press, 1983.
11. J. MIKUSIŃSKI, T. K. BOEHME, *Operational calculus*, vol. **II**, PWN Pergamon Press, 1987.
12. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, Warszawa, 1970.
13. V. V. NOVOJILOV, *Teoria uprogosti*, Nauka, Moskva, 1958.
14. R. A. STRUBLE, *Operational Rules*. SIAM J. Math. Anal. **10**, 3 (1979).
15. L. SCHWARTZ, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Hermann, Paris, 1961.
16. P. P. TEODORESCU, *Teoria elasticității și introducere în mecanica solidelor deformabile*, vol. **2**, Edit. Dacia, Cluj-Napoca, 1979.
17. C. P. TIMOSENKO, G. GUDIER, *Teoria uprogosti*, Nauka, Moskva, 1970.
18. K. YOSIDA, *Operational calculus*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1983.

O EXTINDERE A UTILIZĂRII TRANSFORMĂRII CONFORME A REȚELELOR DE PLĂCI PLANE LA REȚELE DE FORMĂ DATĂ

de C. BERBENTE și P. CIZMAȘ

Institutul Politehnic București

Metoda prezentată în această lucrare permite determinarea distribuției de viteze și presiuni în rețele de profile, în ipotezele curgerii nevîscoase, incompresibile, potențiale, utilizînd transformările conforme. Dîndu-se conturul profilului în rețeaua cu desimea (b/t) și unghiul de instalare (λ) precizate, se determină funcția care transformă conform cercul unitate ($|\zeta| = 1$) în rețeaua dată. Trecerea de la domeniul multiplu conex al rețelei la domeniul simplu conex se face utilizînd transformarea Weinig-Manea. Extinderea metodei în cazul profilelor de grosime și curbură mare se face definind o coardă fictivă pentru a permite încadrarea punctelor profilului în banda $\frac{t}{2}\cos\lambda$. Totodată optimizarea alegerii corzii fictive reduce efortul de calcul pentru determinarea transformării conforme. Viteza și distribuția de presiuni se calculează pornind de la potențialul mișcării în jurul cercului unitate.

NOTAȚII

oxy — sistem de referință atașat corzii reale
$ox_f y_f$ — sistem de referință atașat corzii fictive
t — pasul rețelei
b — coarda profilului
λ — unghiul de instalare al rețelei
n — numărul de puncte ale profilului
(x_c, y_c) — centrul corzii fictive în sistemul oxy
v_∞ — viteza curentului la infinit amonte față de rețea
i_∞ — incidența vitezei v_∞
$\mathscr{R}$ — planul rețelei de profile
$\mathscr{E}$ — planul elipsei deformate
$\mathscr{C}$ — planul cercului deformat
$\mathscr{H}$ — planul cercului unitate
f (indice) — notează o mărime fictivă

1. CONSIDERAȚII INTRODUCTIVE

Extinderea metodei de trasare Carafoli la rețele de profile [1] permite obținerea unor profile interesante de turbină și compresor în ipoteza unei mișcări potențiale, incompresibile și staționare.

Metoda folosește transformarea Weinig-Manea:

$$z = \frac{t}{2\pi}\left(e^{i\lambda}\ln\frac{\zeta + R}{\zeta - R} + e^{-i\lambda}\ln\frac{R\zeta + 1}{R\zeta - 1} + B\right) \tag{1}$$

unde t este pasul rețelei, λ unghiul de instalare, ζ variabila complexă din planul cercului transformat, z variabila complexă din planul profilului iar R și B constante care se determină în funcție de desimea rețelei și unghiul de instalare. Deoarece relația (1) transformă exteriorul cercului

unitate într-o rețea de plăci plane, cu metoda descrisă în [1] se obțin prin translația și omotetia cercului profile de diferite grosimi și curburi.

O îmbunătățire ulterioară a fost înlocuirea cercului deplasat cu o elipsă [2]. Modificarea poziției elipsei față de origine se face beneficiind de cinci parametri (față de trei la cerc) : x_0, y_0—centrul elipsei ; a, b—semiaxele și τ — rotirea elipsei. Aceasta permite găsirea unor profile interesante. Totuși pentru un profil dat, cinci parametri nu sînt, în general, suficienți pentru descrierea proprietăților în rețea, mai ales în cazul grosimilor și curburilor mari și a rețelelor dese. De aceea vom rezolva problema invers, determinînd caracteristicile aerodinamice ale unei rețele de profile date, în loc de a încerca să obținem profile posibil de a avea aplicații practice.

2. METODA DE CALCUL

2.1. DETERMINAREA TRANSFORMĂRII CONFORME

Precizînd forma paletei, desimea b/t și unghiul de instalare se va determina funcția care transformă exteriorul cercului unitate în exteriorul rețelei de profile.

Fie ζ coordonata complexă din planul $\mathcal{K}$ al cercului transformat și z_p coordonata complexă din planul $\mathcal{R}$ al rețelei de profile. Transformarea totală z_p va fi compusă din transformarea z dată de (1), care transformă

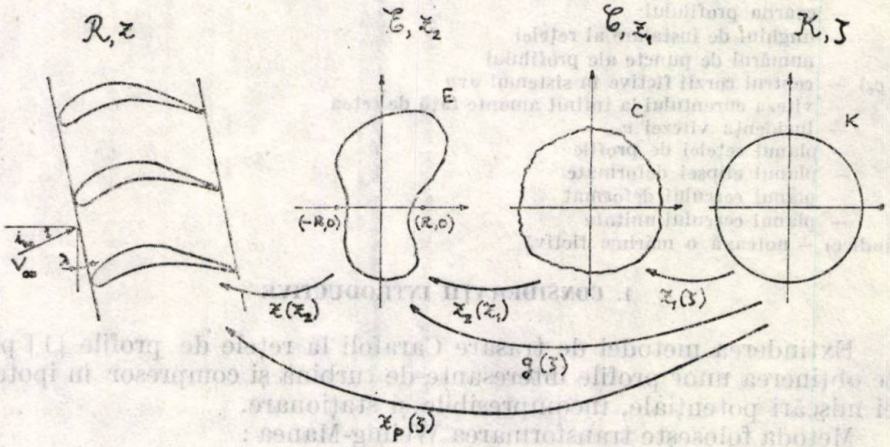


Fig. 1

rețeaua dată într-un contur E din planul complex (z_2) (fig. 1), asigurînd astfel periodicitatea, și din transformarea g care transformă conturul E în cercul de rază unitate situat într-un plan $\mathcal{K}(\zeta)$ (fig. 1), adică :

$$z_p = z \circ g. \tag{2}$$

Pentru a determina transformarea g se vor calcula coordonatele conturului E.

Deoarece este dificilă inversarea analitică a funcției (1), conturul E se va afla numeric printr-o metodă Newton—Raphson, al cărei punct de plecare a fost asigurat printr-o tehnică care am numit-o de „grilă" (care în această problemă a dat rezultate mai bune decît metoda gradientului) [3].

Conturul E astfel obținut are o formă oarecare. Pentru a se apropia mai mult de cercul cu centrul în originea axelor se va aplica conturului E o transformare care îl va duce în planul z conform relației :

$$z_2 = \left(z_1 - \frac{c^2}{z_1}\right) e^{i\tau} + z_0 \tag{3}$$

unde z_0 este centrul iar τ înclinarea axelor unei elipse, denumită „elipsa cea mai apropiată" de conturul E ; $c^2 = (b^2 - a^2)/4$, a și b fiind semiaxele aceleiași elipse ; z_1 este coordonata complexă din planul $\mathscr{C}$ iar z_2 coordonata complexă din planul $\mathscr{E}$. Elipsa cea mai apropiată de un contur este obținută determinînd cinci scalari (z_0, a, b, τ) cu ajutorul metodei celor mai mici pătrate.

Fie $z_1(\zeta)$ funcția care transformă conform cercul unitate ($|\zeta| = 1$) în conturul C, funcție care o alegem ca serie de puteri trunchiată la m termeni, sub forma :

$$z_1 = \sum_{j=-1}^{m-2} C_{-j}\, \zeta^{-j} \tag{4}$$

unde constantele complexe C_{-j} urmează a fi determinate. Se notează :

$$C_{-j} = A_{-j} + iB_{-j}\,; \quad A_{-j}, B_{-j} \in \mathbb{R} \tag{5}$$

După determinarea coeficienților C_{-j} putem construi funcția :

$$g = z_2 \circ z_1 \tag{6}$$

și apoi preciza pe z_p care trasformă conform cercul unitate în rețeaua de profile.

2.1.1. Determinarea elipsei celei mai apropiate de conturul E. Fie elipsa proximă :

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + 1 = 0 \tag{7}$$

scrisă sub formă mai generală a unei conice.

Punctele (x_i, y_i) ale conturului E vor satisface ecuația (7) cu aproximația ε_i, adică :

$$ax_i^2 + by_i^2 + cx_i y_i + dx_i + ey_i + 1 = \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{8}$$

Se definește elipsa proximă ca elipsa ai cărei coeficienți a, b, c, d, e satisfac condiția de minim al sumei :

$$S = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 w_i = \min \tag{9}$$

în care w_i sînt funcţii pondere iar n numărul de puncte alese pe contur. Anulînd derivatele sumei S în raport cu cei cinci parametri a, b, c, d, e se obţine sistemul de ecuaţii din care rezultă parametrii elipsei.

2.1.2. Determinarea coeficienţilor dezvoltării în serie. Ecuaţia (4) o putem scrie în coordonate polare sub forma :

$$z_1 = \sum_{j=-1}^{m-2} (A_{-j} + \mathrm{i} B_{-j}) r^{-j} (\cos j\varphi - i \sin j\varphi) \tag{10}$$

Pentru determinarea coeficienţilor $C_{-j} = A_{-j} + \mathrm{i} B_{-j}$ împărţim cercul $|\zeta| = 1$ în $2m$ părţi egale (unde $m = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$) şi alegem două sisteme de puncte :

1) pare, pentru argument de forma $\varphi_{2j} = \dfrac{2j\pi}{m}$

2) impare, pentru argument de forma $\varphi_{2j-1} = \dfrac{(2j-1)\,\pi}{m}$ (11)

Dacă se notează $z_1(\varphi_k) = x_k + iy_k$ şi se ţine seama că $r = 1$, egalitatea (10) devine :

$$\begin{aligned} x_k &= \sum_{j=-1}^{m-2} A_{-j} \cos j\varphi_k + B_{-j} \sin j\varphi_k \\ & \qquad\qquad k = 1, 2, \ldots, m \\ y_k &= \sum_{j=-1}^{m-2} -A_{-j} \sin j\varphi_k + B_{-j} \cos j\varphi_k \end{aligned} \tag{12}$$

Pentru a determina coeficienţii A_{-j}, B_{-j} se va folosi ortogonalitatea funcţiei trigonometrice cu argument discret în cazul datelor egal distanţate [4]. Se înmulţeşte prima ecuaţie cu $\cos j\varphi_k$, a doua cu $-\sin j\varphi_k$, se sumează după k şi se obţine :

$$\begin{aligned} A_{-j} &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x_k \cos j\varphi_k - y_k \sin j\varphi_k \\ & \qquad\qquad j = -1, 0, 1, \ldots, m-2 \\ B_{-j} &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x_k \sin j\varphi_k + y_k \cos j\varphi_k \end{aligned} \tag{13}$$

Pentru plecare se atribuie lui x_k, y_k valorile coordonatelor ale m puncte de pe conturul C şi se determină $A_{-j}^{(0)}$ şi $B_{-j}^{(0)}$ pentru φ_k impare. Cu relaţiile (12) se calculează punctele $(x_k^{(1)}, y_k^{(1)})$ corespunzătoare valorilor φ_k impare. Acestea în general nu se vor suprapune peste conturul C şi de aceea se proiectează punctele $(x_k^{(1)}, y_k^{(2)})$ pe C obţinînd $(x_k^{(1a)}, y_k^{(1a)})$. Cu acestea se determină coeficienţii $A_{-j}^{(1)}$, $B_{-j}^{(1)}$ pentru valorile φ_k pare.

Se determină apoi $(x_k^{(2)}, y_k^{(2)})$ care se vor apropia mai mult de C decît $(x_k^{(1)}, y_k^{(1)})$, dar încă nu se suprapun peste C. Se proiectează $(x_k^{(2)}, y_k^{(2)})$ pe C obținînd $(x_k^{(2a)}, y_k^{(2a)})$ cu care se va determina $A_j^{(2)}$, $B_j^{(2)}$ pentru φ_k impare. Procesul iterativ continuă pînă cînd apropierea de curba C e considerată suficientă.

2.2. DETERMINAREA DISTRIBUȚIEI DE VITEZE

Pentru calcularea distribuției de viteze în rețea e necesar să se determine mai întîi distribuția în jurul cercului. De aceea se va calcula potențialul complex în planul $\mathcal{K}$, folosindu-se proprietatea ca prin transformarea conformă circulația și debitul rămîn constante. La trecerea din planul $\mathcal{R}$ în planul $\mathcal{E}$ condițiile de la infinit (amonte și aval) din planul rețelei se traduc prin rotosursele (surse și vîrtejuri) plasate în punctele $(R, 0)$, $(-R, 0)$ și mai departe în planul cercului $\mathcal{K}(\zeta)$ în punctele transformate A și B (fig. 2). Deoarece conturul este linie de curent, vor trebui adăugate rotosurse imagine în punctele H și G, simetricele lui B și A față de cerc [5]. La aceste rotosurse se adaugă efectul circulației Γ' create ca urmare a interacțiunii dintre fluid și rețea. Folosind notația $\varphi_1 = \lambda - i_\infty$ potențialul complex în planul $\mathcal{K}$ este [5]:

$$F(\zeta) = \frac{tV_\infty}{2\pi}\left[e^{i\varphi_1}\ln\frac{\zeta-\zeta_B}{\zeta-\zeta_A} + e^{-i\varphi_1}\ln\frac{\zeta-\zeta_H}{\zeta-\zeta_G}\right] - \frac{i\Gamma'}{4\pi}\ln\frac{(\zeta-\zeta_A)(\zeta-\zeta_B)}{(\zeta-\zeta_G)(\zeta-\zeta_H)} + \text{ct.} \tag{14}$$

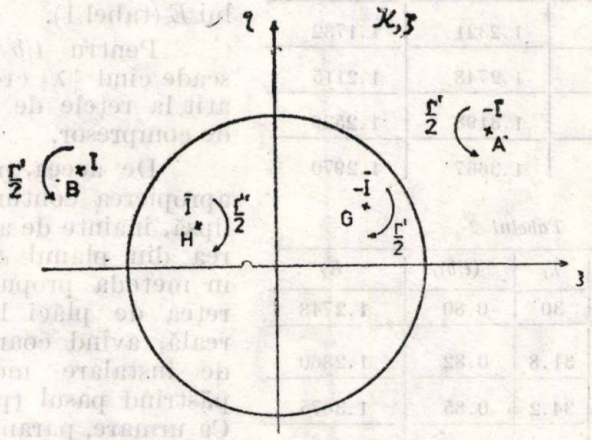


Fig. 2

Pentru determinarea circulației Γ' se utilizează condiția lui Jukovski de a avea viteză finită în bordul de fugă:

$$\left.\frac{dF}{d\zeta}\right|_{b.f.} = 0 \tag{15}$$

Astfel potențialul complex în planul $\mathscr{K}$ este determinat cu excepția unei constante aditive. Putem deci calcula viteza pe cerc :

$$W = \frac{dF}{d\zeta} \tag{16}$$

iar viteza de profil rezultă din relația cunoscută :

$$w_P = \frac{W}{\frac{dz_p}{d\zeta}}. \tag{17}$$

3. PROGRAMUL DE CALCUL ȘI REZULTATE

Calculul funcției care transformă conform exteriorul cercului unitate în rețeaua de profile este cu atît mai rapid cu cît conturul C din planul $\mathscr{C}$ este mai apropiat de cerc, fapt care depinde la rîndul său de depărtarea dintre conturul E și elipsa proximă.

Tabelul 1

$\lvert\lambda\rvert$	15	30	45
t/b	R	R	R
0.65	1.1854	1.1547	1.1069
0.7	1.2258	1.1920	1.1382
0.75	1.2686	1.2321	1.1732
0.8	1.3135	1.2748	1.2115
0.85	1.3604	1.3198	1.2529
0.9	1.4089	1.3667	1.2970

Tabelul 2

θ	c/c_f	λ_f	$(t/b)_f$	R_f
0.	1.	30	0.80	1.2748
1.84	1.025	31.8	0.82	1.2860
4.20	1.068	34.2	0.85	1.3075
5.49	1.105	35.5	0.88	1.3297
7.77	1.126	37.8	0.90	1.3347
9.25	1.148	39.2	0.92	1.3439

Pentru λ constant, pe măsură ce desimea rețelei crește (t/b scade) R scade, ducînd la o deformare mai mare a conturului E (tabel 1).

Pentru t/b constant, R scade cînd $|\lambda|$ crește (tabel 1), atît la rețele de turbină cît și de compresor.

De aceea, pentru a mări apropierea conturului E de elipsă, înainte de a se face trecerea din planul $\mathscr{E}$ în planul $\mathscr{C}$ în metoda propusă se alege o rețea de plăci legată de cea reală, avînd coarda și unghiul de instalare modificate, dar păstrînd pasul (periodicitatea). Ca urmare, parametrii transformării (1) se modifică putîndu-se aplica unei rețele cu profile de grosime și curbură mare.

Pentru unghiuri θ pozitive (fig. 3) se obține o scădere a desimii dar o creștere a unghiului de instalare, însă fiindcă ponderea lui t/b este mai mare decît a lui λ, se obține o creștere a lui R (tabel 2).

Coarda rețelei modificate trebuie aleasă astfel încît să se respecte condiția :

$$|y| < \frac{t}{2} \cos \lambda \tag{18}$$

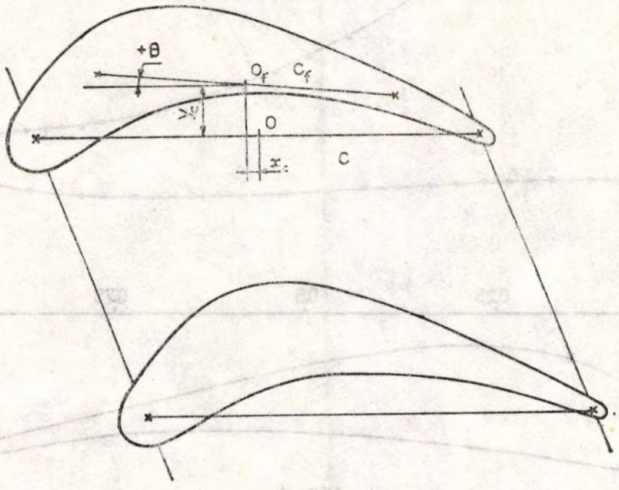


Fig. 3

unde y sînt coordonatele profilului. Cu condiția (18) profilul E nu are puncte la infinit. Față de coarda fictivă, relația (18) se scrie :

$$|(x - x_c) \sin \theta + (y - y_c) \cos \theta| < \frac{t}{2} \cos (\lambda + \theta) \tag{19}$$

unde (x_c, y_c) este centrul corzii fictive (fig. 3).

Prin alegerea parametrilor θ, (x_c, y_c) în afară de grăbirea convergenței se permite studiul unor profile de curbură și desime mai mare.

La obținerea conturului E cu metoda Newton—Raphson, în programul de calcul s-a impus o eroare maximă de $\varepsilon = 10^{-5} b$.

Procesul iterativ de determinare a coeficienților seriei (4) se oprește dacă $\frac{1}{b} \sum_{i=1}^{m} d_i < 0{,}01$, unde d_i este distanța între punctul $z_1(\zeta_i)$ și proiecția lui pe curba C.

Acestea sînt singurele două surse de erori ale programului. Datorită condițiilor restrictive impuse, verificarea care se face transformînd conform exteriorul cercului unitate în rețeaua de profile dată dovedește determinarea foarte precisă a funcției $z_p(\zeta)$.

Ca urmare și distribuția de viteze, pentru ipotezele în care se face calculul, se obține corect. Pentru verificare, s-a făcut o comparație (fig. 4) pentru profile obținute cu metoda dată în [1], pentru care se cunoaște deci soluția exactă. În acest fel, s-a verificat că reprezentarea profilului

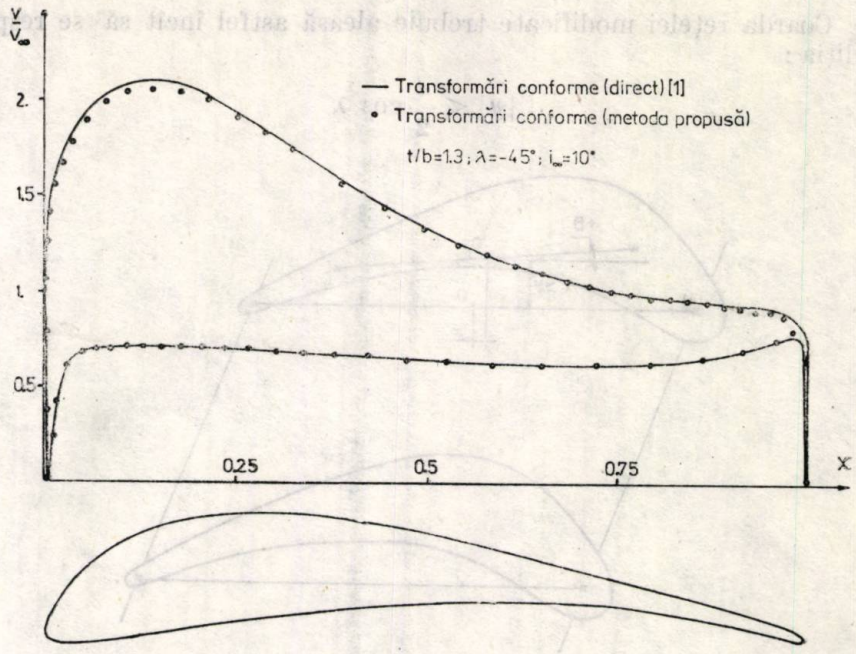

V/V∞
2.
1.5
1.
0.5
0.25
0.5
0.75
X
— Transformări conforme (direct) [1]
• Transformări conforme (metoda propusă)
t/b=1.3 ; λ=-45° ; i∞=10°

Fig. 4

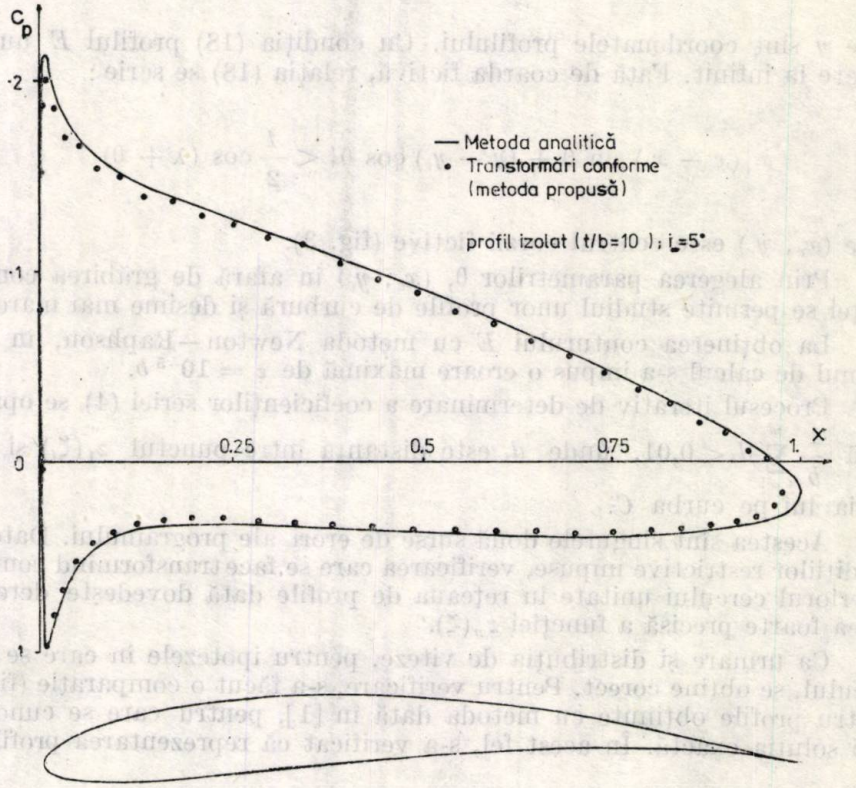

Cp
-2
-1
0
1
0.25
0.5
0.75
1.
X
— Metoda analitică
• Transformări conforme
(metoda propusă)
profil izolat (t/b=10) ; i∞=5°

Fig. 5

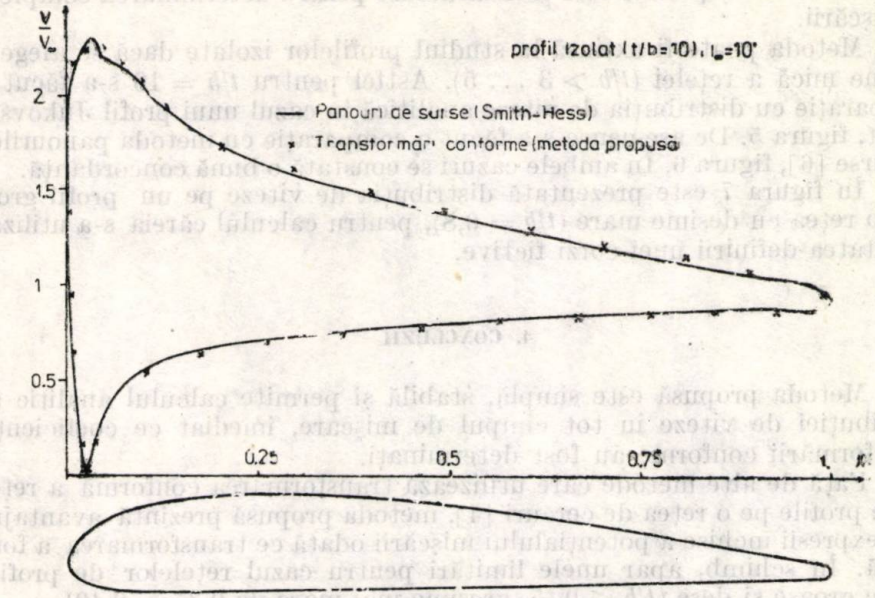

V/V∞
profil izolat (t/b=1.0), i∞=10°
Panouri de surse (Smith-Hess)
Transformări conforme (metoda propusă)
2
1.5
1
0.5
0.25
0.5
0.75
1.
x

Fig. 6

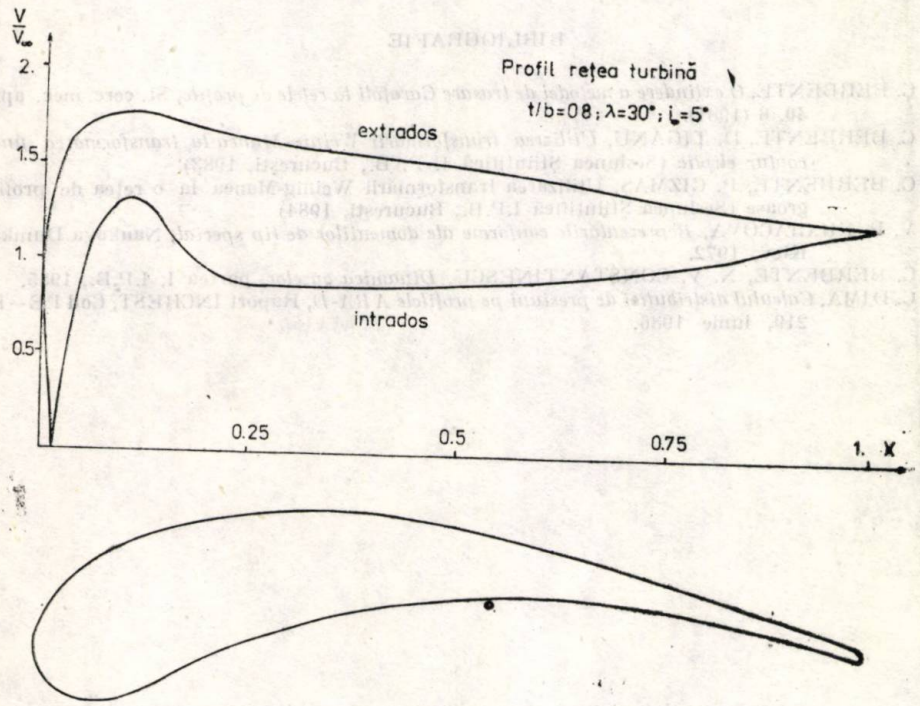

V/V∞
Profil rețea turbină
t/b=0.8; λ=30°; i∞=5°
extrados
intrados
2.
1.5
1.
0.5
0.25
0.5
0.75
1.
x

Fig. 7

dat prin 40 — 60 puncte este satisfăcătoare pentru determinarea completă a mişcării.

Metoda poate fi extinsă la studiul profilelor izolate dacă se alege o desime mică a reţelei ($t/b > 3 \ldots 5$). Astfel pentru $t/b = 10$ s-a făcut o comparaţie cu distribuţia de viteze analitică în cazul unui profil Jukovski izolat, figura 5. De asemenea s-a făcut o comparaţie cu metoda panourilor de surse [6], figura 6. În ambele cazuri se constată o bună concordanţă.

În figura 7 este prezentată distribuţia de viteze pe un profil gros, într-o reţea cu desime mare ($t/b = 0{,}8$), pentru calculul căreia s-a utilizat facilitatea definirii unei corzi fictive.

4. CONCLUZII

Metoda propusă este simplă, stabilă şi permite calculul analitic al distribuţiei de viteze în tot cîmpul de mişcare, imediat ce coeficienţii transformării conforme au fost determinaţi.

Faţă de alte metode care utilizează transformarea conformă a reţelei de profile pe o reţea de cercuri [4], metoda propusă prezintă avantajul unei expresii închise a potenţialului mişcării odată ce transformarea a fost găsită. În schimb, apar unele limitări pentru cazul reţelelor de profile foarte groase şi dese ($t/b < 0{,}5$, grosime mai mare de 0,35 — 0,40).

Primită în redacţie la 20 martie 1990

BIBLIOGRAFIE

1. C. BERBENTE, *O extindere a metodei de trasare Carafoli la reţele de profile*, St. cerc. mec. apl., **40**, 6 (1981).
2. C. BERBENTE, D. ŢIGANU, *Utilizrea transformării Weinig-Manea la transformarea unui contur eliptic* (Sesiunea Ştiinţifică I. P. B., Bucureşti, 1983).
3. C. BERBENTE, P. CIZMAŞ, Utilizarea transformării Weinig-Manea la o reţea de profile groase (Sesiunea Ştiinţifică I.P.B., Bucureşti, 1984)
4. V. P. FILCIACOVA, *Reprezentările conforme ale domeniilor de tip special*, Naukova Dumka, Kiev, 1972.
5. C. BERBENTE, N. V. CONSTANTINESCU, *Dinamica gazelor*, partea I, I.P.B., 1985.
6. C. DIMA, *Calculul distribuţiei de presiuni pe profilele ARA-D*, Raport INCREST, Cod PE—E-219, iunie 1986.

MODELAREA ADAPTIVĂ ASISTATĂ DE CALCULATOR A AVANSULUI SAPEI DE FORAJ

de GH. CREMENESCU și I. DUMITRESCU

Institutul de Petrol și Gaze, Ploiești

Prin programele de aplicație implementate pe structura ierarhizată de conducere în regim de ghid operator a procesului de foraj (constituită din microcalculator de proces și minicalculator universal), se achiziționează în timp real datele măsurate de traductoare, apoi se prelucrează acestea în timp independent, pentru adaptarea modelului matematic al procesului de dislocare la condițiile concrete de lucru ale sapei pe talpă.

Programele IDENT și MODEL scrise în limbaj FORTRAN 77 prelucrează după metode ale statisticii matematice datele experimentale achiziționate în testele de foraj, apoi afișează structura și coeficienții modelului în funcție de tipul de dislocare a rocii.

1. ARGUMENTE PENTRU MODELAREA ADAPTIVĂ

În condițiile extinderii forajului de mare adîncime, de pe platformele marine și a forajului la echilibru, cercetarea actuală are ca obiective majore creșterea securității și eficienței economice a procesului de dislocare mecanică a rocilor.

Această opțiune este justificată de faptul că decompoziția temporală a procesului de forare — sistem tehnic cu structură mare — evidențiază faptul că procesul de dislocare are cea mai mare pondere din costul construcției și durata execuției sondei [3, 5].

Complexitatea deosebită a procesului, numărul mare de variabile, modelele matematice neliniare cu parametri variabili aleator incumbă, pentru rezolvarea acestor obiective, ridicarea nivelului tehnic al tehnologiei forării sondelor prin [4, 7]:

— măsurarea și achiziționarea tuturor informațiilor posibile privind formațiunile traversate, desfășurarea procesului de foraj și funcționarea echipamentului de foraj;

— prelucrarea în timp util a tuturor informațiilor disponibile în scopul elaborării unor modele matematice cît mai fidele realității, al supravegherii și al diagnosticării funcționării procesului de foraj, al asigurării securității echipamentului și brigăzii de foraj, al elaborării unor programe de lucru îmbunătățite;

— extinderea și perfecționarea mijloacelor de automatizare utilizate în foraj, la nivelul tehnicii contemporane;

— implementarea microcalculatoarelor și minicalculatoarelor în configurație „on-line", pentru conducerea procesului de foraj pe baze profund științifice.

Pătrunderea întîrziată a calculatoarelor electronice și a structurilor evoluate de conducere, în domeniul forării sondelor, a fost cauzată de lipsa sau confienta scăzută a modelului matematic al procesului.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 49, NR. 5—6, 1990, P. 477—488

Identificarea procesului de dislocare, în vederea conducerii cu calculatorul, necesită parcurgerea mai multor etape [1, 4]:

— definirea scopului căruia să-i servească modelul;

— definirea sistemului căruia i se elaborează modelul;

— precizarea variabilelor endogene și exogene, a restricțiilor tehnice și tehnologice semnificative;

— elaborarea modelului matematic al procesului, verificarea adecvanței și perfecționarea modelului prin „confruntarea" cu originalul.

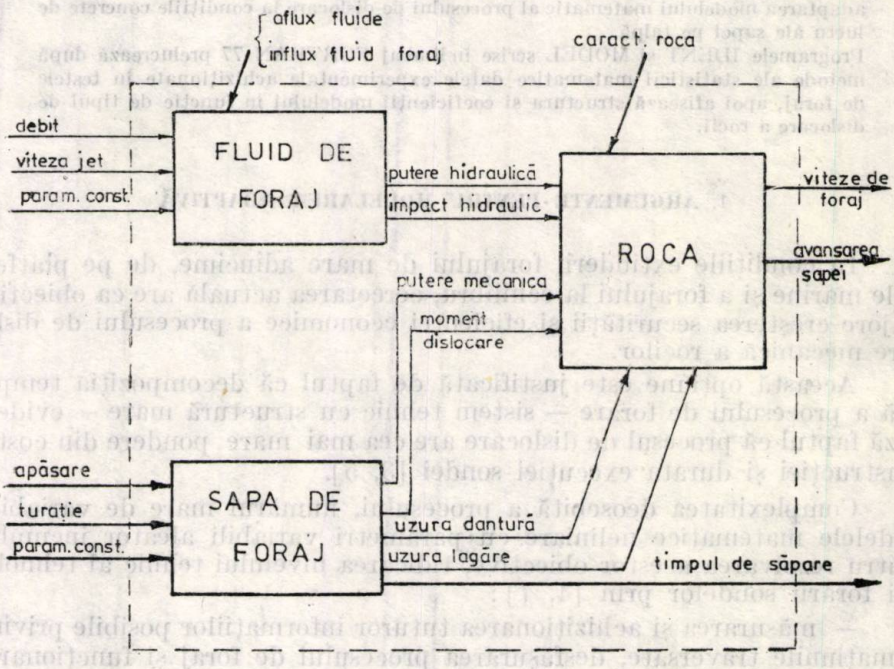


Fig. 1

Analiza în concepție sistemică a procesului de dislocare evidențiază o structură constituită din trei subsisteme: sapa de foraj, fluidul de foraj și roca, interconectate între ele prin variabile exogene și endogene, ca în figura 1.

Ca atare, modelarea matematică a procesului de dislocare, chiar în timpul lucrului sapei, reprezintă o etapă de mare răspundere, întrucît problema conducerii cu calculatorul este finalizată pe baza modelului și nu a procesului fizic, iar felul în care modelul reflectă realitatea procesului contribuie la succesul activității de conducere.

Modelul procesului de dislocare este variabil aleator în timp, ca urmare a acțiunii perturbațiilor la care este supus subsistemul sapă-rocă (caracteristicile fizico-mecanice ale formațiunilor forate, uzura danturii și uzura lagărelor sapei, presiunea fluidelor din porii formațiunilor, etc.).

Problema de modelare adaptivă, prin care modelul este „actualizat" la condițiile concrete de lucru ale sapei pe talpă, se rezolvă sub asistența unui calculator în configurație „on-line" cu procesul. Prin sistemul de programe de aplicație se achiziționează datele experimentale ale testului de foraj, apoi se prelucrează acestea după o procedură originală bazate pe metode ale statisticii matematice și se deduce modelul adaptiv al procesului de dislocare.

2. STRUCTURA IERARHIZATĂ A ECHIPAMENTULUI DE CALCUL IMPLEMENTAT ÎN FORAJUL SONDELOR

După modelul cum se realizează schimbul de informație dintre calculatorul de proces și elementele dispozitivului de automatizare (traductoarele și elementele de execuție), startegia de conducere în regim de ghid operator are cea mai mare pondere în domeniul realizărilor de sisteme de conducere evoluată a procesului de foraj.

Pentru rezolvarea situațiilor conflictuale asupra resurselor sistemului între programele de aplicație ale strategiei de conducere în regim de ghid operator și programele de modelare adaptivă (mari consumatoare de timp și resurse), se prezintă în figura 2 o structură de conducere ierarhizată din punct de vedere hardware, pe două niveluri [4].

Această structură este mai flexibilă decît cea mononivel și permite soluții eficiente de conducere și reconfigurare software pe nivelul superior sau extinderi ulterioare.

Nivelul inferior al structurii constă dintr-un microcalculator specializat de proces cu sistem de operare în timp real, care rezolvă sarcini ale conducerii în regim de ghid operator, ca :

- achiziția datelor analogice și numerice de la traductoare;
- testarea încadrării acestora în limitele admise;
- prelucrarea primară a datelor;
- protocolarea periodică sau la cerere a datelor achiziționate și calculate;
- semnalizarea și avertizarea în caz de funcționare anormală a procesului;
- comunicația cu operatorul de foraj și cu nivelul superior.

Programele de aplicație organizate în taskuri sînt scrise în limbaj de asamblare, apoi crossasamblate în cod obiect pe un sistem de dezvoltare cu microprocesor și înscrise în memoria rezidentă a microcalculatorului. Sistemul de operare în timp real planifică taskurile pentru execuție, tratează întreruperile, sincronizează execuția în timp a taskurilor, exclude accesul simultan al mai multor taskuri la aceeași resursă, asigură comunicația între taskuri, tratează operațiile de intrare/ieșire.

Configurația microcalcultorului cuprinde următoarele echipamente :

UCP — unitatea centrală de prelucrare microprocesor de 8 biți (MMN 80, MMN 8080, Z 80);

MEM — memorie de 16 KO de tip RAM și EPROM pentru înscrierea programelor și datelor;

SINT — sistemul de întreruperi suspendă activitatea microprocesorului pentru a asista transferul de informație calculator/periferice;

CTR — ceasul de timp real furnizează semnalele de întrerupere la momente de timp prestabilite prin programul de aplicație;

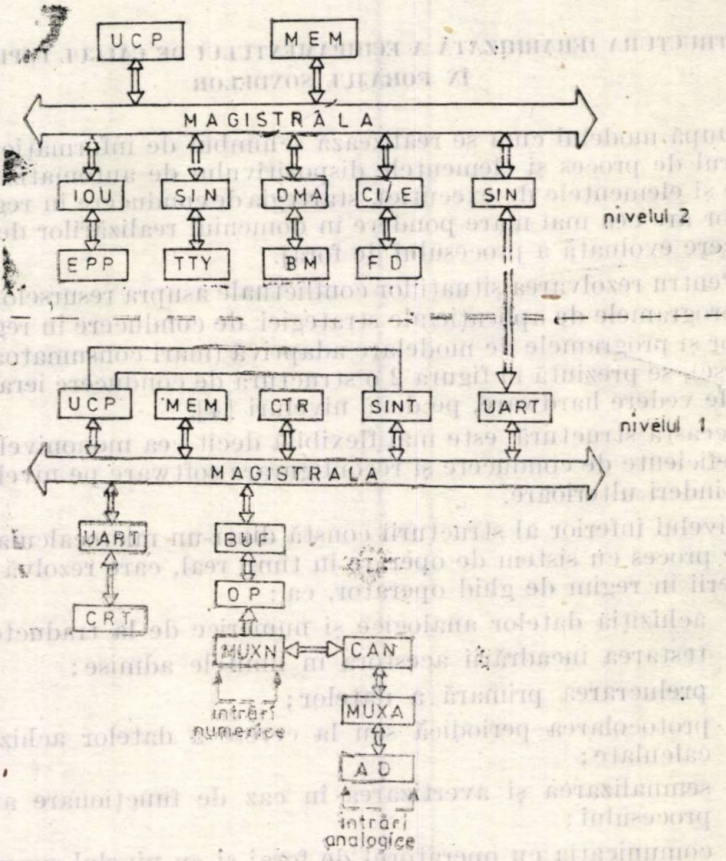


Fig. 2

CRT — consola sistemului tip display permite comunicația dintre operator și microprocesor prin interfața serială asincronă UART;

SIPC — sistemul interfață proces-calculator cu intrări analogice în tensiune 0 ... 5 V și intrări de tip „tot sau nimic" cu semnale de tensiuni tip TTL. Prin multiplexoroul analogic MUXA intrările analogice sînt cuplate la convertorul analog/numeric CAN, iar cele numerice sînt preluate de multiplexorul numeric MUXN. Valorile numerice sînt transmise prin optocuploarele OP și apoi memorate în bufferele BUF pînă ce se transferă pe magistrala microcalculatorului;

MAGISTRALA — conține liniile de date, de adrese și de comandă ale microcalculatorului.

Nivelul superior al structurii constă dintr-un minicalculator universal care rezolvă în timp independent sarcinile complexe de modelare adaptivă și optimizare a procesului de foraj, pe baza datelor achiziționate de nivelul inferior.

Configurația standard a minicalculatorului cuprinde următoarele echipamente :

UCP — unitatea centrală de prelucrare cu microprocesor de 8 biți ;

MEM — memorie cu capacitatea de 64 KO, din module RAM și EPROM ;

IOU — interfață paralelă pentru comunicația cu echipamentele periferice cu transfer paralel de informație EPP ;

SIN — interfața serială pentru comunicația cu consola TTY și cu nivelul inferior ;

DMA, CI/E — module „masters" pentru transferul direct memorie/bandă magnetică sau memorie/floppy-disck.

Integrarea funcțională a celor două niveluri hardware și coordonarea deciziilor de conducere pentru structura ierarhizată de echipamente de calcul, constituie o soluție flexibilă de sistem de conducere evoluată a procesului de foraj.

3. STRUCTURA MODELULUI PARAMETRIC AL AVANSULUI SAPEI

Informația apriorică a procedurii de identificare o reprezintă structura modelului matematic al procesului de dislocare, prezentată în literatura de specialitate [3, 5, 6].

În ecuația vitezei mecanice se evidențiază influența parametrilor mecanici (W — apăsarea pe sapă, n — turația sapei) și a uzurii danturii (variabilă endofenă perturbatoare), iar acțiunea celorlalte variabile (parametrii hidraulici și variabilele perturbatoare) se concentrează în constanta de forabilitate C_f. În funcție de mecanismul dislocării, efectul apăsării asupra vitezei mecanice este prezentat grafic în figura 3, iar modelul are structura :

— zona a I-a, a dislocării superficiale,

$$v_1 = C_{f1} \cdot W^{k_1} \cdot n^{\lambda_1} \cdot f_3(D) ; \quad (1)$$

— zona a II-a, a dislocării volumice prin oboseală,

$$v_2 = C_{f2} \cdot (W - W_0) \cdot n^{\lambda_2} \cdot f_3(D) ; \quad (2)$$

— zona a III-a, a dislocării volumice excesive,

$$v_3 = C_{f3} \cdot W^{k_3} \cdot n^{\lambda_3} \cdot f_3(D) ; \quad (3)$$

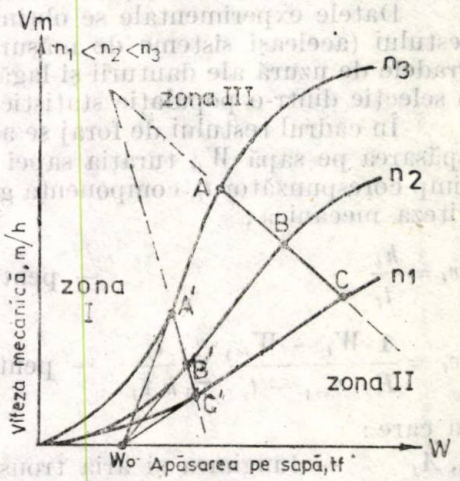


Fig. 3

în care :

$k_1 > 1, k_2 \simeq 1, k_3 < 1$ — exponenții apăsării ;

$\lambda_1 < 1, \lambda_2 < 1, \lambda_3 < 1$ — exponenții turației ;

C_{f1}, C_{f2}, C_{f3} — constantele de forabilitate ;

W_0 — pragul de apăsare ;

$f_3(D)$ — funcția de uzură a danturii sapei ;

W, n — apăsarea și turația sapei ;

D — gradul de uzură al danturii sapei.

În punctele A, B, C este satisfăcută condiția de echilibru între viteza de dislocare și viteza de evacuare a detritusului de pe talpa sondei. Aceste puncte se înscriu pe dreapta de performanță a lui Bingham, corespunzînd unui consum energetic specific minim.

Ca urmare a uzurii danturii și a accentuării proprietăților plastice ale rocilor cu adîncimea, punctul de funcționare trece din domeniul dislocării volumice în domeniul dislocării superficiale, deci parametrii modelului vitezei mecanice se schimbă în timp și se impune „actualizarea" periodică a acestora.

4. PRELUCRAREA STATISTICĂ A DATELOR EXPERIMENTALE

Datele experimentale achiziționate de microcalculatorul de pe nivelul unu în cursul testului de foraj, sînt prelucrate după metode statistice de programele implementate pe minicalculatorul de pe nivelul doi al structurii ierarhizate.

Testul de foraj se planifică la începutul marșului după ce s-a rodat sapa și pe parcursul marșului. În acest sens, sînt adecvate testul „drill off" propus de Lubinski și testul cronometrării timpului de săpare [3].

Datele experimentale se obțin în condiții identice pe toată durata testului (aceleași sisteme de măsurare, condiții hidraulice neschimbate, gradele de uzură ale danturii și lagărelor sapei neschimbate) și formează o selecție dintr-o populație statistică cu repartiție teoretică normală.

În cadrul testului de foraj se achiziționează date pentru variabilele : apăsarea pe sapă W_i, turația sapei n_i, avansarea sapei h_i, intervalul de timp corespunzător t_i, componența garniturii de foraj. Apoi, se calculează viteza mecanică ;

$$v_i = \frac{h_i}{t_i} \quad \text{— pentru testul cronometrării ;} \tag{4}$$

$$v_i = \frac{1}{E} \frac{W_i - W_{i+1}}{t_{i+1} - t_i} \sum_{j=1}^{m} \frac{l_j}{kA_j} \quad \text{— pentru testul Lubinski ;} \tag{5}$$

în care :

l_i, A_j — lungimea și aria tronsonului „j" al garniturii de foraj ;

k — factorul de rigiditate al garniturii de foraj ;

m — numărul de tronsoane de prăjini al garniturii de foraj;
E — modulul de elasticitate al garniturii de foraj.

Procedura de prelucrare a datelor (v_i, W_i) se desfășoară după schema logică de principiu din figura 4.

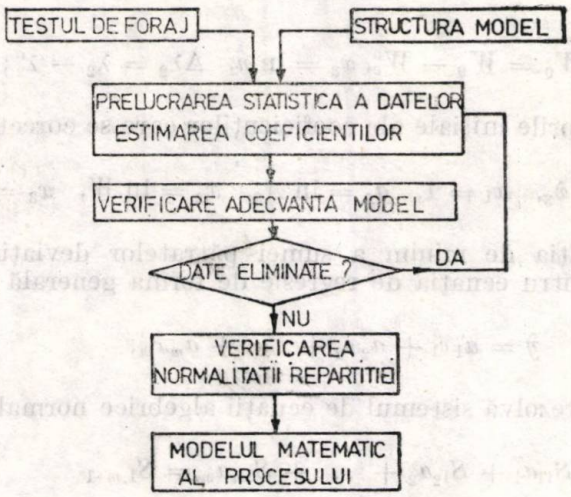


Fig. 4

Estimarea coeficienților din ecuația vitezei mecanice, pe baza selecției finite a datelor experimentale se face prin metoda celor mai mici pătrate și constă în rezolvarea problemei de optimizare staționară fără restricții [1, 2, 4]:

$$\hat{A} = \min_{A} \left\{ \sum_{i=1}^{n} (v_i - F(W_i, n_i, A))^2 \right\}, \tag{6}$$

în care:

A — vectorul cu coeficienții modelului;
$\hat{A}$ — vectorul cu estimațiile coeficienților;
F — funcția de regresie a vitezei mecanice;
n — numărul de date supuse prelucrării.

Soluția problemei de minimizare se obține din anularea componentelor gradientului funcției obiectiv:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(W_i, n_i, A)}{\partial A} \cdot F(W_i, n_i, A) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(W_i, n_i, A)}{\partial A} \cdot v_i, \tag{7}$$

în care numărul de ecuații este egal cu numărul de coeficienți din vectorul A.

Funcțiile de regresie ale vitezei mecanice pentru cele trei zone ale dislocării sînt :

$$\hat{y}_1 = \ln \hat{v}_1, \quad x_1 = 1, \quad a_1 = \ln A_1, \quad x_2 = \ln W, \; x_3 = \ln n \; ;$$

$$\hat{y}_2 = \ln \hat{v}_2, \; x_1 = 1, \; a_2 = \ln A_2, \quad \Delta a_2 = a_2 - a_2^0, \; x_2 = \frac{-1}{W - W_0^0},$$

$$\Delta W_0 = W_0 - W_0^0, \; x_3 = \ln n, \quad \Delta\lambda_2 = \lambda_2 - \lambda_2^0;$$

a_2^0, W_0^0, λ_2^0 — valorile inițiale ale coeficienților care se corectează iterativ ;

$$\hat{y}_3 = \ln \hat{v}_3, \quad x_1 = 1, \quad a_3 = \ln A_3, \quad x_2 = \ln W, \quad x_3 = \ln n \; .$$

Din condiția de minim a sumei pătratelor deviațiilor variabilei dependente, pentru ecuația de regresie de forma generală :

$$\hat{y} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m, \tag{20}$$

se deduce și se rezolvă sistemul de ecuații algebrice normale :

$$\begin{aligned} S_{11}a_1 + S_{12}a_2 + \ldots + S_{1m}a_m &= S_{1,m+1} \\ S_{21}a_1 + S_{22}a_2 + \ldots + S_{2m}a_m &= S_{2,m+1}, \\ &\vdots \\ S_{m1}a_1 + S_{m2}a_2 + \ldots + S_{mm}a_m &= S_{m,m+1}, \end{aligned} \tag{21}$$

în care :

$$S_{jk} = \sum_{i=1}^{k_0} x_{ji} \cdot x_{ki}, \qquad j = 1 \ldots m, \; k = 1 \ldots m \; ;$$

$$S_{j,m+1} = \sum_{i=1}^{k_0} x_{ji} \cdot y_i, \quad j = 1 \ldots m \; ;$$

$$S_{jk} = S_{kj}, \qquad j = 1 \ldots m \; ; \; k = 1 \ldots m \; ;$$

k_0 — numărul de date experimentale alocate funcției de regresie ;
m — numărul de coeficienți necunoscuți ai ecuației de regresie.

Se cercetează adecvanța modelului la datele experimentale prin analiză dispersională cu :

— criteriul de concordanță a lui Gauss

$$TG = \frac{1}{n - m} \sum_{i=1}^{n} (v_i - \hat{v}_i)^2, \tag{22}$$

— coeficientul de corelație multiplă

$$R^2 = \sum_{i=1}^{k_0} (\hat{y} - \bar{y})^2 \Big/ \sum_{i=1}^{k_0} (\hat{y}_i - \bar{y}), \tag{23}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{k_0} \sum_{i=1}^{k_0} y_i, \tag{24}$$

în care :

k_0 — numărul de date experimentale alocate unei funcții de regresie ;
$\bar{y}$ — valoarea medie a variabilei dependente transformate ;
y_i, $\hat{y}_i$ — valoarea variabilei dependente transformate, respectiv calculate cu funcția de regresie liniarizată (una din 14 ... 19) ;
n — numărul total de date experimentale supuse prelucrării ;
m — numărul de coeficienți ai modelului vitezei mecanice ;
v_i, $\hat{v}_i$ — valoarea vitezei mecanice experimentale, respectiv calculate cu funcția de regresie neliniară (una din 8 ... 13).

Alocarea dinamică prin program a datelor experimentale pe cele trei funcții de regresie (8, 9, 10 — pentru testul Lubinski sau 11, 12, 13 — pentru testul cronometrării), permite alegerea variantei optime cu modelul cel mai adecvant, după relațiile :

$$\min\{TG_1, TG_2 \ldots TG_j\},$$
$$\max\{R_1, R_2 \ldots R_j\}, \tag{25}$$

în care 1, 2 ... j sînt variantele cercetate.

Șirul statistic al abaterilor relative dintre valorile vitezei experimentale și cele calculate cu modelul adecvant

$$z_i = \frac{v_i - \hat{v}_i}{\hat{v}_i}, \quad i = 1 \ldots n; \tag{26}$$

se supune unui test statistic (testul Irwin sau testul Romanovski) pentru eliminarea datelor „aberante".

Dacă s-au eliminat date, se reia procedura de prelucrare (estimare coeficienți, analiză dispersională, test de eliminare) pentru șirul cu date experimentale „valide".

Ipoteza de repartiție normală a selecției mici a datelor experimentale „valide", se verifică cu testul Massey care se aplică șirului abaterilor relative normate ale vitezei mecanice

$$u_i = \frac{z_i - \bar{z}}{S}, \quad i = 1 \ldots n \tag{27}$$

$$\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} z_i, \tag{28}$$

$$S = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (z - \bar{z})^2 / n}, \tag{29}$$

în care :

$\bar{z}$ — media aritmetică de sondaj ;
S — abaterea medie pătratică de sondaj.

Dacă șirul statistic are distribuție normală, uzura danturii sapei nu s-a modificat pe durata testului de foraj.

Pentru distribuție nenormală, uzura danturii a crescut (deci $f_3(D)$ nu este constantă) și testul de foraj trebuie refăcut într-un timp mai scurt.

5. PROGRAME ȘI REZULTATE ALE MODELĂRII ADAPTIVE A AVANSULUI SAPEI

Procedura de modelare a avansului sapei de foraj este implementată în două programe scrise în limbaj FORTRAN 77, prezentate în lucrarea [4] :

IDENT — prelucrează datele testului Lubinski ;
MODEL — prelucrează datele testului cronometrării timpului de săpare.

Schema logică de principiu a programelor este prezentată în figura 5.

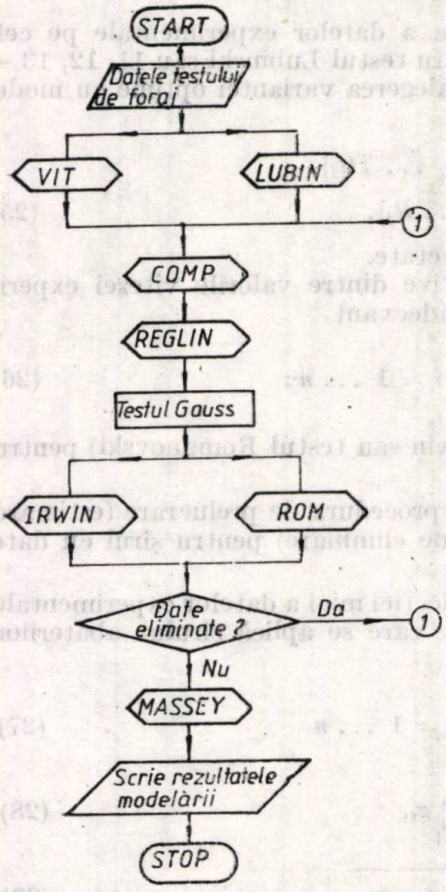


Fig. 5

Programele cuprind următoarele subprograme :

LUBIN, VIT — calculul vitezei mecanice după datele testului Lubinski, respectiv testului cronometrării timpului de săpare ;

REGLIN — liniarizarea funcțiilor de regresie și deducerea sistemului de ecuații algebrice normale ;

SIST — rezolvarea sistemului de ecuații după un hibrid între algoritmul Gauss—Jordan și un algoritm iterativ de îmbunătățire a soluțiilor ;

COMP — compactarea tablourilor cu date „valide" prelucrării și date eliminate ;

IRWIN, ROM — pentru eliminarea datelor „aberante" ;

ZINT — pentru calculul valorilor critice ale testelor statistice, prin interpolare polinomială cu grad variabil ;

```
IDENTIFICAREA PROCESULUI DE FORAJ
*********************************
   TABLOUL CU DATELE INITIALE
   --------------------------
NUMARUL DE DATE M=30
APASAREA (TF)          VITEZA MECANICA (M/H)
W( 1)= 0.35000E+01     V( 1)= 0.11300E+01
W( 2)= 0.40000E+01     V( 2)= 0.12500E+01
W( 3)= 0.45000E+01     V( 3)= 0.13800E+01
W( 4)= 0.50000E+01     V( 4)= 0.15000E+01
W( 5)= 0.55000E+01     V( 5)= 0.18000E+01
W( 6)= 0.60000E+01     V( 6)= 0.20000E+01
W( 7)= 0.65000E+01     V( 7)= 0.23700E+01
W( 8)= 0.70000E+01     V( 8)= 0.27500E+01
W( 9)= 0.75000E+01     V( 9)= 0.32500E+01
W(10)= 0.80000E+01     V(10)= 0.35000E+01
W(11)= 0.85000E+01     V(11)= 0.40800E+01
W(12)= 0.90000E+01     V(12)= 0.45000E+01
W(13)= 0.95000E+01     V(13)= 0.50000E+01
W(14)= 0.10000E+02     V(14)= 0.53200E+01
W(15)= 0.10500E+02     V(15)= 0.56200E+01
W(16)= 0.11000E+02     V(16)= 0.60000E+01
W(17)= 0.11500E+02     V(17)= 0.63800E+01
W(18)= 0.12000E+02     V(18)= 0.66200E+01
W(19)= 0.12500E+02     V(19)= 0.70000E+01
W(20)= 0.13000E+02     V(20)= 0.72500E+01
W(21)= 0.13500E+02     V(21)= 0.75000E+01
W(22)= 0.14000E+02     V(22)= 0.78200E+01
W(23)= 0.14500E+02     V(23)= 0.78700E+01
W(24)= 0.15000E+02     V(24)= 0.81000E+01
W(25)= 0.15500E+02     V(25)= 0.79000E+01
W(26)= 0.16000E+02     V(26)= 0.76200E+01
W(27)= 0.16500E+02     V(27)= 0.71000E+01
W(28)= 0.17000E+02     V(28)= 0.63200E+01
W(29)= 0.17500E+02     V(29)= 0.55000E+01
W(30)= 0.18000E+02     V(30)= 0.46000E+01

   FUNCTIILE DE REGRESIE ALESE:
   ============================
V=A*W**B . B.GE.1
V=A+B*W
V=A*W**B*EXP(C*W)
NUMARUL MINIM DE PUNCTE PENTRU FIECARE FUNCTIE:
N1=2   N2=3   N3=3

   PROCESUL DE DISLOCARE MECANICA ESTE REPREZENTAT ASTFEL:
   :::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::
   ECUATIILE PROCESULUI DE DISLOCARE
   *********************************
PENTRU W= 3.50- 8.00     V= 0.16728E+00*W** 0.14300E+01
PENTRU W= 8.50-14.00     V=-0.14356E+01+W* 0.66902E+00
PENTRU W=14.50-18.00     V= 0.39156E-25*W** 0.35287E+02*EXP(W*-0.23312E+01)


PUNCTE CARACTERISTICE ALE PROCESULUI DE DISLOCARE
-------------------------------------------------
PRAGUL DE APASARE WO= 0.21459E+01 (TF)
VITEZA MECANICA MAXIMA VM= 0.81000E+01 (M/ORA)
APASAREA VITEZEI MAXIME WM= 0.15000E+02 (TF)
APASAREA PENTRU SPALARE OPTIMA WOP= 0.14000E+02 (TF)
VITEZA PENTRU SPALARE OPTIMA VOP= 0.78200E+01 (M/ORA)
PENTRU CONDITIILE DE SPALARE DATE, DISLOCAREA
VOLUMICA ARE LOC LA APASARI MAI MARI DE  8.50(TF)
LA APASAREA DE 14.00(TF) PROCESUL DE DISLOCARE ESTE OPTIM
LA APASARI MAI MARI DE 14.50(TF) CONDITIILE DE
SPALARE DEVIN NESATISFACATOARE
LA APASARI MAI MARI DE 15.00(TF)
DEBITUL SI VITEZA JETURILOR SINT INSUFICIENTE
PENTRU SPALAREA TALPII
```

Fig. 6

ROMB — pentru integrarea numerică după metoda Romberg a funcției de probabilitate a variabilei aleatoare u :

$$\Phi(u_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{u_i} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \tag{30}$$

necesară în testul Massey.

Rezultatele finale ale modelării constă în :

- determinarea domeniului de variație al apăsării pentru dislocare superficială și volumică ;
- deducerea ecuației vitezei mecanice pe domeniile delimitate ;
- identificarea unor puncte caracteristice ale procesului de dislocare : pragul de apăsare, corelația optimă între parametrii mecanici și parametrii hidraulici ;
- determinarea apăsării pentru care condițiile hidraulice de la talpă devin insuficiente.

Pentru studiile de forabilitate întocmite de Gatlin, Potapov și Bingham s-au dedus modelele matematice ale vitezei de avansare a sapei.

Rezultatele finale ale unui exemplu de modelare sînt prezentate în listingul din figura 6.

6. CONCLUZII

Procedura de modelare prezentată „actualizează" modelul vitezei mecanice la condițiile concrete de lucru ale sapei pe talpă. Această identificare în timp real permite abordarea realistă a problemelor de conducere optimală și prognozare pe termen scurt a procesului de foraj.

Dotarea instalațiilor de foraj cu cabine tehnologice cu calculator, conectat „on-line" la proces, oferă posibilități practice de rezolvare a modelării adaptive în timp real a procesului de avansare a sapei de foraj.

Primit în redacție la 10 noiembrie 1989

BIBLIOGRAFIE

1. P. STOICA, ș.a., *Identificarea și estimarea parametrilor sistemelor*, Edit. Academiei, București, 1985.
2. I. CONSTANTINESCU ș.a., *Prelucrarea datelor experimentale cu calculatoare numerice*, Edit. Tehnică, București, 1980.
3. GR. TATU, *Conducerea optimală a sistemului de forare a sondelor de petrol și gaze*, Edit. Tehnică, București, 1978.
4. G. CREMENESCU, *Automatizarea forajului sondelor prin utilizarea calculatoarelor de proces*, Teză de doctorat, I.P.G., Ploiești, 1989.
5. G. GEORGESCU, *Tehnologia forării sondelor*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1983.
6. M. G. BINGHAM, *Un nou mod de abordare a problemei forabilității rocilor*, CDIPC (după OGJ 45—51/1964, 5—9 (1965).
7. J. E. KASTROP, *Automatic drilling data acquisition processing and telemetry*, Petr. Eng., 8(1971).

STUDIUL HIDRAULIC EXPERIMENTAL AL UNUI NOU TIP DE CLAPET ANTIRETUR

de M. POPESCU și P. VLASE
Institutul de Cercetări Hidrotehnice, București

În articol se prezintă rezultatele unui studiu hidraulic pentru un nou tip de clapet antiretur. Studiul a fost efectuat pe o instalație experimentală de laborator concepută și realizată în cadrul Institutului de Cercetări Hidrotehnice din București. Rezultatele studiului pun în evidență caracteristicile tehnico-funcționale îmbunătățite ale noului tip de clapet.

1. INTRODUCERE

Dispozitivul denumit „clapet (robinet) de închidere la curgerea inversă", care face parte în mod curent din schema unei instalații de pompare, prezintă o importanță aparte în funcționarea hidraulică a instalației, [1].

În practica hidrotehnică se utilizează în mod curent clapeții cu clapă orizontală. Acești clapeți, din punct de vedere constructiv au gabarit și greutate mare, iar în ceea ce privește funcționarea lor produc „șoc de clapet" puternic la închidere.

Recent în practica mondială a apărut un tip de clapet de construcție modernă cu clapă înclinată. Acesta este mai compact, mai simplu și are greutate mai mică față de tipul clasic. Astfel, pentru tipodimensiunea de 200 mm greutatea robinetului cu clapă înclinată reprezintă cca 25% din greutatea clapetului de tip clasic.

În schimb, robinetul cu clapă înclinată prezintă dezavantajul introducerii unor pierderi de sarcină hidraulică locală relativ mari.

În urma studiilor efectuate în cadrul Institutului de Cercetări Hidrotehnice — București s-a obținut, printr-o soluție constructivă originală, un nou tip de robinet cu clapă înclinată de formă hidrodinamică [2], care creează pierderi de sarcină hidraulică locală diminuate. Aceasta s-a realizat prin adaptarea la clapa robinetului a unei membrane subțiri în formă de calotă sferică, prevăzute cu orificii de egalizare a presiunii hidrostatice și hidrodinamice pe cele două fețe ale sale. Clapa împreună cu membrana adăugată formează un profil de formă lenticulară, astfel încît în noua configurație geometrică clapetul produce pierderi locale de sarcină hidraulică mai mici.

Noul tip de clapet este prezentat schematic în figurile 1 și 2.

S-au folosit următoarele notații:

— figura 1: 1 — corpul robinetului; 2 — axul clapei; 3 — clapă înclinată; 4 — membrană subțire în formă de calotă sferică prevăzută cu orificii;
— figura 2: 1 — membrană subțire în formă de calotă sferică; 2 — orificii practicate în membrană.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 49, NR. 5—6, 1990, P. 489—491

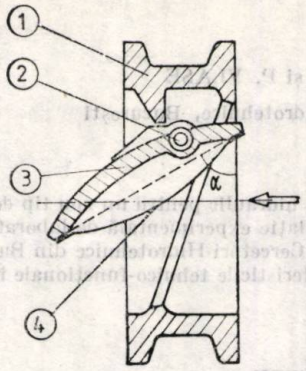


Fig. 1

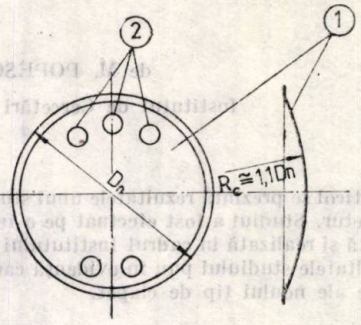


Fig. 2

2. INSTALAȚIA EXPERIMENTALĂ DE LABORATOR

Pentru efectuarea studiilor hidraulice experimentale, în cadrul Institutului de Cercetări Hidrotehnice — București s-a executat un stand de încercări, prezentat schematic în figura 3.

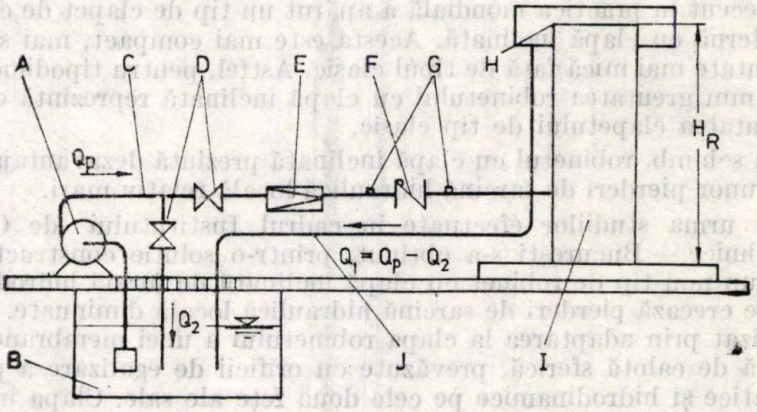


Fig. 3

Principalele părți componente ale standului sînt următoarele :

A — două electropompe tip Criș 150—a — montate în paralel, avînd fiecare caracteristicile de regim : $H_0 = 20$m ; $Q_0 = 50$ l/s și turația nominală $n = 1500$ rot/min ;

B — bazin de aspirație ;

C — conductă de refulare de diametru $d = 200$ mm ;

D — robineți de reglaj de tip „SERVOVEN" ;

E — debitmetru electromagnetic de tip DEM 90 ;

F — clapet antiretur ;

G — prize de presiune echipate cu robineți speciali de cuplare ;

H — deversor suplimentar de măsură ;

I — rezervor de nivel constant cu $H_R = 8$m și $D_R = 1{,}0$ m ;

J — conductă retur cu diametrul $d = 200$ mm.

Instalația experimentală este echipată cu aparatură de măsură care asigură următoarele nivele de precizie :

— pentru presiuni : 5×10^{-3} m.c.a.

— pentru debite : 0,5 l/s,

suficiente pentru măsurările efectuate în cadrul acestor studii.

3. REZULTATE EXPERIMENTALE

Pentru cele două variante de robinet cu clapă înclinată (fără membrană și cu membrană) studiate comparativ s-au efectuat măsurători la opt debite de regim în ecartul $Q_{min} = 16$ l/s ; $Q_{max} = 62$ l/s. Au rezultat următoarele valori ale coeficientului de pierdere de sarcină hidraulică locală $\zeta(\Delta h = \zeta v^2/2g)$ la diferite unghiuri α de înclinare a clapei :

— varianta fără membrană :

$\alpha = 60°$ $\zeta = 6{,}90$

$\alpha = 65°$ $\zeta = 5{,}10$

$\alpha = 70°$ $\zeta = 4{,}60$

— varianta cu membrană :

$\alpha = 60°$ $\zeta = 5{,}20$

$\alpha = 65°$ $\zeta = 3{,}90$

$\alpha = 70°$ $\zeta = 3{,}80$

4. CONCLUZII

Pentru tipul de robinet cu clapă înclinată de formă hidrodinamică [2] propus de autori, coeficientul pierderilor de sarcină hidraulică locală ζ s-a redus cu cca 20÷25% la unghiuri de înclinare a clapei $\alpha = 60° \div 70°$.

Primit în redacție la 5 august 1989

BIBLIOGRAFIE

1. M. POPESCU, D. ARSENIE, *Metode de calcul hidraulic pentru uzine hidroelectrice și stații de pompare*, Edit. tehnică, București, 1987.

2. M. POPESCU, P. VLASE ș.a., *Robinet antiretur cu clapă înclinată de formă hidrodinamică*, Brevet de invenție OSIM, nr. 98592 din 1989.

CORECȚIA DEBITULUI DE GAZE APARENTE LA O ÎNREGISTRARE ÎN BANDĂ A PARAMETRILOR

de AL. D. STAN

Institutul de Petrol și Gaze Ploiești

În practica măsurării gazelor prin .metoda orificiului de multe ori are loc o înregistrare „în bandă" a parametrilor hidrodinamici. În afară de faptul că ridică problema determinării parametrilor hidrodinamici medii, la înregistrarea în bandă trebuie efectuată corecția debitelor aparente de gaze. Coeficientul de corecție depinde de volumul fazei lichide (apă sau condens) antrenată de gaze precum și de elementele geometrice ale sistemului de măsură. Relația obținută teoretic verifică foarte bine datele înregistrate experimental la mai multe panouri de măsură prin care s-au scurs apă și gaze.

1. INTRODUCERE

În timpul exploatării sistemelor de extracție, colectare și transport ale gazelor naturale în masa acestora se află în unele cazuri și o fază lichidă (apă sau condens) care face ca debitul măsurat prin una dintre metodele utilizate să fie un debit aparent, Q_{ga}, iar debitul real de gaze, Q_g, trebuie obținut din debitul precedent utilizînd coeficientul de corecție c dat de formula

$$c = \frac{Q_g}{Q_{ga}} \tag{1}$$

În sistemele de extracție și transport practic măsurarea debitelor se face prin metoda orificiului prin care se realizează o cădere de presiune remanentă Δp ca urmare a existenței unui organ deprimogen, cum ar fi duza la sonda de extracție, ajutajul la panoul de măsură. Așa cum am stabilit în unele lucrări ale noastre, [9, 10] potrivit cercetărilor din literatura de specialitate [1, 2, 7, 9, 10, 11], scurgerea simultană a gazelor cu faza lichidă poate fi considerată monofazică atît timp cît fracția de apă a nu depășește valoarea sa critică a_{cr}

$$a \leqslant a_{cr} \tag{2}$$

Fracția de apă este definită ca raport între volumul de apă „apa" ce traversează elementul de măsură în perioada de timp t prin care se scurge și volumul de gaze curate V_{gN}.

$$a = \frac{\text{apa}}{V_{gN}} \tag{3}$$

Așa cum am stabilit anterior [9, 10], dacă fracția de apă a depășește valoarea critică a_{cr} se poate aprecia că regimul de scurgere este bifazic.

Fracția critică de apă se calculează cu formula

$$a_{cr} = 8595{,}4 \frac{td^2}{V_{gN}} \tag{4}$$

Așa cum se exprimă uzual volumul V_{gN} reprezintă debitul zilnic de gaze care se măsoară.

Pentru ca în expresia fracției critice să fie păstrat coeficientul numeric 8595,4 trebuie ca timpul t să fie introdus în ore, diametrul interior d al elementului de măsură în metri, iar volumul de gaze curate în metri cubi în condiții normale (presiunea $p_N = 1{,}0132.10^5$ N/m^2 și temperatura $T_N = 283$ K).

2. PARAMETRII HIDRODINAMICI LA SCURGEREA BIFAZICĂ A FLUIDELOR

Există cazuri frecvente în practică cînd fracția de apă din curentul de gaze depășește valoarea sa critică dată de relația (4).

Elementul deprimogen face ca să modifice viteza medie a gazelor și a apei v_a pe care le aveau cele două fluide înaintea acestuia. Tot elementul deprimogen modifică liniile de curent și parametrii hidrodinamici în vecinătatea lui. În cele ce urmează asimilăm scurgerea separată a celor două faze (lichide și gazoase) cu o lovitură hidraulică ce se formează la închiderea bruscă a unei conducte [6].

Astfel, este cunoscut că la o asemenea operație apare pe armătura ce obturează brusc secțiunea conductei suprapresiunea

$$\Delta p_s = \rho v \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{E}\frac{d}{\delta}}} \tag{5}$$

ρ reprezintă densitatea fluidului, v viteza medie, d diametrul interior al conductei cu grosimea peretelui δ. ε este modulul de elasticitate al fluidului și E al materialului din care este realizată conducta. În ceea ce privește ε, se cunoaște că acesta se exprimă în funcție de coeficientul de compresibilitate β cu ajutorul formulei

$$\varepsilon = \frac{1}{\beta} \tag{6}$$

De exemplu, pentru apă coeficientul de compresibilitate β_a, la temperatura de 293 K are valoarea [3, 4].

$$\beta_a = 4{,}456 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$$

Pentru un gaz perfect, coeficientul de compresibilitate β, la o evoluție, izotermă a gazului, este funcție de presiunea p și satisface relația

$$\beta p = 1 \tag{7}$$

iar pentru o evoluție adiabată cu exponentul $\varkappa$, coeficientul β este definit de formula

$$\varkappa \beta p = 1 \tag{8}$$

Apare că gazele naturale care au exponentul adiabatic supraunitar (la metan $\varkappa = 1{,}32$, la etan $\varkappa = 1{,}18$, la propan $\varkappa = 1, 12$) la aceeași

presiune coeficientul de compresibilitate β este mai mare dacă se calculează cu relația (7) față de același parametru determinat cu formula (8).

Dacă se asimilează elementul deprimogen pe care se realizează șocul hidraulic cu o conductă, rezultă că $\frac{d}{\delta}\frac{\varepsilon}{E}$ are valori reduse.

Astfel, potrivit STAS 7347/1-83 la un ajutaj raportul $\frac{d}{\delta}$ are practic valoarea egală cu unitatea; la o duză același raport este și mai mic, situat între 0,2 și 0,5. Dacă se consideră, de exemplu, situația cînd elementul deprimogen este un ajutaj și se iau $E = 2{,}1 \cdot 10^{11}$ N/m^2, $\beta_a = 4{,}456 \cdot 10^{-10}$ m^2/N, termenul $\frac{\varepsilon}{E} \cdot \frac{d}{\delta}$ pentru apă este mult mai mic decît unitatea

$$\left(\frac{\varepsilon}{E} \cdot \frac{d}{\delta}\right)_a = \left(\frac{1}{E\beta_a} \cdot \frac{d}{\delta}\right)_a = \left(\frac{1}{2{,}1 \cdot 10^{11} \times 4{,}456 \times 10^{-10}} \times 1\right) = 0{,}0107. \tag{9}$$

Tot la un ajutaj, același termen pentru o evoluție adiabată a gazului, la care coeficientul de compresibilitate este mai mic decît la o evoluție izotermă, la presiunea gazului $p = 50$ bar, are valoarea

$$\left(\frac{\varepsilon}{E} \cdot \frac{d}{\delta}\right)_g = \left(\frac{\varkappa p}{E} \cdot \frac{d}{\delta}\right)_g = \left(\frac{1{,}32 \times 50 \cdot 10^5}{2{,}1 \times 10^{11}} \cdot 1\right) = 3{,}1428 \times 10^{-5} \tag{10}$$

Aceste rezultate arată că în situația în care se aplică formula (5) pentru calculul suprapresiunii pe organul deprimogen acesta se poate aproxima prin forma simplificată

$$\Delta p_s = \rho v \sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}} = v \sqrt{\frac{\rho}{\beta}} \tag{11}$$

Așa cum vom preciza în continuare, cele trei mărimi v, ρ și β se referă pe rînd la apă și gaz după cum dopul de apă lovește perna de gaze ce se scurge prin elementul de măsură sau gazele lovesc apa în același loc.

Pentru aceasta este necesar de imaginat succesiunea fluidelor în elementul de măsură. Astfel, dacă se admite că gazele în conducta cu diametrul D urmează apei care atinge elementul de măsură și se scurge prin acesta cu viteza $v_a \frac{D^2}{d^2}$, în conducta cu diametrul D viteza medie a apei va fi v_a.

Printr-un raționament absolut identic cu acela din lucrarea [6] care a dus la obținerea formulei (5), și deci și la forma aproximativă a acesteia dată de (11), la scurgerea apei în fața gazului, în amonte de elementul de măsură, va apărea suprapresiunea

$$\Delta p_{1ga} = \rho_1 (v_1 - v_a) \sqrt{\frac{\rho}{\beta_a}} \tag{12}$$

La această relație s-a ajuns prin faptul că și gazul înaintea elementului de măsură are viteza medie v_1, iar dopul de apă care s-a așezat pe elementul de măsură joacă rolul de secționare a conductei în mod similar ca și o armătură a acesteia. Diferența dintre cele două situații constă în aceea că dopul de apă este mobil cu viteza v_a, față de o armătură a conductei ce ar fi avut viteza nulă dacă ar fi închis conducta (fig. 1).

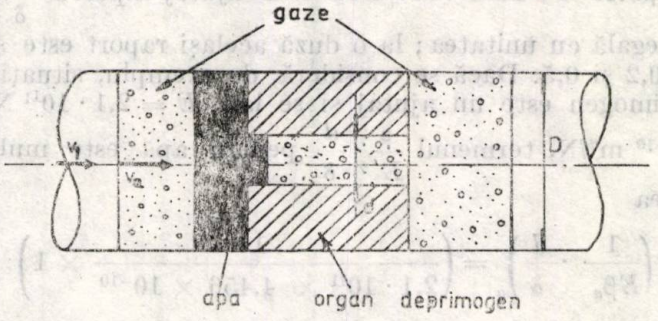


Fig. 1

Tot o analiză a relației (12) arată că s-a imaginat fluidul perfect iar în situația cînd apa se deplasează cu o viteză medie egală cu viteza gazului nu se realizează o presiune suplimentară pe elementul de măsură. Egalitatea celor două viteze probabil că nu se întîmplă niciodată în practică.

Rezultă că presiunea din fața elementului de măsură va fi

$$p_{1ga} = p_1 + \Delta p_{1ga} = p_1 + (v_1 - v_a)\sqrt{p_1 \rho_1} \tag{13}$$

Se constată cu ușurință că presiunea p_{1ga} are valorile extreme

$$p_{1ga,\max} = p_1 + v_1\sqrt{p_1 \rho_1} \tag{14'}$$

$$p_{1ga,\min} = p_1 - v_a\sqrt{p_1 \rho_1} \tag{14''}$$

Analiza ultimelor relații arată că în cazul în care ar curge pe rînd doar cîte un fluid ($v_1 = 0$ sau $v_a = 0$) presiunea din fața elementului de măsură ar fi p_1.

Dopului de apă îi urmează perna de gaze care ajunge, la rîndul ei, pe elementul de măsură și apa cu viteza medie v_a se află în urma gazelor (fig. 2).

În mod analog se obține de această dată presiunea suplimentară ce se realizează peste elementul de măsură

$$\Delta p_{1ag} = \rho_a c_a (v_a - v) \tag{16}$$

ceea ce înseamnă că presiunea pe elementul de măsură va avea valoarea

$$p_{1ag} = p_1 + \sqrt{\frac{\rho_a}{\beta_a}}(v_a - v) \tag{17}$$

deoarece viteza sunetului în apă are mărimea

$$c_a = \sqrt{\frac{1}{\rho_a \beta_a}} \tag{18}$$

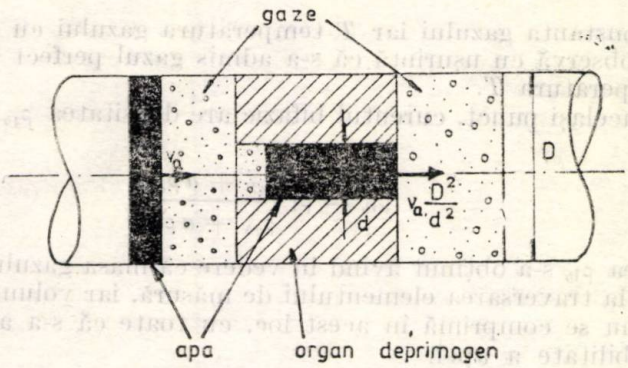


Fig. 2

Valorile extreme pe care le ia presiunea în amonte de organul deprimogen vor fi acum :

$$p_{1ag,\max} = p_1 + v_a \sqrt{\frac{\rho_a}{\beta_a}} \tag{19'}$$

$$p_{1ag,\min} = p_1 - v \sqrt{\frac{\rho_a}{\beta_a}} \tag{19''}$$

De această dată se observă că pentru cazul în care apa lipsește, $v_a = 0$, se găsește $p_{1ag,\max} = p_1$ și în situația în care $v = 0$ se obține $p_{1ag,\min} = p_1$.

Din relațiile (14'') și (19') se deduce imediat presiunea diferențială maximă ce se realizează pe elementul de măsură

$$p_{1ag,\max} - p_{1ag,\min} = v_a \left(\sqrt{p_1 \rho_1} + \sqrt{\frac{\rho_a}{\beta_a}} \right) \tag{21}$$

Această presiune diferențială este datorită prezenței apei ($v_a \neq 0$) și se adaugă presiunii diferențiale Δp ce se realizează atunci cînd curentul de gaze este curat ($v_a = 0$).

Din acest motiv, căderea de presiune înregistrată la scurgerea curentului bigazic va fi

$$\Delta p_c = \Delta p + v_a \left(\sqrt{p_1 \rho_1} + \sqrt{\frac{\rho_a}{\beta_a}} \right) \tag{22}$$

Pe de altă parte, densitatea gazelor curate înaintea elementului de măsură este ρ_1 care are valoarea

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT} \tag{23'}$$

R este constanta gazului iar T temperatura gazului cu presiunea p_1.

Se observă cu ușurință că s-a admis gazul perfect avînd constanta R și temperatura T.

În același punct, curentul bifazic are densitatea ρ_{1b} a cărei expresie este

$$\rho_{1b} = \rho_1 \frac{\rho_{gN} + a\rho_a}{\rho_{gN} + a\rho_1} \tag{23''}$$

Densitatea ρ_{1b} s-a obținut avînd în vedere că masa gazului ($\rho_{gN}V_{gN}$) nu se modifică la traversarea elementului de măsură, iar volumul apei de masă $a\rho_a V_{gN}$, nu se comprimă în acest loc, cu toate că s-a admis o anumită compresibilitate a apei.

Se observă cu ușurință că pentru o fracție de apă nulă rezultă $\rho_{1b} = \rho_1$, iar pentru o fracție maximă ($a = 1$) densitatea ρ_{1b} devine egală cu densitatea apei dacă se ia și $\rho_1 = \rho_a$. Această ultimă înlocuire apare logică avînd în vedere că apa este singurul fluid ce traversează elementul de măsură. Relațiile anterioare nu au precizat elementul de măsură ce se utilizează pentru măsurarea gazelor (ajutaj sau duză). Noi apreciem că înregistrarea în bandă a parametrilor hidrodinamici poate apărea atît la utilizarea ajutajului cît și a duzei ca elemente deprimogene.

La cel de al doilea element, la duză, probabil nu se ridică probleme la apariția pulsatorie a elementelor hidrodinamice, deoarece în mod obișnuit, nu se înregistrează aceste elemente. Calculul debitului se efectuează prin introducerea unor valori medii a parametrilor, ceea ce corespunde cu operația de vizualizare a operatorului pe elementul de măsură alegînd, în acest fel, valorile medii ale parametrilor. Probabil că datorită acestei practici, s-a dedus în mod eronat, credem noi, că regimul pulsatoriu nu apare la traversarea duzei de către fluidul bifazic. Mai multe experimente efectuate la catedra de mecanica fluidelor de la Institutul de Petrol și Gaze, în care s-a scurs apă și aer au dus la înregistrări în bandă și la duzele utilizate la sondele de gaze.

Din cauza considerațiilor anterioare, în cele ce urmează ne oprim doar la corecția debitului de la un fluid bifazic ce se măsoară cu ajutorul ajutajului.

3. COEFICIENTUL DE CORECȚIE LA SCURGEREA PRIN AJUTAJ A FLUIDULUI BIFAZIC

Așa cum am precizat anterior, ajutajul este unul din elementele principale ce echipează panourile de măsură din cîmpurile gazeifere. Potrivit reglementărilor în vigoare, STAS 7347/1-83, debitul de gaze se calculează cu relația

$$Q_g = \alpha\varepsilon \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2\frac{\Delta p}{\rho}} \tag{24}$$

ceea ce înseamnă deci că la o curgere bifazică se păstrează relația anterioară de calcul a debitului, obținîndu-se, în acest fel, debitul aparent de gaze

$$Q_{ga} = \alpha \varepsilon \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2 \frac{\Delta p_c}{\rho_{1b}}} \tag{25}$$

Coeficientul de debit α are, practic, valori cuprinse între 0,6 și 0,65 iar coeficientul de detenta ε între 0,9 și 0,98.

Așa cum precizează aceeași reglementare la care ne-am referit anterior, densitatea ρ_1, deci și densitatea curentului bifazic ρ_{1b}, se ia la presiunea și temperatura la care se exprimă volumele Q_g și respectiv, Q_{ga}.

Din acest motiv, rezultă că din cauza celor două formule (24) și (25) coeficientul c_{ab} pentru corecția debitului de gaze aparente va avea expresia

$$c_{ab} = \sqrt{\frac{\rho_{1b}}{\rho_1} \cdot \frac{\Delta p_c}{\Delta p}} \tag{26}$$

La obținerea acestui rezultat s-a admis că la scurgerea gazelor curate, ca și a gazelor împreună cu apa, coeficienții α și ε rămîn constanți.

Dacă se are în vedere formulele (22) și (23''), care introduse în expresia coeficientului de corecție c_{ab} dat de relația (26) duce la forma acestuia :

$$c_{ab} = \sqrt{\frac{\rho_{gN} + a\rho_a}{\rho_{gN} + a\rho_1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{v_a}{\Delta p}\left(\sqrt{p_1 \rho_1} + \sqrt{\frac{\rho_a}{\beta_a}}\right)}} \tag{27}$$

Relația obținută poate fi pusă sub o formă mai comodă calculelor practice dacă se scrie expresia căderii de presiune

$$\Delta p = \frac{8 Q_g^2 \rho_1}{\alpha^2 \varepsilon^2 \pi^2 d^4} = \rho_1 \frac{v_g^2}{2} \cdot \frac{1}{\alpha^2 \varepsilon^2} = \rho_1 \frac{v^2}{2} \cdot \frac{D^2}{d^2 \alpha^2 \varepsilon^2} \tag{28}$$

unde v_g reprezintă viteza gazului prin secțiunea elementului de măsură. Pe de altă parte, așa cum a fost introdusă fracția de apă în curentul de gaze, ecuația de continuitate pentru faza lichidă se scrie

$$v_a \frac{\pi D^2}{4} t \rho_a = a V_{gN} \cdot \rho_a \tag{29}$$

și în mod asemănător pentru faza gazoasă aceeași ecuație are forma

$$v \frac{\pi D^2}{4} t \rho_1 = V_{gN} \cdot \rho_{gN} \tag{30}$$

ρ_{gN} reprezintă densitatea gazelor în condiții normale de presiune și temperatură. Din ultimele relații se obține imediat viteza medie a apei înaintea elementului de măsură.

$$v_a = av \frac{\rho_1}{\rho_{gN}} \tag{31}$$

Din cauza acestui rezultat, precum și a formulei căderii de presiune dată de (28), coeficientul de corecție devine

$$c_{ab} = \sqrt{\frac{1 + a\frac{\rho_a}{\rho_{gN}}}{1 + a\frac{\rho_1}{\rho_{gN}}} \cdot \frac{v}{v + a\frac{2d^2\alpha^2\varepsilon^2}{\rho_{gN}D^2}\left(\sqrt{p_1\rho_1} + \sqrt{\frac{\rho_a}{\beta_a}}\right)}} \tag{32}$$

Se constată cu ușurință că formula obținută verifică cazurile extreme întîlnite în practică. Astfel, pentru $a = 0$, rezultă $c_{ab} = 1$, iar la o fracție de apă în curentul de gaze foarte mare ($a = 1$) se obține $c_{ab} = 0$, deoarece în acest caz $v = 0$.

Am ales și prima valoare a fracției de apă, adică $a = 0$, în această analiză, cu toate că la asemenea valoare curgerea este monofazică, pentru a arăta faptul că, după părerea noastră, este greu de imaginat ca formula teoretică obținută să nu-și păstreze valabilitatea pentru orice fracție de apă cuprinsă între 0 și 1, dacă coeficientul de corecție verifică cazurile extreme pe care le ia fracția de apă. Utilă apare și o altă formă pe care o poate lua expresia coeficientului de corecție c_{ab} dacă se are în vedere formula (31).

$$c_{ab} = \sqrt{\frac{1 + a\frac{\rho_a}{\rho_{gN}}}{1 + a\frac{\rho_1}{\rho_{gN}}} \cdot \frac{v_a}{v_a + a^2\frac{2\rho_1 d^2\alpha^2\varepsilon^2}{\rho_{gN}^2 D^2}\left(\sqrt{p_1\rho_1} + \sqrt{\frac{\rho_a}{\beta_a}}\right)}} \tag{33}$$

Ultima formulă sub care am pus coeficientul c_{ab} verifică, ca și (32), cazurile extreme și anume pentru $a = 0$, $v_a = 0$ ceea ce face ca valoarea coeficientului c_{ab} să fie egală cu unitatea, iar la un curent de gaze nul, $v = 0$, se obține $c_{ab} = 0$. În practică coeficienții α și ε se iau cu destulă exactitate în intervalele 0,60 — 0,62 și, respectiv, 0,92 — 0,98.

O analiză atentă a uneia dintre formulele (32) sau (33), duce la concluzia că și raportul $\frac{d}{D}$ influențează coeficientul c_{ab}. Pe măsură ce se mărește raportul d/D coeficientul c_{ab} se reduce. Din acest motiv, este de așteptat ca la apariția unui regim pulsatoriu la o duză coeficientul de corecție c_{ab} să prezinte o valoare mai mare decît la un ajutaj dacă la ambele elemente de măsură se păstrează ceilalți parametri (v_a, ρ, α, ε) constanți.

4. REZULTATE ÎNREGISTRATE ÎN PRACTICA DE ȘANTIER

În figura 3 prezentăm valorile coeficientului de corecție obținut experimental ca raport între debitul de gaze curate și debitul de gaze aparente înregistrate la panoul de măsură A unde s-au observat parametrii $p_1 = 37.10^5 \text{N/m}^2$, $d = 0{,}0629$ m și $D =$ 0,200 m. Pe același grafic s-a trasat și coeficientul de corecție calculat cu formula noastră teoretică (27) în care în afara valorilor anterioare s-au mai introdus $\alpha = 0{,}62$; $\varepsilon = 0{,}95$; $\rho_a = 1020$ kg/m^3 ; $\rho_1 = 25{,}191$ kg/m^3, $\rho_{gN} = 0{,}715$ kg/m^{3}N și coeficientul de compresibilitate al apei $\beta_a = 8{,}61 \cdot 10^{-8}$ m^2/N.

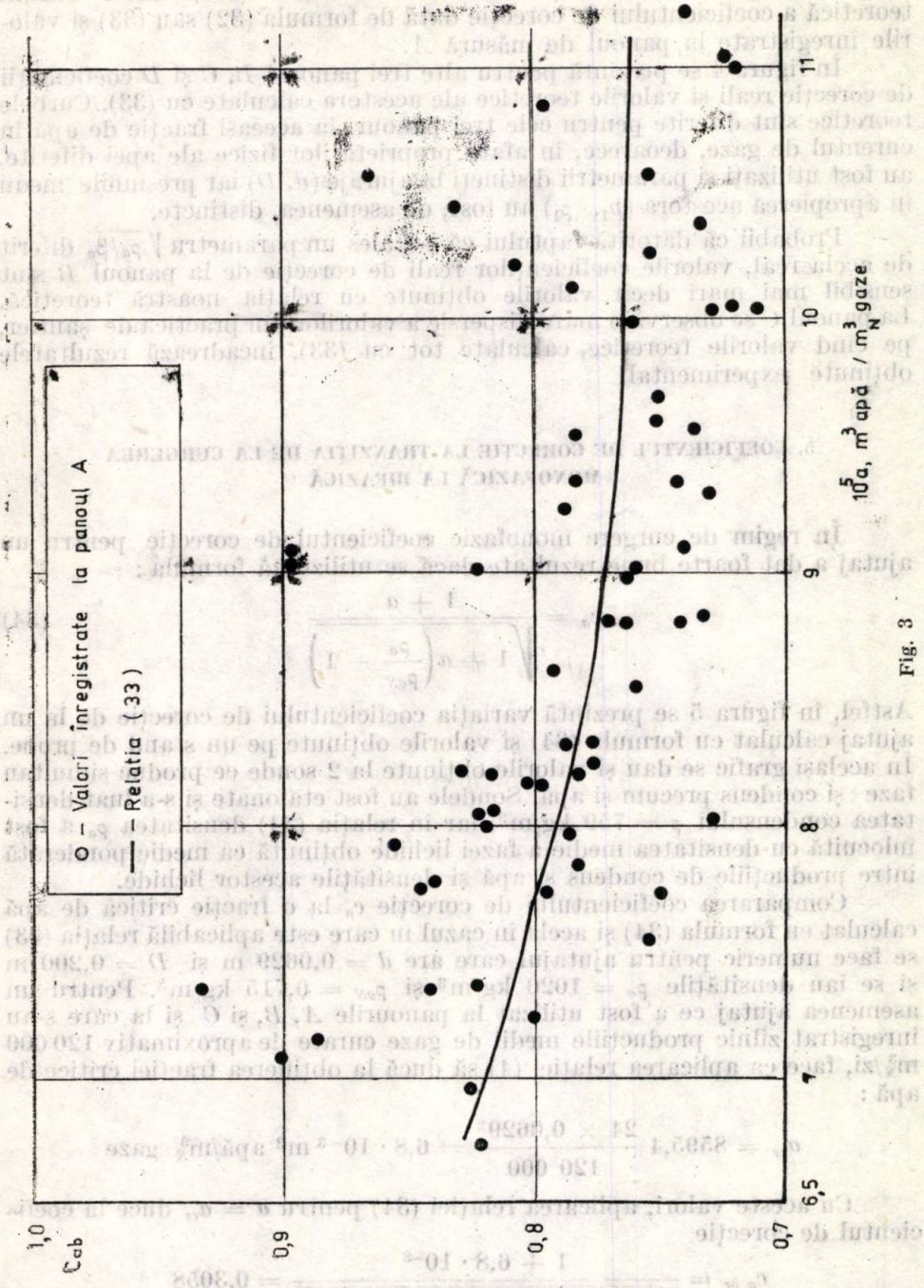

O – Valori înregistrate la panoul A
—— – Relația (33)
ε_{ab}
1,0
0,9
0,8
0,7
6,5
7
8
9
10
11
$10^5 a$, m^3 apă / m^3_N gaze

Fig. 3

După părerea noastră, există o bună concordanță între relația teoretică a coeficientului de corecție dată de formula (32) sau (33) și valorile înregistrate la panoul de măsură A.

În figura 4 se prezintă pentru alte trei panouri B, C și D coeficienții de corecție reali și valorile teoretice ale acestora calculate cu (33). Curbele teoretice sînt diferite pentru cele trei panouri la aceeași fracție de apă în curentul de gaze, deoarece, în afara proprietăților fizice ale apei diferite, au fost utilizați și parametrii distincți la ajutaje (d, D) iar presiunile medii în apropierea acestora (p_1, ρ_1) au fost, de asemenea, distincte.

Probabil că datorită faptului că s-a ales un parametru $\sqrt{\rho_a/\beta_a}$ diferit de acela real, valorile coeficienților reali de corecție de la panoul B sînt sensibil mai mari decît valorile obținute cu relația noastră teoretică. La panoul C se observă o mare dispersie a valorilor din practica de șantier, pe cînd valorile teoretice, calculate tot cu (33), încadrează rezultatele obținute experimental.

5. COEFICIENTUL DE CORECȚIE LA TRANZIȚIA DE LA CURGEREA MONOFAZICĂ LA BIFAZICĂ

În regim de curgere monofazic coeficientul de corecție pentru un ajutaj a dat foarte bune rezultate dacă se utilizează formula:

$$c_a = \frac{1 + a}{\sqrt{1 + a\left(\frac{\rho_a}{\rho_{gN}} - 1\right)}} \tag{34}$$

Astfel, în figura 5 se prezintă variația coeficientului de corecție de la un ajutaj calculat cu formula (34) și valorile obținute pe un stand de probe. În același grafic se dau și valorile obținute la 2 sonde ce produc simultan faze și condens precum și apă. Sondele au fost etalonate și s-a luat densitatea condensului $\rho = 759$ kg/m^3, iar în relația (34) densitatea ρ_a a fost înlocuită cu densitatea medie a fazei lichide obținută ca medie ponderată între producțiile de condens și apă și densitățile acestor lichide.

Compararea coeficientului de corecție c_a la o fracție critică de apă calculat cu formula (34) și acela în cazul în care este aplicabilă relația (33) se face numeric pentru ajutajul care are $d = 0{,}0629$ m și $D = 0{,}200$ m și se iau densitățile $\rho_a = 1020$ kg/m^3 și $\rho_{gN} = 0{,}715$ kg/m^3. Pentru un asemenea ajutaj ce a fost utilizat la panourile A, B, și C și la care s-au înregistrat zilnic producțiile medii de gaze curate de aproximativ 120 000 m^3_N/zi, face ca aplicarea relației (4) să ducă la obținerea fracției critice de apă:

$$a_{cr} = 8595{,}4\,\frac{24 \times 0{,}0629^2}{120\,000} = 6{,}8 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3\ \text{apă/m}^3_N\ \text{gaze}$$

Cu aceste valori, aplicarea relației (34) pentru $a = a_{cr}$ duce la coeficientul de corecție

$$c_{a,cr} = \frac{1 + 6{,}8 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{1 + 6{,}8 \cdot 10^{-3}\left(\frac{1\,020}{0{,}715} - 1\right)}} = 0{,}3058$$

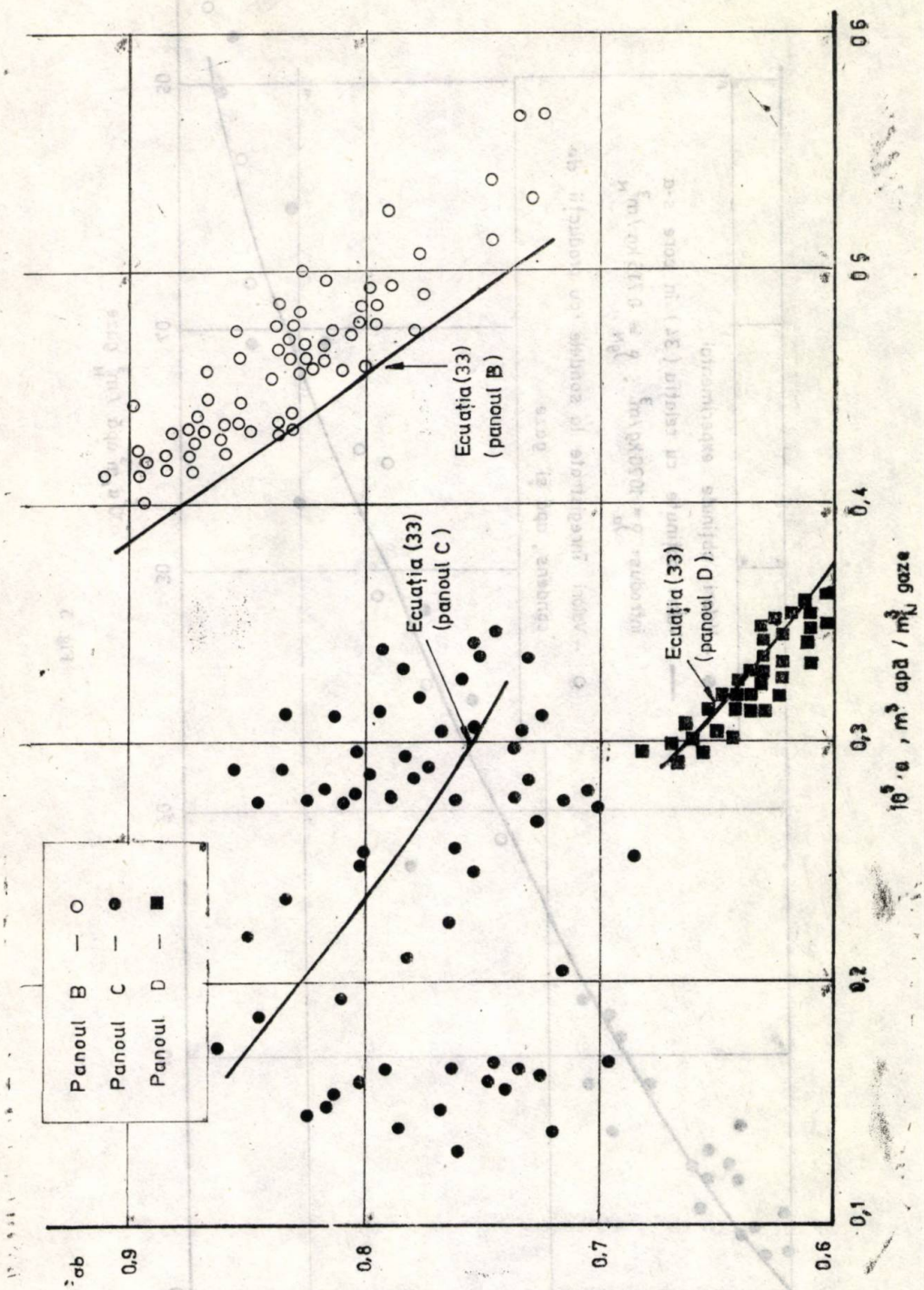

Panoul B — ○
Panoul C — ●
Panoul D — ■
Ecuația (33) (panoul B)
Ecuația (33) (panoul C)
Ecuația (33) (panoul D)
$\dot{a}_{ob}$
0,9
0,8
0,7
0,6
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
$10^5 \cdot a$, m^3 apă / m^3 gaze

Fig. 4

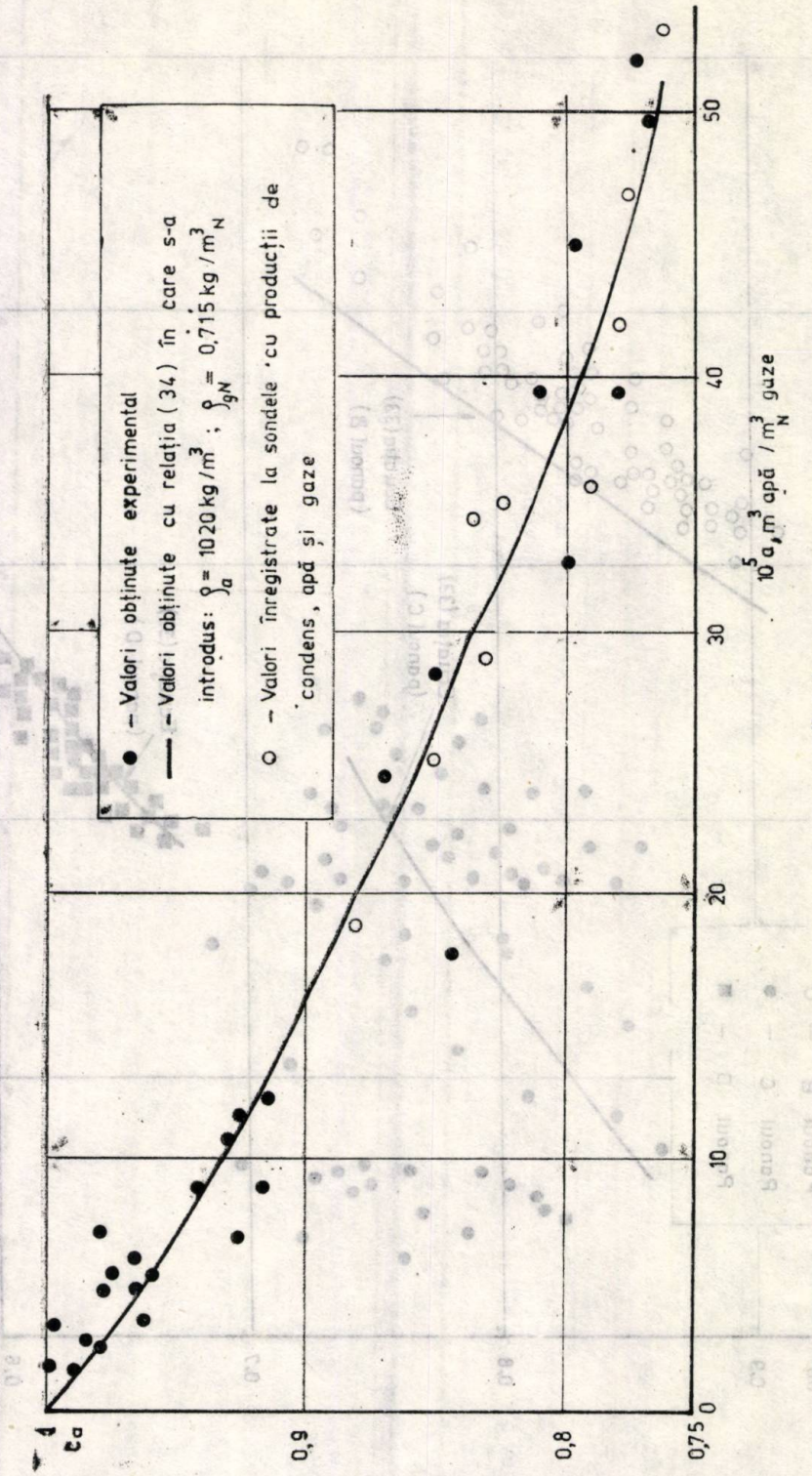

● – Valori obținute experimental
— – Valori obținute cu relația (34) în care s-a introdus: $\rho_a = 1020\ kg/m^3$; $\rho_{gN} = 0{,}715\ kg/m^3_N$
○ – Valori înregistrate la sondele cu producții de condens, apă și gaze
ε_a
1
0,9
0,8
0,75
0
10
20
30
40
50
$10^5 a, m^3$ apă / m^3_N gaze

Fig. 5

Pentru aplicarea formulei (33), tot pentru $a = a_{cr}$, este necesar de calculat viteza medie v_a a curentului de apă înaintea ajutajului.

$$v_a = \frac{4a_{cr} \cdot V_{gN}}{\pi D^2 \cdot 86\,400} = \frac{4 \times 6{,}8 \cdot 10^{-3} \times 120\,000}{\pi \cdot 0{,}2^2 \times 86\,400} 0{,}293 \text{ m/s}$$

Viteza curentului de gaze în același loc se deduce utilizînd formula (31) și are valoarea

$$v = \frac{\rho_{gN} \cdot v_a}{\rho_1 \cdot a_{cr}} = \frac{0{,}715 \cdot 0{,}293}{38{,}76 \cdot 6{,}8 \times 10^{-3}} = 0{,}7948 \text{ m/s}$$

S-a considerat că presiunea p_1 în fața ajutajului este egală cu 57 bar, ceea ce a dus, admițînd constanta gazului $R = 519{,}6$ J/kgK și temperatura $T = 283$ K, la densitatea $\rho_1 = 38{,}76$ kg/m^3.

Cu aceste valori pentru coeficienții $\alpha = 0{,}6$ și $\varepsilon = 0{,}95$ se obține căderea de presiune Δp dată de (28)

$$\Delta p = 38{,}76 \frac{0{,}7948^2}{2} \cdot \frac{0{,}2^2}{0{,}0629^2 \times 0{,}6^2 \times 0{,}95^2} = 381{,}00 \text{ N/m}^2$$

Cu acestea, pentru o compresibilitate a apei $\beta_a = 4{,}456 \cdot 10^{-10}$ m^2/N și $a = a_{cr} = 6{,}8 \cdot 10^{-3}$ m^3 apă/m^3_N, rezultă coeficientul de corecție $c_{ab,cr}$ la fracția critică de apă

$$c_{ab,cr} = 0{,}1531$$

Parametrul ρ_a/β_a joacă un rol însemnat la ordinul de mărime al coeficientului c_{ab}. De exemplu, dacă în calcule anterioare s-ar fi considerat $\beta_a = 8{,}6 \cdot 10^{-9}$ și nu $4{,}456 \cdot 10^{-10}$ m^2/N, așa cum am luat noi, ar fi dus la un coeficient de corecție $c_{ab,cr} = 0{,}3143$ ceea ce ar fi însemnat o foarte mare apropiere de valoarea coeficientului de corecție calculat cu formula (34), adică 0,3058. Calculele noastre, deși orientative, arată că prin racordarea celor doi coeficienți calculați cu formulele (33) și (34), pentru valoarea critică a fracției de apă, duce la concluzia că obținerea formulei (34) are un suport real și apropiat de fenomenul care are loc la scurgerea curentului bifazic prin ajutaj.

În practică de multe ori obținerea coeficientului de corecție, indiferent de scurgerea monofazică sau bifazică prin elementul de măsură, se face în urma unui calcul iterativ.

Această situație se întîmplă ca urmare a faptului că prima valoare obținută, în urma introducerii parametrilor observați sau înregistrați la un element de măsură în relațiile de calcul este debitul aparent de gaze. La obținerea acestui debit se neglijează volumul de apă scurs simultan cu gazele. Ori acest prim debit admis a fi un debit real de gaze curate duce la o primă valoare iterativă a fracției de apă și deci și la o primă valoare a coeficientului de corecție calculat cu formula specifică domeniului respectiv de curgere a fluidului. Evident, ca urmare a obținerii coeficientului de corecție se poate găsi o valoare mai exactă a debitului de gaze curate.

EXEMPLU DE CALCUL

Prin ajutajul montat la un panou de măsură dintr-un cîmp gazeifer cu $d = 0{,}0692$ și $D = 0{,}2$ m, pentru care s-au estimat presiunea statică $p_2 = 4 \cdot 10^5$ N/m², presiunea diferențială $\Delta p = 9074{,}25$ N/m², ceea ce face $p_1 = p_2 + \Delta p = 4{,}0907.10^5$ N/m². Rezultă densitatea gazului în fața elementului de măsură

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT} = \frac{4{,}0907 \cdot 10^5}{519{,}6 \cdot 288} = 2{,}7336 \text{ kg/m}^3$$

Se observă că s-a asimilat gazul metanului a cărei constantă de gaz perfect s-a luat tot $R = 519{,}6$ J/kg K. Dacă se apreciază că prin ajutaj a trecut 1,50 m³ apă/zi a cărei densitate se ia $\rho_a = 1015$ kg/m³ și o compresibilitate a apei $\beta_a = 4{,}4 \cdot 10^{-10}$ m²/N rezultă imediat

$$v_a = \frac{4 \times 1{,}50}{\pi \cdot 0{,}2^2 \times 86\,400} = 5{,}5262 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$$

Admițînd că înregistrarea este în bandă, se efectuează calculul iterativ ce duce la expresia coeficientului de corecție și a debitului de gaze curate Q_g.

În urma planimetrării diagramei, ca și cum prin ajutaj s-ar fi scurs doar gaze curate, s-a obținut debitul aparent de gaze.

$Q_{ga} = 107\,088$ m³N/zi ceea ce face ca fracția de apă să aibe valoarea

$$a = \frac{1{,}5}{107\,088} = 1{,}4007 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ apă/m}^3_N \text{ gaze}$$

Alegînd acum $\alpha = 0{,}6$ și $\varepsilon = 0{,}95$ rezultă o primă valoare a coeficientului de corecție dat de formula (33) care este $c_{ab}^{(1)} = 0{,}9381$

Rezultă deci că debitul real de gaze va fi

$$Q_g^{(1)} = 0{,}9381 \cdot 107\,088 = 100\,459 \text{ m}^3_N/\text{zi}$$

S-a plasat indicele 1 între paranteze la debit și la coeficientul de corecție pentru a arăta că acestea sînt primele valori iterative ale debitului și, respectiv, coeficientul de corecție. Tot prima iterație a fracției de apă, $a^{(1)}$ va avea acum valoarea

$$a^{(1)} = \frac{1{,}5}{100459} = 1{,}4931 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3\text{apă/m}^3 \text{ gaze}$$

Refacerea calculelor anterioare duce acum la cea de a doua valoare iterativă a lui c_{ab} și a debitului de gaze

$$c_{ab}^{(2)} = 0{,}9200$$

și

$$Q_g^{(2)} = 0{,}9200.107088 = 98520 \text{ m}^3_N/\text{zi}$$

Cu această valoare, rezultă iterațiile de ordinul 2 ale fracției de apă

$$a^2 = \frac{1{,}5}{98\,520} = 1{,}5225 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ apă/m}^3_N \text{ gaze}$$

și iterația de ordinul trei ale coeficientului de corecție și ale debitului de gaze

$$c_{ab}^{(3)} = 0{,}9197$$

$$Q_g^{(3)} = 0{,}9171 \cdot 107088 = 98210 \text{ m}_N^3/\text{zi}$$

Se poate aprecia că datorită faptului că între aceste valori iterative și cele precedente sînt diferențe mici, ultimele valori sînt considerate cele exacte.

6. CONCLUZII

Curgerea gazelor împreună cu apa liberă duce la un regim pulsatoriu al parametrilor hidrodinamici din apropierea elementului deprimogen care realizează căderea de presiune remanentă cu ajutorul căruia se calculează debitul de gaze prin metoda orificiului.

Depășirea fracției de apă critice din curentul de gaze face ca pe organul de măsură să se producă o lovitură hidraulică datorită faptului că cele două fluide, apa și gazele, au viteze diferite.

Coeficientul de corecție la un regim pulsatoriu în apropierea organului deprimogen depinde de viteza celor două fluide înainte de elementul de măsură precum și de caracteristicile fizice ale apei și gazelor din acel loc.

Rezultatele înregistrate în mai multe puncte de măsură în care s-au utilizat ca element de măsură ajutajele au fost într-o foarte bună concordanță cu valorile obținute pe cale teoretică.

La limita de trecere de la curgerea monofazică la aceea bifazică coeficienții de corecție pentru cele două tipuri de curgeri au fost practic egali, ceea ce justifică, odată în plus, valabilitatea relațiilor obținute.

Coeficientul de corecție pentru o curgere monofazică a fost obținut pe baza unor rezultate de pe un stand prin care s-a circulat simultan apă și gaze naturale.

Primit în redacție la 20 martie 1989

BIBLIOGRAFIE

1. I. CREȚU, AL. D. STAN, *Transportul fluidelor prin conducte*, Edit. tehnică, București, 1985, p. 26—30, 262—268.
2. G. W. GOVIER, K. AZIZ, *The flow of complex mixtures in pipes*, Van Nostrand Reinold Comp., 1972, p. 532—541.
3. J. P. HOLMAN, *Thermodynamics*, Mc Graw Hill Book Comp., New York, 1974, p. 76—78.
4. V. A. KIRILLIN, V. V. SÎCEV, A. E. ȘEINDLIN, *Termodinamica*, Edit. științifică și enciclopedică, București, 1985, p. 155—157, 180—182.
5. L. LANDAU, *Mécanique des fluides*, Éditions Mir., Moscou, 1971, p. 308—313.
6. T. OROVEANU, *Hidraulica și transportul produselor petroliere*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1966, p. 219—221.
7. T. OROVEANU, V. DAVID, AL. D. STAN, C. TRIFAN, *Colectarea, transportul, depozitarea și distribuția produselor petroliere și gazelor*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1985, p. 19—21, 160—163.
8. O. RUSU, *Propagarea undelor elastice*, Edit. științifică și enciclopedică, București, 1985, p. 26—31.
9. Al. D. STAN, M. ALBULESCU, *Posibilități de corecție a debitului de gaze la fracțiuni mari de apă în curentul de gaze*, St. cerc. mec. apl., **46**, 6 (1987).
10. Al. D. STAN, M. ALBULESCU, *Criterii pentru corecția debitului de gaze determinat prin metoda orificiului în prezența apei*, St. cerc. mec. apl., **47** (1988).
11. D. ȘTEFĂNESCU, M. MARINESCU, I. GANEA, *Termogazodinamica tehnică*, Edit. tehnică, București, 1986, p. 331—335.

și iterația de ordinul trei ale coeficientului de corecție și ale debitului de gaze

$$c_{q_g}^{III} = 0{,}9197$$

$$Q_{g_n} = 0{,}9171 \cdot 107058 = 98210 \text{ m}^3/\text{zi}$$

Se poate aprecia că datorită faptului că între aceste valori iterative și cele precedente există diferențe mici, ultimele valori sînt considerate cele exacte.

6. CONCLUZII

Cunoașterea gazelor impreunate cu țițeiul dintr-o la un regim pulsatoriu al parametrilor hidrodinamici din apropierea elementului deprimogen care realizează cădere de presiune remanentă cu ajutorul căruia se calculează debitul de gaze prin metoda orificiului.

Dispersia fazelor de apă critice din curentul de gaze face ca pe organul de măsură să se producă o lovitură hidraulică datorită lepșului că celor două fluide, apa și gazele, au viteze diferite.

Coeficientul de corecție la un regim pulsatoriu în apropierea organului deprimogen depinde de viteza celor două fluide înainte de elementul de măsură precum și de caracteristicile fizice ale apei și gazelor din acel loc.

Rezultatele înregistrate în mai multe puncte de măsură în care s-au utilizat ca element de măsură ajutajele au fost într-o foarte bună concordanță cu valorile obținute pe cale teoretică.

La limita de trecere de la curgerea monofazică la aceea bifazică coeficienții de corecție pentru cele două tipuri de curgeri au fost practic egali, ceea ce justifică, odată în plus, valabilitatea relațiilor obținute.

Coeficientul de corecție pentru o curgere monofazică a fost obținut pe baza unor rezultate de pe un stand pentru care s-a circulat simultan apă și gaze naturale.

Primit în redacție la 29 martie 1988.

BIBLIOGRAFIE

1. I. GRETU, Al. D. ȘTIAN, *Transportul fluidelor prin conducte*, Edit. tehnică, București, 1988, p. 29—30, 262—266.
2. G. W. COVINGTON, K. AZIZ, *The flow of complex mixtures in pipes*, Van Nostrand Reinold Comp., 1972, p. 533—611.
3. J. P. HOLMAN, *Thermodynamics*, Mc Graw Hill Book Comp., New York, 1974, p. 76—78.
4. V. I. KNIELIN, V. V. SICEV, A. A. SERIȘEVICI, *Termodinamica*, Edit. științifică și enciclopedică, București, 1985, p. 125—127, 180—182.
5. I. LANDAU, *Termotehnică și mașini termice*, Editura Did., Vaslui, 1971, p. 305—312.
6. T. OROVEANU, *Hidraulica și transportul produselor petroliere*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1966, p. 219—221.
7. T. OROVEANU, V. DAVID, Al. D. ȘTIAN, C. TEFLEAN, *Calculul de transport al țițeiului*, Edit. științifică și enciclopedică, București, 1985, p. 18—21, 120—123.
8. G. IONESCU, *Termodinamica mașinilor electrice*, Edit. științifică și enciclopedică, București, 1985, p. 29—31.
9. Al. D. ȘTIAN, M. ALBULESCU, *Posibilități de corecție a debitului de gaze la Prefinul metanului de gaze*, St. cerc. tehn. apl., 16, 6 (1987).
10. Al. D. ȘTIAN, M. ALBULESCU, *Criterii pentru corecția debitului de gaze determinat prin metode orificiului în prezența țițeiului*, St. cerc. tehn. apl., 17 (1988).
11. D. ȘTEFĂNESCU, M. MANOLESCU, I. DĂNILĂ, *Termodinamică tehnică*, Edit. didactică, București, 1980, p. 331—335.

OPTIMIZAREA VARIATOARELOR SFERICE DIN PUNCT DE VEDERE AL SPINULUI

de I. M. CIORNEI

Universitatea „Ştefan cel Mare" Suceava

După prezentarea principalelor tipuri de variatoare sferice, lucrarea se opreşte asupra variantei Kopp B, cea mai reprezentativă, analizînd-o din punct de vedere al spinului; finalul lucrării stabileşte direcţiile principale de optimizare a acestui tip de transmisie elastohidrodinamică, din punct de vedere al mişcării parazite de spin.

GENERALITĂŢI

Variatoarele sferice se caracterizează prin aceea că elementele căii de rulare, de diametru variabil, au suprafaţa de lucru sferică. În tabelul 1 sînt prezentate principalele tipuri de variatoare sferice prin cîteva variante constructive, împreună cu caracteristicile lor de funcţionare. Aceste tipuri de variatoare pot transmite putere într-o gamă mare, de la 90 W pînă la 11 kW, varianta Kopp B, fiind utilizate pentru maşini-unelte, prese, maşini agricole, în industria textilă, alimentară, a hîrtiei etc. [7] [8] [11] [14] [16]. Gama de reglare este destul de mică la variatoarele Kashihara, [10], şi Huber, [12] [13], creşte la tipul Kopp B, valoarea 9 simetrică, şi poate atinge valori de pînă la 20 la tipul Contraves [15]. Din punct de vedere tehnologic, cele mai avantajoase par a fi cele la care axa elementului intermediar nu este materializată (Creţu, Contraves, Neuweg), dar sînt mai complicate constructiv. Dintre variatoarele cu axă materializată cele mai utilizate sînt Kopp B, la care prezenţa inelului de reţinere-ungere nu mai încarcă lagărele elementului intermediar cu forţă normală, ele fiind solicitate numai de forţa tangenţială; de asemenea şi nivelul de ulei este destul de scăzut, numai pentru scufundarea inelului de reţinere-ungere.

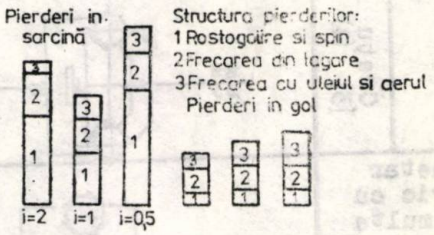


Fig. 1. — Pierderile într-un variator Kopp B.

Întrucît, aşa după cum s-a menţionat, varianta Kopp B este cea mai întîlnită, ea a fost analizată din punct de vedere al pierderilor prin frecare, situaţie prezentată în figura 1.

Tabel 1 - Clasificarea variatoarelor sferice

Varianta	Schema de principiu	Putere kW	Gama de reglare	Fel contact	Obs.
Cu un element intermediar (Koshihara) [10]		Foarte mică	Mare	Punctual	Indice de uzură mic
Cu două elemente intermediare (Huber) [8] [9]		Mică	9	Punctual	
Cu mai multe elemente intermediare — Kopp B [12] [14] [16] [8]		5	6	Punctual	Indice de uzură 2 kg/kW oră
Cu mai multe elemente intermediare — Contraves [15]		0,06-3,5	10 - 20	Punctual	Indice de uzură 2 kg/kW oră
Cu mai multe elemente intermediare — Oretu [3] [4]		3	5	Punctual	
Planetar sferic cu mai multe elemente intermediare (Neuweg) [17]		0,017-1,1		Punctual	

Lucrarea de față prezintă relațiile de calcul ale spinului, în vederea optimizării acestor transmisii, din acest punct de vedere.

ESTIMAREA SPINULUI ÎN VARIATORUL KOPP B

Pentru deducerea relațiilor de calcul ale spinului se atașează un sistem, convenabil, de axe pentru fiecare contact, figura 2, contact intrare, figura 3, contact bile-inel reținere-ungere și figura 4, contact ieșire; metodica de calcul fiind deja prezentată în literatura de specialitate [1] [2] [5].

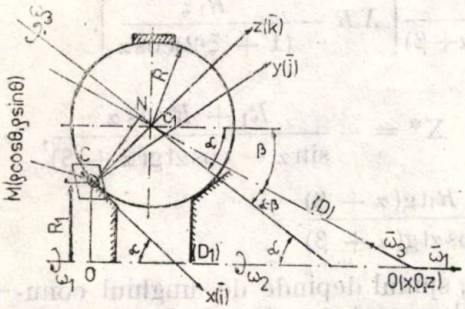


Fig. 2. — Contact intrare.

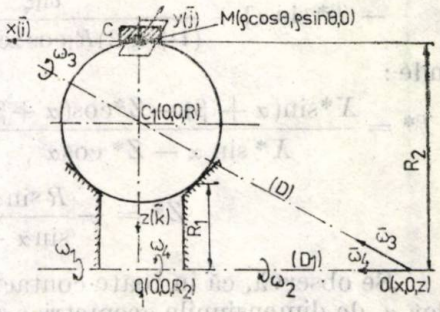


Fig. 3. — Contact bile-inel reținere-ungere.

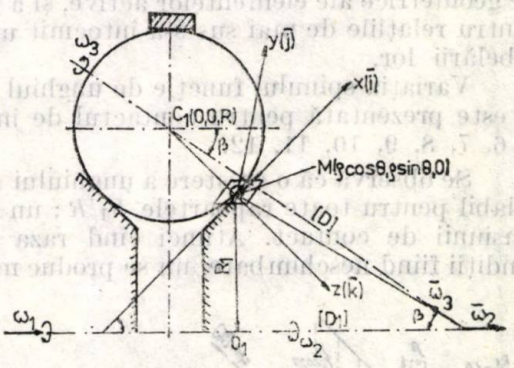


Fig. 4. — Contact ieșire.

Astfel, pentru contactul de intrare rezultă o viteză unghiulară de spin ce are expresia:

$$\omega_{SP} = -\omega_1\left[\sin\alpha + X\sin(\alpha-\beta) - \frac{\omega_1 R_1 \xi}{(1+\xi/2)R\cos\alpha} Y\sin(\alpha-\beta)\right]$$

unde:

$$X = \frac{[R_1 + R\cos\alpha]\sin\alpha - [R_1\mathrm{tg}(\alpha-\beta) + R\sin\alpha]\cos\alpha}{[R_1\mathrm{tg}(\alpha-\beta) + R\sin\alpha]\cos(\alpha-\beta) - [R_1 + R\cos\alpha]\sin(\alpha-\beta)}$$

$$Y = \frac{R\cos\alpha[\sin\alpha - \cos\alpha\,\mathrm{tg}(\alpha-\beta)}{[R_1\mathrm{tg}(\alpha-\beta) + R\sin\alpha]\cos(\alpha-\beta) - [R_1 + R\cos\alpha]\sin(\alpha-\beta)}.$$

Pentru contactul dintre bile și inel reținere-ungere se obține următoarea expresie pentru viteza unghiulară de spin :

$$\omega_{SP} = \omega_1 X \sin\beta - \frac{\omega_1 R_1 \xi}{(1 + \xi/2) R \cos\beta} Y \sin\beta.$$

Pentru contactul de ieșire se obține următoarea expresie :

$$\omega_{SP} = \omega_1 X [\sin(\alpha + \beta) - T^* \sin\alpha] - \frac{R_1 \omega_1 \xi}{(1 + \xi/2) R \cos\alpha} Y [\sin(\alpha + \beta) -$$

$$- T^* \sin\alpha] + \frac{\omega_1 \xi}{(1 + \xi/2) R_1 \cos\alpha \cos(\alpha + \beta)} \left[XR - \frac{R_1 \xi}{(1 + \xi/2)\cos\alpha} \right],$$

unde :

$$T^* = \frac{X^* \sin(\alpha + \beta) - Z^* \cos(\alpha + \beta)}{X^* \sin\alpha - Z^* \cos\alpha}; \quad X^* = -\frac{R_1 + R\cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha \operatorname{tg}(\alpha + \beta)},$$

$$Z^* = -\frac{R\sin\alpha + R_1 \operatorname{tg}(\alpha + \beta)}{\sin\alpha - \cos\alpha \operatorname{tg}(\alpha + \beta)}.$$

Se observă, că în toate contactele, spinul depinde de unghiul conurilor α, de dimensiunile geometrice ale elementelor active, R, R_1, de raportul de transmitere, prin unghiul β, și de alunecare.

Pentru obținerea unei valori optime, a unghiului β, a dimensiunilor geometrice ale elementelor active, și a unei game de reglaj convenabile, pentru relațiile de mai sus s-a întocmit un program de calcul, în vederea tabelării lor.

Variația spinului funcție de unghiul β, la diverse valori ale unghiului α, este prezentată pentru contactul de intrare și cel de ieșire în figurile 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Se observă că o creștere a unghiului α conduce la o mărire a spinului, valabil pentru toate rapoartele R_1/R ; un efect similar îl are și creșterea tensiunii de contact. Atunci cînd raza corpului sferic scade, celelalte condiții fiind neschimbate, nu se produc modificări substanțiale ale valorii

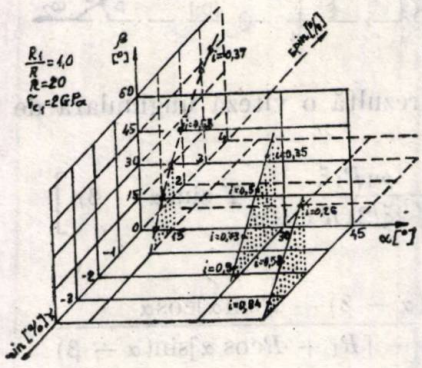


Fig. 5. — Spinul în Kopp B ; contact intrare.

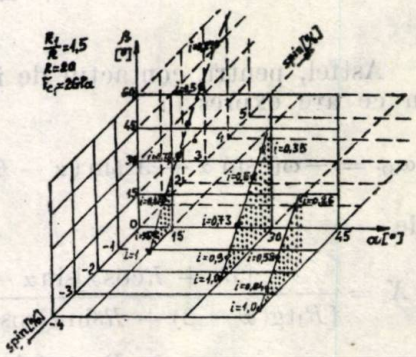


Fig. 6. — Spinul în Kopp B ; contact intrare.

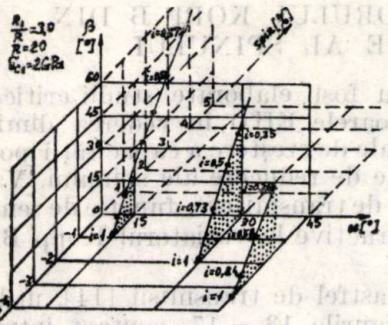


Fig. 7. — Spinul în Kopp B; contact intrare.

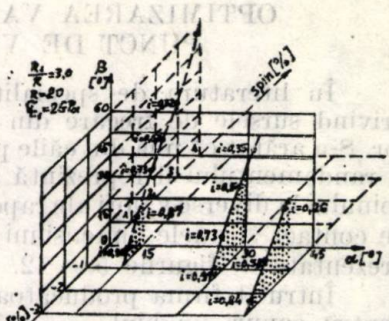


Fig. 8. — Spinul în Kopp B; contact intrare.

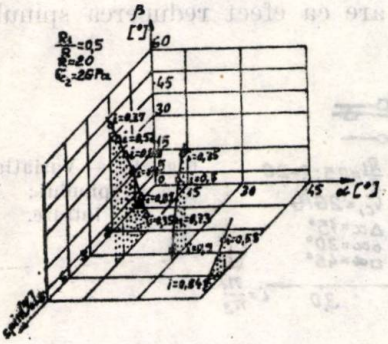


Fig. 9. — Spinul în Kopp B; contact ieșire.

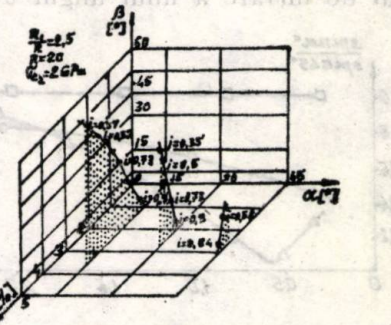


Fig. 10. — Spinul în Kopp B; contact ieșire.

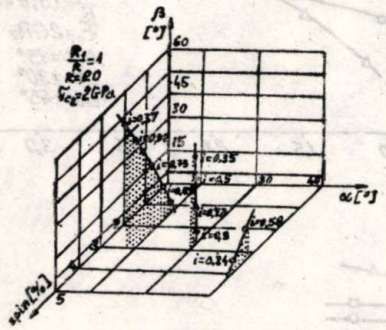


Fig. 11. — Spinul în Kopp B; contact ieșire.

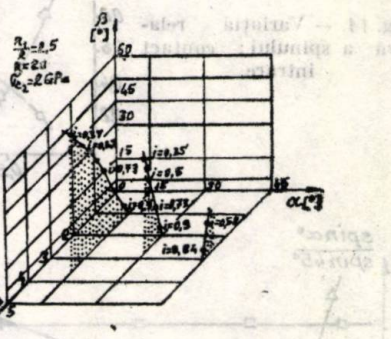


Fig. 12. — Spinul în Kopp B; contact ieșire.

spinului. Discuții similare se pot face și pentru contactul de ieșire, cel dintre bile și inel reținere-ungere nu afectează capacitatea de transmitere, așa încît nu s-a reprezentat grafic.

OPTIMIZAREA VARIATORULUI KOPP B DIN PUNCT DE VEDERE AL SPINULUI

În literatura de specialitate au fost elaborate studii critice, [1], privind sursele de frecare din variatoarele EHD, în vederea diminuării lor. S-a arătat că una din căile principale de creștere a capacității portante și randamentului îl reprezintă soluțiile de reducere ale spinului. Variația spinului la diverse valori ale raportului de transmitere, funcție de tensiunea de contact și unele dimensiuni constructive la variatorul Kopp B, fiind prezentate în figurile 5 — 12.

Întrucît firma producătoare de astfel de transmisii [14], utilizează pentru conuri unghiul $\alpha = 45°$, în figurile 13 — 17, contact intrare, în figurile 18 — 22, contact ieșire, s-a trasat variația relativă a spinului, pentru diverse valori ale raportului de transmitere, cînd $\alpha = 15°$ și $\alpha = 30°$, adoptînd ca bază unghiul $\alpha = 45°$.

Se observă că dacă $R_1/R = 0{,}5$, $\sigma_{c_1} = 2\text{GPa}$, utilizarea pentru discul de intrare a unui unghi $\alpha = 15°$ are ca efect reducerea spinului cu

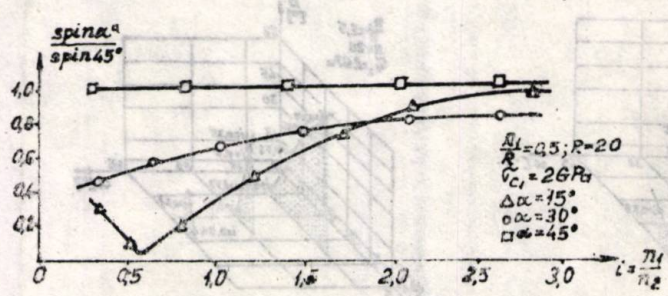


Fig. 13. — Variația relativă a spinului; contact intrare.

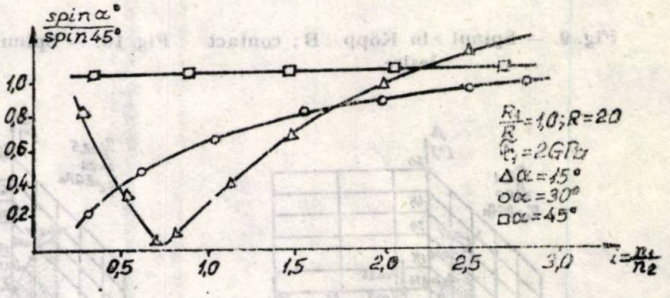


Fig. 14. — Variația relativă a spinului; contact intrare.

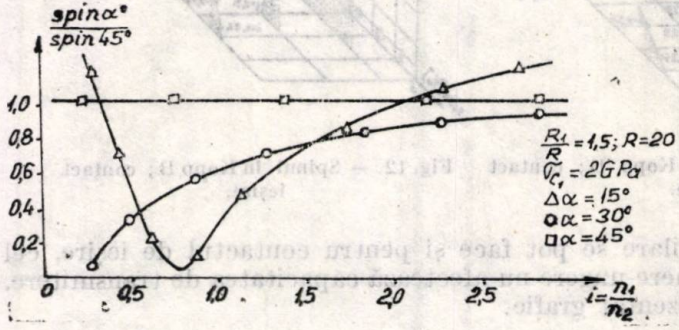


Fig. 15. — Variația relativă a spinului; contact intrare.

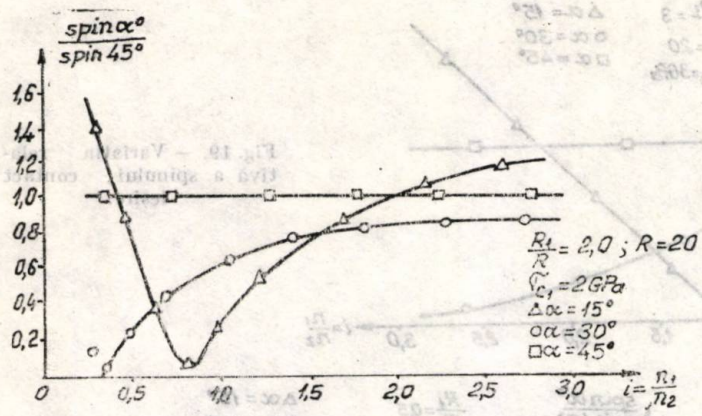


Fig. 16. — Variația relativă a spinului; contact intrare.

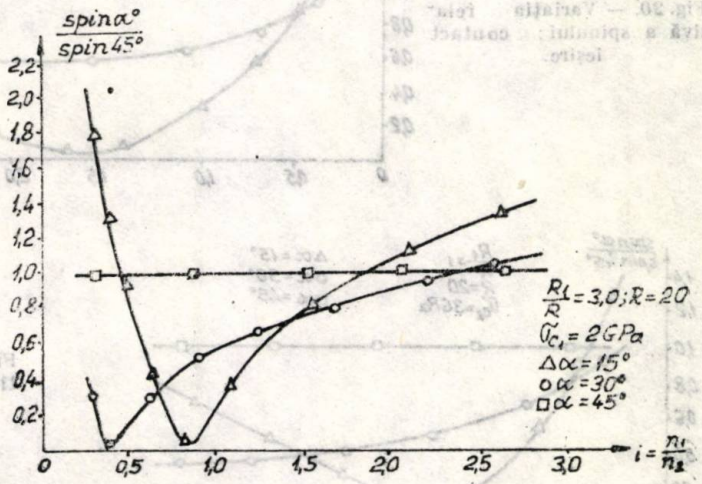


Fig. 17. — Variația relativă a spinului; contact intrare.

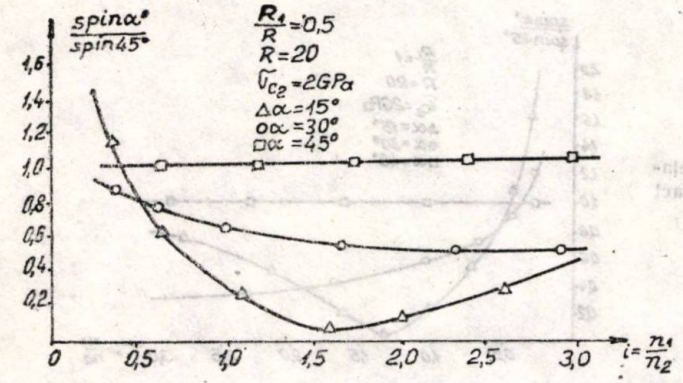


Fig. 18. — Variația relativă a spinului; contact ieșire.

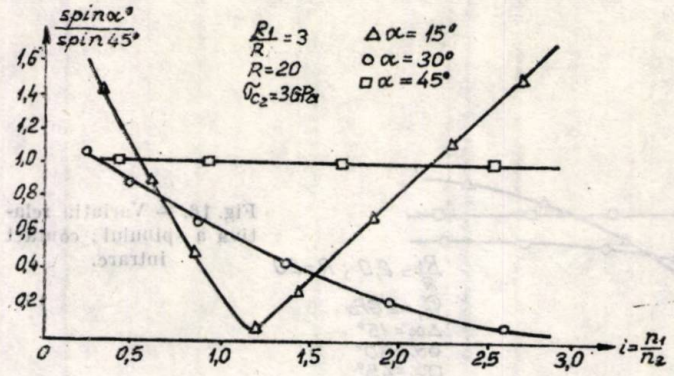


Fig. 19. — Variația relativă a spinului; contact ieșire.

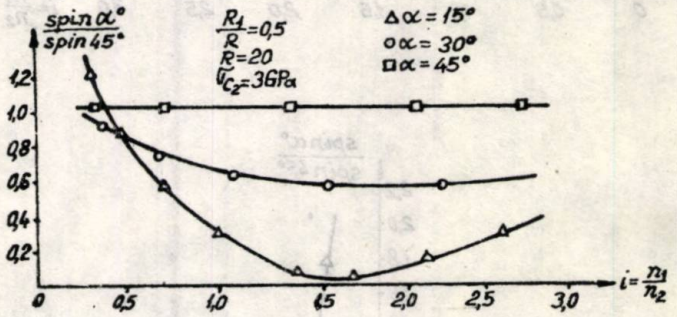


Fig. 20. — Variația relativă a spinului; contact ieșire.

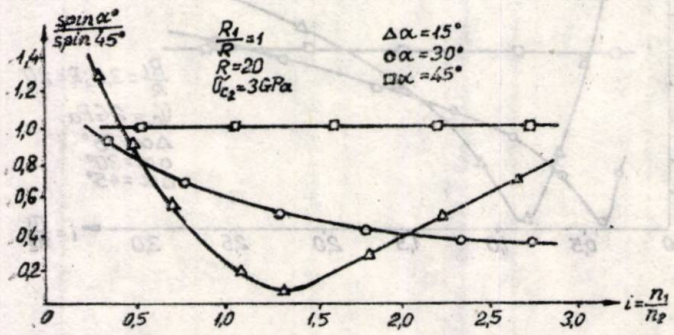


Fig. 21. — Variația relativă a spinului; contact ieșire.

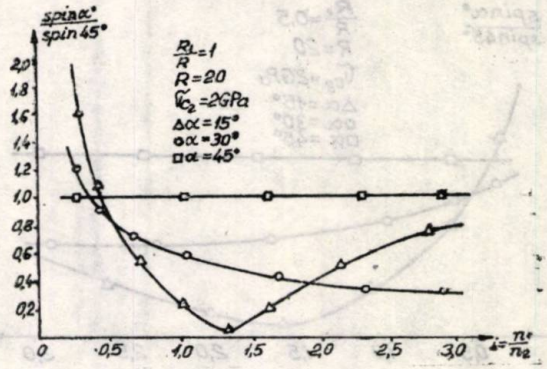


Fig. 22. — Variația relativă a spinului; contact ieșire.

peste 60% la o gamă de 5; în medie spinul se reduce cu peste 40%, pe întreaga gamă. Dacă unghiul conurilor este de 30° numai are loc o reducere așa de substanțială a spinului, decît într-o gamă mult mai mică; totuși pe întreaga gamă spinul este mai redus ca în varianta originală. O dată cu creșterea dimensiunilor geometrice, prin raportul R_1/R se remarcă o restrîngere a domeniului în care se reduce spinul. Din analiza acestor grafice rezultă unghiul optim $\alpha_{optim} = 30°$, cu atît mai mult cu cît acceptarea acestui unghi nu complică sistemul de reglare a raportului de transmitere.

Reducerea unghiului α de la 45° la 30° are ca efect și micșorarea forței axiale care solicită rulmenții axiali, deci și a pierderilor.

Așa cum se observă din schema de principiu a variatorului, contactul dintre bilă și inel reținere-ungere este greu încărcat, totuși tensiunea de contact nu depășește valoarea de 2GPa, chiar dacă cea din contactul de intrare este de 3 GPa. Deoarece creșterea conformității transversale nu reduce substanțial valoarea tensiunilor, ea se recomandă la o valoare de $\varphi = 0{,}85$, întrucît pierderile prin rostogolire sînt minime [6].

CONCLUZII

Din cele prezentate rezultă următoarele concluzii:

- variatoarele sferice pot transmite puteri într-o gamă mare de la 90W pînă la 11 kW;
- gama de reglare capătă valori, uzual, de 9 și poate atinge 20 varianta Contraves;
- din punct de vedere tehnologic, cele mai avantajoase par a fi cele la care axa elementului intermediar nu este materializată, dar sînt mai complicate constructiv;
- dintre variatoarele cu axă materializată cele mai utilizate sînt Kopp B, la care prezența inelului de reținere-ungere nu mai încarcă lagărele elementului intermediar cu forță normală; de asemenea și nivelul de ulei este destul de scăzut, numai pentru scufundarea inelului de reținere-ungere;
- pentru varianta Kopp B s-au elaborat relații de calcul a spinului care permit stabilirea unor dimensiuni geometrice și a unei game de reglaj convenabile;
- relațiile pentru spin, în toate contactele, arată că el depinde de unghiul conurilor α, de dimensiunile geometrice ale elementelor active R, R_1, de raportul de transmitere, prin unghiul β, și de alunecare;
  - se observă că o creștere a unghiului α conduce la o mărime a spinului, valabil pentru toate rapoartele R_1/R;
  - un efect similar îl are, cum este și firesc, creșterea tensiunii de contact;
  - atunci cînd raza corpului sferic scade, celelalte condiții fiind neschimbate, nu se produc modificări substanțiale ale valorii spinului;
- firma producătoare de astfel de transmisii utilizează pentru conuri unghiul $\alpha = 45°$, iar pentru a verifica dacă acesta este optim, s-a trasat variația relativă a spinului, pentru diverse

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁRA 1968

valori ale raportului de transmitere, cînd $\alpha = 15°$ și $\alpha = 30°$, adoptînd ca bază unghiul $\alpha = 45°$, rezultînd:

- utilizarea pentru discuri a unui unghi de 15°, are ca efect reducerea spinului aproape pe întreaga gamă, cînd raportul R_1/R capătă valori mici; o dată cu creșterea acestui raport se restrînge gama în care are loc micșorarea spinului;
- utilizarea pentru discuri a unui unghi $\alpha = 30°$, are ca efect reducerea spinului, nu așa de substanțial ca mai sus, totuși pe întreaga gamă spinul este mai redus ca în varianta originală;
- din analiza acestor grafice rezultă unghiul optim $\alpha_{optim} = 30°$, cu atît mai mult cu cît acceptarea acestui unghi nu complică sistemul de reglare a raportului de transmitere;
- reducerea unghiului α de la 45° la 30°, are ca efect micșorarea forței axiale care solicită rulmenții axiali, deci la aceeași putere și ulei, randamentul transmisiei va fi substanțial îmbunătățit;

— deoarece creșterea conformității transversale, nu reduce substanțial valorile tensiunilor dintre bile și inelul reținere-ungere; ea se recomandă la $\varphi = 0{,}85$, întrucît pierderile prin rostogolire sînt minime.

Primit în redacție la 25 martie 1989

BIBLIOGRAFIE

1. I. M. CIORNEI, *Teză de doctorat*, Institutul Politehnic București, 1986.
2. I. M. CIORNEI, E. N. DIACONESCU, *Unele aspecte ale cinematicii elementelor active ale variatoarelor EHD*, **SCMA, 47**, București, 1984
3. O. S. CREȚU, G. L. SLEVOACĂ, *Variator cu rolă autoașezală*, Tribotehnica, 1984, Iași, 1984
4. O. S. CREȚU, M. DAMASCHIN, M. IONESCU, S. C. PĂTRAȘ, G. IRIMIA, *Variator de putere constantă pentru FCA 810*, VAREHD 3, Suceava, 1984, 237—244
5. E. N. DIACONESCU, *Ph. D. Thesis*, Unieversity of London, 1975
6. E. N. DIACONESCU, I. M. CIORNEI, *Studiu de sinteză privind forțele tangențiale în contactul EHD, efectul lor asupra durabilității cu aplicații la rulmenți*, Contract de cercetare **803/1978**, Întreprinderea de Rulmenți Bîrlad, 1980
7. A. GRAEMIGER, *Stufenlos regelbares Wölzgetribe holer Regulirgenanigkeit und Leistung*, Tehnische Rundschau, **Nr. 15**, 1963
8. F. HUBER, *Stufenlos regulierbares Getriebe*, Brevet Elveția, cl. 47 h 14, F06 h 5, **Nr. 415647**, 31.03.65, 14.04.67
9. F. HUBER, *Stufenlos regulierbares Getriebe*, Brevet Elveția, cl. 47 h 14, F06 h, **Nr. 415217**, 08.10.64, 30.12.66
10. M. KASHIHARA, *Infinitely variable speed chande gear utilising a ball*, Brevet SUA, cl. 01.74—198, Nr. **3154957**
11. O. SIGNER, *Infinitely variable speed transmission apparatus silent bloc*, (Australia), Brevet SUA, cl. 74, 91. **Nr. 3285083**, 09.07.64, 15.11.66
12. G. G. TRACHMANN, *The Short-Time Viscosity Behaviours of a Lubricant in a Hertzian Pressure*, **ASME, Paper, nr. 47**, Lob. 8
13. W. WERNITZ, *Friction at Hertzian Contact with Combined Roll and Twist*, Rolling Contact Phenomena, 132—156, ed. Bidwell, Elsevir, Amsterdam, 1962

Documentație tehnică de la firmele

14. * * * Allspeeds Ltd. Clayton-le-Moors, Accrington, Lancachire, Anglia
15. * * * A. G. Contraves, 8052, Zürich, Schaffhausastr. 580, Elveția
16. * * * Eisenwerk Wülfel 3, Hannover—Wülfel, Eichell, F.R.G.
17. * * * Neuweg Fertigung GMBHD 7932, Munderkingen/Donau, R.F.G.

REFERITOR LA O PROPUNERE PENTRU CALCULUL TABLIERELOR DE POD

de G. ONU

Institutul de Proiectări Transporturi Auto, Navale, Aeriene, București

Într-un articol [1] publicat relativ recent în paginile revistei a fost prezentat un mod de a calcula, în două etape, plăci ortotrope cu longeroni închiși și tabliere de pod cu grinzi chesonate. S-a făcut sugestia, ca în cele două etape de calcul, să se folosească trei programe diferite.
Dată fiind importanța subiectului abordat, ne propunem să contribuim, în cele ce urmează, cu unele sugestii la îmbunătățirea modului de calcul propus în [1]. În esență, se va arăta că toate calculele necesare pot fi efectuate cu un singur program nespecializat.

INTRODUCERE

Într-un articol relativ recent [1] se propune ca determinarea eforturilor în plăcile ortotrope și în tablierele cu grinzi chesonate să se facă prin intermediul unui calcul în două etape. În prima etapă, cu ajutorul echivalenților și a unui program scris pentru rețele de grinzi, urmează să se calculeze deplasările structurii și eforturile din grinzile principale sau logeroni. În vederea determinării eforturilor în sens transversal, eforturi care apar în urma încovoierii generale a structurii și a efectului local al încărcării, autorul preconizează ca, într-o a doua etapă, să se utilizeze un program scris pentru cadre. De asemenea, se sugerează ca determinarea eforturilor din încovoierea locală a plăcii superioare să se realizeze cu ajutorul metodei elementelor finite sau a diferențelor finite. Aceasta, evident presupune utilizarea unui al treilea program de calcul automat.

Procedeul de calcul în două etape folosit la verificarea suprastructurilor de pod este bine cunoscut proiectanților de specialitate [2,5]. Acesta se aplică diferențiat, uzînd de metode și programe de calcul specifice, în funcție de particularitățile podului analizat. Există însă numeroase cazuri în care, prin utilizarea unei metode adecvate, verificarea structurii se poate efectua, cu precizia dorită, într-o singură etapă de calcul. Metoda fîșiilor finite, ignorată în [1], constituie un foarte bun exemplu de acest fel [3 — 11]. Pentru panourile de placă ortotropă de tipul celui analizat în [1], această metodă reprezintă cel mai eficient instrument de calcul disponibil. Într-o singură etapă de calcul se obțin atît eforturile de încovoiere cît și cele de membrană, atît în tolă cît și în tălpile și pereții longeronilor. Un program scris pe baza metodei fîșiilor finite, adaptat pentru calculatoare românești, se află de circa zece ani la dispoziția proiectanților [10, 11].

Scopul principal al acestei note tehnice este de a contribui, cu unele sugestii, la îmbunătățirea modului de calcul propus în [1]. Cele două etape de calcul propuse vor fi discutate pe scurt în cele ce urmează.

Analogia cu rețeaua de grinzi. Din cele afirmate în partea introductivă a articolului [1], rezultă că pînă la apariția acestuia, programele scrise pentru calculul rețelelor de grinzi nu au fost utilizate la analiza supra-

structurilor de pod. Se susține că metoda lui Ch. Massonnet, bazată pe analogia rețea de grinzi — placă ortotropă, „a fost dezvoltată și utilizată anterior apariției tehnicii electronice de calcul". Se pare că autorul nu știe că în 1972, destul timp după apariția calculatoarelor, însuși profesorul Massonnet a publicat un volum consacrat folosirii calculatorului la analiza structurilor, volum în care printre altele, este prezentat un program bazat pe analogia amintită. Programul scris și pentru calculul tablierelor de pod, presupune, la fel ca în [1] de altfel, o divizare a tablierului în sens transversal și longitudinal în fîșii idealizate prin intermediul elementelor de grindă. Ediția românească a acestei cărți a apărut în anul 1974 [12].

Elementul cheie al oricărei analize a tablierelor de pod, prin intermediul analogiei cu rețeaua de grinzi, îl constituie determinarea caracteristicilor grinzilor rețelei. Teoria echivalențelor [7], ignorată în [1], reprezintă cea mai bună cale de a deduce proprietățile elementelor înlocuitoare. Există și alte modalități de a determina aceste proprietăți. O cale accesibilă o constituie utilizarea, cu anumite corecții, a rigidităților plăcii ortotrope reale. Corecțiile sînt necesare întrucît prin echivalare se trece de la o structură continuă, tablierul real, la una discontinuă, rețeaua plană de grinzi. Ilustrativ din acest punct de vedere este studiul lui West [13] apărut în 1973 în care, pe baza unui important volum de date experimentale — peste 50 de tabliere de pod supuse testării —, se fac recomandări privind modul în care trebuie să se determine caracteristicile elementelor înlocuitoare în vederea utilizării programelor scrise pentru rețele de grinzi. Printre cele șase tipuri de tabliere de pod analizate în acest studiu se găsește și suprastructura avută în vedere în [1]. În 1975 Cusens și Pama [8] propun ca domeniul de utilizare al recomandărilor lui West să se extindă, de la tablierele din beton armat, la cele metalice și mixte. De altfel, un întreg capitol al cărții celor doi autori este consacrat utilizării analogiei cu rețeaua de grinzi și cadrul spațial la calculul tablierelor de pod. În 1980 autorul acestei note a prezentat o metodă de calcul pentru poduri pe cadre fundate pe coloane [14], metodă în care, pe baza rezultatelor obținute de West, suprastructura reală este înlocuită cu una echivalentă idealizată sub forma unei rețele plane de grinzi. În bibliografia articolului [1] nu se citează nici studiul lui West nici o altă lucrare consacrată subiectului în discuție.

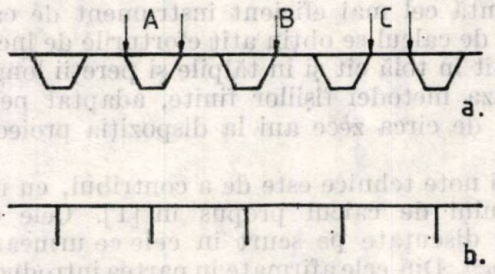


Fig. 1. — Secțiune prin placa ortotropă și prin rețeaua echivalentă.

În figura 1a este reprezentat tipul de secțiune transversală avut în vedere în [1], iar dedesubt, în figura 1b, o secțiune prin rețeaua echivalentă. Grinzile longitudinale reale și cele înlocuitoare coincid ca poziție

și au aceleași rigidități secționale. Grinzile echivalente transversale au momentul de inerție determinat dintr-o condiție de săgeată. Utilizînd acest echivalent și un program de rețele de grinzi, autorul [1] a calculat un panou de placă ortotropă cu longeroni închiși, panou verificat și pe cale experimentală. După cum se arată în [1], rezultatele obținute prin calcul sînt apropiate de cele măsurate pe model. În ciuda rezultatelor favorabile raportate în [1], echivalentul propus este deficitar. Să ne explicăm.

În [1] se propune ca zona cuprinsă între axele a două grinzi longitudinale vecine să se înlocuiască în calcul cu o grindă avînd momentul de inerție determinat dintr-o condiție pusă deformatelor antisimetrice. În mod aproximativ și cu notațiile din figura 2a, această condiție conduce la următoarea rigiditate secțională a grinzii echivalente transversale :

$$(EI)_P = l^3/3W \qquad (1)$$

Adoptarea acestei condiții presupune apariția unor puncte de inflexiune, în deformata secțiunii transversale, la mijlocul distanței dintre grinzile longitudinale. Condiții propice apariției punctelor de inflexiune în zonele centrale ale cîmpurilor transversale pot fi create, de exemplu, prin încărcarea unei singure grinzi dintr-un tablier cu grinzi rigide la torsiune (sarcinile A din figura 1a). Exemplul de calcul prezentat în [1] satisface aceste deziderate și astfel se explică concordanța rezultatelor teoretice și experimentale. În practică, sarcina poate ocupa orice poziție pe suprafața de încărcare, putînd fi aplicată de exemplu pe două grinzi longitudinale vecine sau între ele. Sarcinile C din figura 1a constituie o încărcare de acest fel. În această situație de încărcare este firesc ca la determinarea rigidității elementului idealizat să se pornească de la ideea existenței unei încastrări glisante la mjilocul distanței dintre grinzile încărcate și să se pună condiția de echivalență în mod corespunzător. Cu referire la notațiile din figura 2b, rigiditatea secțională a echivalentului aferent acestui caz de încărcare se calculează în mod aproximativ cu relația

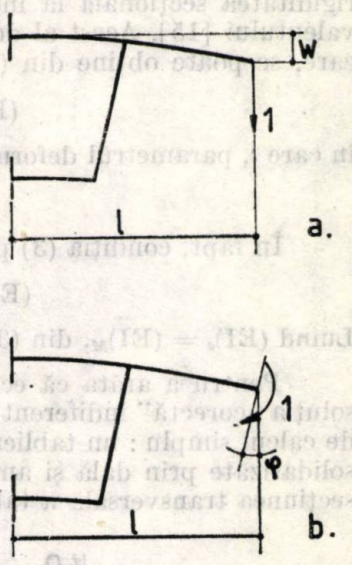


Fig. 2. — Scheme de calcul pentru echivalenți.

$$(EI)_M = 1/\varphi \qquad (2)$$

Cum $(EI)_P \neq (EI)_M$, în exemplul de calcul din [1] $(EI)_P$ este mai mare decît dublul lui $(EI)_M$, se naște întrebarea ce rigiditate trebuie avută în vedere atunci cînd încărcarea ocupă o poziție intermediară (sarcina B din figura 1a). Cu alte cuvinte, caracteristicile rețelei echivalente rezultă a fi în bună parte dependente de poziția încărcării, ceea ce desigur se acceptă cu greu. Acest inconvenient dispare dacă, așa cum propune West, fiecare grindă reală se înlocuiește cu două grinzi echivalente. Dispare și în cazul în care caracteristicile rețelei echivalente sînt derivate direct din

rigiditățile plăcii ortotrope. Modul în care, pe o schemă asemănătoare celei folosite în [1], se determină aceste rigidități, pentru plăci cu longeroni închiși de diverse forme, este prezentat în [8].

O altă cale convenabilă de a elimina inconvenientul semnalat mai sus o constituie introducerea unui al doilea parametru care, alături de rigiditatea secțională la încovoiere, să contribuie la caracterizarea echivalentului [15]. Acest al doilea parametru, rigiditatea secțională la forfecare, se poate obține din (1) și (2), punînd condiția:

$$(EI)_P = (EI)_M/(1 + t) \tag{3}$$

în care t, parametrul deformatei din forfecare, este dat de relația

$$t = 3(EI)_e/l^2(GA)_e \tag{4}$$

În fapt, condiția (3) presupune înlocuirea relației (1) cu relația (5):

$$(EI)_P = (1 + t)\, l^3/3W \tag{5}$$

Luînd $(EI)_e = (EI)_M$, din (3) și (4) rezultă $(GA)_e$.

Pentru a arăta că echivalentul obținut pe această cale conduce la soluția „corectă" indiferent de poziția încărcării, se recurge la un exemplu de calcul simplu: un tablier cu două grinzi chesonate de 50 m deschidere, solidarizate prin dală și antretoaze de reazem. În figura 3a este schițată secțiunea transversală a tablierului și poziția încărcării exterioare. Încăr-

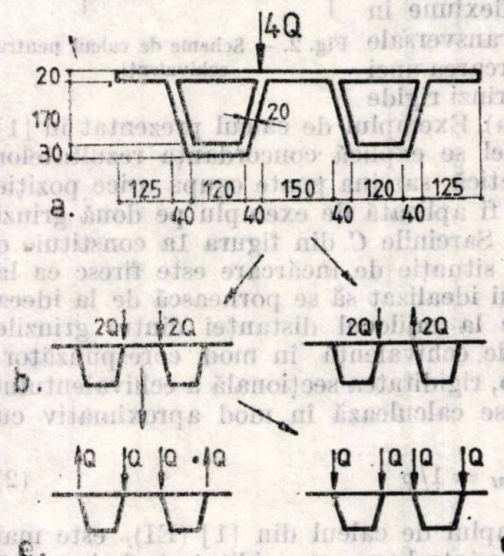


Fig. 3. — Secțiune transversală schematizată și ipoteze de încărcare.

carea este constituită dintr-o sarcină distribuită uniform în lungul deschiderii. Pentru calcul se descompune în componente simetrice și antisimetrice, conform figurii.

Sub încărcarea din figura 3e, momentul încovoietor din dală, între pereții interiori ai casetelor, este constant. În consecință, este de așteptat

ca echivalentul definit prin relaţia (2) să conducă la soluţia „corectă". În tabelul 1 sînt trecute momentele de torsiune din grindă şi momentele încovoietoare din zona centrală a plăcii, la zecimile deschiderii; cu 0 s-a notat secţiunea de reazem şi cu 5 secţiunea de la mijloc. Calculele au fost făcute în trei variante de idealizare a tablierului real. În tabel, coloanele de rezultate desemnate prin (1) conţin soluţia furnizată de echivalentul din [1], iar cele desemnate prin (2) soluţia dată de echivalentul (2). Coloanele (3) conţin momentele rezultate din calcul atunci cînd caracteristicile grinzilor transversale ale reţelei echivalente sînt deduse din relaţiile (2) — (5).

Tabelul 1

Sec	Momente de torsiune în grindă			Momente de încovoiere în placă		
	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)
0	25,25	38,16	38,17	0,0	0,0	0,0
1	18,84	29,83	29,84	0,540	0,243	0,242
2	12,45	21,50	21,50	0,904	0,422	0,422
3	7,56	13,93	13,92	1,138	0,547	0,548
4	3,57	6,84	6,84	1,266	0,621	0,620
5	0,0	0,0	0,0	1,308	0,645	0,644

Comparînd momentele încovoietoare şi cele de torsiune calculate în cele trei variante de idealizare, se constată că rezultatele obţinute în ipotezele (2) şi (3), practic identice, se deosebesc de cele furnizate de echivalentul recomandat în [1]. Deosebirile trebuie puse pe seama rotirilor torsionale care diferă cu cca 60 — 70%.

Sub încărcarea din figura 3c, momentele încovoietoare din dală variază liniar, trecînd prin zero în axa de simetrie. În aceste condiţii este de aşteptat ca echivalentul definit prin relaţia (1) să conducă la soluţia „corectă". În tabelul 2 sînt trecute momentele încovoietoare şi momentele de torsiune din grinzi pentru această ipoteză de încărcare.

După cum se vede din tabel, de această dată, variantele de schematizare (1) şi (3) furnizează soluţii asemănătoare.

Rezultatele obţinute scot în evidenţă faptul că echivalentul derivat din relaţiile (2) — (5) conduce la soluţia „corectă" în ambele ipoteze de încărcare. Din acest punct de vedere ceilalţi doi echivalenţi se dovedesc deficitari.

Folosirea echivalentului caracterizat prin doi parametri presupune utilizarea unui program de calcul pentru reţele de grinzi în care se ţine seama de efectul forţei tăietoare. Celor care nu dispun de un astfel de program li se sugerează să folosească programul RETGRI [16] aflat probabil în dotarea tuturor centrelor de calcul şi a colectivelor de profil din ţară.

Efectul local al încărcării. Pentru a calcula eforturile din placa ortotropă, în zona direct încărcată, autorul [1] folosește două programe, unul pentru cadre plane, celălalt pentru plăci.

Tabelul 2

Secț	Momente de torsiune în grindă			Momente de încovoiere în grindă		
	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)
0	58,92	47,00	58,90	0,0	0,0	0,0
1	54,60	50,12	54,59	34,20	53,35	34,34
2	47,30	46,84	47,30	30,76	56,50	30,92
3	32,78	34,66	32,80	21,10	42,84	21,21
4	16,44	18,12	16,44	14,85	29,90	14,90
5	0,0	0,0	0,0	12,92	25,01	12,94

Cu primul program se calculează cadrul secțiunii tansversale, o fișie îngustă extrasă din placa ortotropă, din zona încărcată direct. Fișia se consideră rezemată pe niște resoarte ale căror rigidități se determină astfel încît săgețile cadrului transversal să coincidă cu săgețile rețelei de grinzi calculate anterior. Întrucît problema este static nedeterminată, rigiditățile resoartelor trebuie să se determine prin încercări. Programul urmează a fi rulat de mai multe ori modificînd caracteristicile resoartelor, pînă cînd se obține coincidența săgeților. Autorul prezintă și o variantă de calcul, în care toate resoartele au aceeași rigiditate, variantă pe care, după cum rezultă din text, o consideră echivalentă cu modul de calcul descris inițial. În comparație cu procedeul bine cunoscut de „a încărca" structura cu deplasări [17 — 19] procedeu care conduce la soluție printr-o singură rulare a programului, propunerea autorului [1] se dovedește ineficientă ridicînd costul prelucrării automate.

Pentru determinarea eforturilor din încovoierea locală, autorul propune să se utilizeze metoda diferențelor finite sau metoda elementelor finite. După cum se explică în text, tola încărcată cu sarcina locală, se consideră a fi o plăcă infinit lungă cu reazeme în dreptul pereților longeronului direct încărcat. Autorul susține că eforturile obținute în sens transversal din calculul de plăcă „trebuie să coincidă pentru valorile maxime cu cele stabilite anterior", cele determinate din calculul cadrului secțiunii transversale. Această coincidență este însă imposibilă deoarece, dat fiind caracterul local al încărcării, placa lucrează pe două direcții, în timp ce la calculul cadrului autorul a admis ca valabile eforturile obținute într-o fișie independentă încărcată cu toată sarcina care-i revine. Dacă s-ar pune problema invers, ca eforturile din cadru să fie aduse, prin reducerea încărcării aferente, la valorile obținute în placă, s-ar putea probabil ajunge prin încercări la o soluție. Consumul de resurse al calculatorului ar fi însă exagerat.

Făcînd abstracţie de cele discutate mai sus şi admiţînd ca valabilă metodologia de calcul în două etape, şansele ca echivalentul propus în [1] să conducă la rezultate satisfăcătoare în a doua etapă de calcul sînt, totuşi, foarte mici. Să vedem de ce.

Într-un calcul etapizat, echivalentul — cel propus sau altul — ar trebui să asigure compatibilitatea deformatelor în aşa fel încît, în cele două etape de calcul pe zonele comune să se obţină aceleaşi eforturi. Astfel de exemplu, pentru schema de încărcare din figura 3c ar trebui ca pe fişia transversală de placă, între cele două forţe, să se obţină aceeaşi diagramă de momente încovoietoare atît în prima etapă, dar şi în a doua etapă de calcul. Cu propunerea făcută în [1] acest lucru nu este realizabil deoarece cadrul „încărcat" cu deplasări este în mod evident mai flexibil decît schema avută în vedere în prima etapă de calcul. În consecinţă, eforturile calculate în cadrul secţiunii transversale vor fi întotdeauna mai mici decît cele determinate iniţial în reţeaua de grinzi. Acest inconvenient dispare dacă, în prima etapă de calcul, se utilizează un echivalent derivat din schema reprezentată în figura 3, aşa cum se sugerează în [15]. În vederea susţinerii acestei afirmaţii se recurge din nou la exemplul tablierului cu două grinzi chesonate.

În tabelul 3 sînt trecute momentele încovoietoare din plăcă la zecimile deschiderii, în secţiunea de încastrare a plăcii în grinda chesonată. A fost avută în vedere schema de încărcare din figura 3c, pentru care, în prima etapă de calcul, cu echivalentul din [1], au fost obţinute rezultate „corecte". În a doua etapă, cadrul secţiunii transversale a fost „încărcat" cu deplasările rezultate din săgeţile şi rotirile reţelei de grinzi calculate anterior. În tabel, cu (1) sînt desemnate rezultatele furnizate de echivalentul din [1], iar cu (4) cele obţinute cu ajutorul echivalentului descris în [15].

Tabelul 3

Secţ	Calcul de reţea		Calcul de cadru	
	(1)	(4)	(1)	(4)
0	0,0	0,0	0,0	0,0
1	1,87	1,69	1,07	1,70
2	2,81	2,68	1,61	2,70
3	3,11	3,08	1,78	3,10
4	3,13	3,19	1,79	3,21
5	3,12	3,20	1,78	3,22

Comparînd momentele încovoietoare secţionale înregistrate în tabel, se constată că echivalentul propus în [1] conduce, în a doua etapă de calcul, la rezultate care diferă de cele „corecte" cu mai mult de 40%. Aceste diferenţe îşi au originea în blocajele introduse în schema de calcul utilizată la determinarea caracteristicilor echivalentului (fig. 2).

În loc de concluzii. Privind în ansamblu propunerea făcută în [1], ne putem pune întrebarea de ce sînt necesare trei programe pentru a calcula o placă ortotropă. La o examinare cît de cît îngrijită a problemei se constată că, pentru gradul de aproximare admis într-un calcul în două etape, sînt suficiente două programe de calcul automat şi că, introducînd încă un echivalent, chiar cu un singur program nespecializat se poate obţine o soluţie acceptabilă.

Astfel, în limitele gradului de aproximare deja acceptat, admiţînd că eforturile din încovoierea locală a plăcii superioare se pot calcula pe

baza analogiei placă — rețea de grinzi, programul scris în diferențe sau elemente finite devine nenecesar. Mai mult, dacă se are în vedere faptul că încărcarea structurii se realizează numai prin intermediul plăcii, se poate renunța la calculul separat al cadrului transversal, cele două aspecte ale efectului local al încărcării putînd fi rezolvate simultan printr-un calcul de rețea de grinzi. Pentru aceasta se separă din structură o porțiune dreptunghiulară, care include și zona direct încărcată, porțiune care se divizează în fîșii atît în sens transversal cît și în sens longitudinal. Divizarea se face astfel încît liniile de racordare ale pereților longeronilor cu placa superioară să coincidă cu axele unor fîșii longitudinale [13]. Pereții și tălpile longeronilor se divizează numai în sens transversal. Segmentele rezultate din această împărțire se introduc în calcul prin intermediul unor echivalenți. Rețeaua de grinzi obținută în acest fel se încarcă simultan cu sarcina exterioară și deplasările, săgeți și rotiri, rezultate din prima etapă de calcul. Se obțin momentele încovoietoare în tolă în ambele direcții, precum și momentele din secțiunile de încastrare elastică a pereților longeronilor în tolă. Dacă în plus se ține seama de faptul că echivalenții pot fi definiți pe cale analitică [15], rezultă că al doilea program nu este necesar în nici-o fază a analizei. Cu alte cuvinte, cele două etape de calcul discutate mai sus pot fi soluționate prin două rulări ale programului scris pentru rețele de grinzi folosind, de fiecare dată, alt tip de echivalent.

În fine, o ultimă sugestie : un calcul într-o singură etapă, pe baza rețelei lui West și a echivalentului sugerat mai sus pentru modelarea în sens transversal a pereților și tălpilor longeronilor.

Primit în redacție la 11 decembrie 1989

BIBLIOGRAFIE

1. GH. OBLEMENCO, *Calculul plăcilor ortotrope utilizîndu-se echivalenți elastici idealizați*, St. Cerc. Mec. Apl., **46**, *3* (1987).
2. C. O'CONNOR, *Design of Bridge Superstructures*, Wiley-Interscience, New York, 1971.
3. Y. K. CHEUNG, *Finite Strip Method in Structural Analysis*, Pergamon Press, New York, 1976.
4. C. BOB, V. BOTA, T. CLIPII, *Calculul dalelor ortotrope prin metoda fișiilor finite*, St. Cerc. Mec. Apl., **38**, *3* (1979).
5. Y. C. LOO, A. R. CUSENS, *The Finite-Strip Method in Bridge Engineering*, Cement & Concrete Association, London, 1978.
6. Y. C. LOO, *The Finite Strip Analysis of Multispan Box-Girder Bridges*, Final Report, University of Dundee, June 1975.
7. C. AVRAM și colab., *Structuri din beton armat, Metoda elementelor finite, Teoria echivalențelor*, Edit. Academiei, București, 1984.
8. A. R. CUSENS, R. P. PAMA, *Bridge Deck Analysis*, John Wiley & Sons, London, 1975.
9. K. J. WILLAM, A. C. SCORDELIS, *Analysis of Orthotropic Folded Plates with Eccentric Stiffeners*, Report No. SESM 70—2, Univ. of Calif., Berkeley, 1970.
10. E. SĂBĂREANU și colab., *Program pentru calculul structurilor cu metoda fișiilor finite*, Simpozionul de informatică, Sibiu, 1979.
11. O. MIRȘU, R. FRIEDRICH, *Construcții din beton armat*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1980.

12. CH. MASSONNET şi colab., *Calculul structurilor la calculatoare electronice*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1974, p. 398.
13. R. WEST, *The use of grillage analogy for the* analysis *of slab and pseudo-slab bridge decks*, Research rep. 21, Cement & Concrete Association, London, 1973.
14. G. ONU, *The elastic response of the pile foundation bridge*, Rev. Roum. Sci. Techn.—Méc. Appl., **25**, *6* (1980).
15. G. ONU, *Echivalenţe în calculul suprastructurilor pe pod*, St. Cerc. Mec. Apl., **47**, *1* (1988).
16. T. CORNEA, *Programul RETGRI — Manual de utilizare*, I.P.C.T., Bucureşti, 1984.
17. O. C. ZIENKIEWICZ, Y. K. CHEUNG, *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*, McGraw-Hill, London, 1967.
18. R. D. COOK, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1974.
19. V. FIERBINŢEANU, *Programe de calcul automat şi posibilităţi de modelare complexă a structurilor de poduri*, A VI-a consfătuire a lucrătorilor de drumuri, poduri şi căi ferate, Tuşnad, 1982.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

INDEX ALFABETIC

Tomul 49 **1990**

	Nr.	Pag
ALDEA, CORINA-MARIA, v. SOARE, M.V.	2	173
ASIMINOAEI, I., v. POTERAŞU, V.F.	3	237
BERBENTE, C., CIZMAŞ, P., O extindere a transformării conforme a reţelelor de plăci plane la reţele de profile de formă dată	5—6	467
BOGATU, GH., Încărcarea de coincidenţă prin elipsă	2	223
BORŞ, C. I., În dezbatere o nouă teorie a gravităţii	4	429
BRATU, P., Dinamica morilor vibratoare pentru măcinarea materialelor granulare	1	39
CARABINEANU, A., Mişcarea uniformă de filtraţie în prezenţa unei cavităţi subţiri	1	19
CHERGUI, S., Cercetări teoretico-experimentale privind determinarea pulsaţiilor proprii ale oscilaţiilor longitudinale ale garniturii de foraj	3	281
CICA, D., v. GROŞANU, I.	2	157
CIORNEI, I. M., DIACONESCU, E. N., Optimizarea contactului cu tracţiune elastohidrodinamică din punct de vedere al forfecării parazite	1	99
CIORNEI, I. M., Căi de îmbunătăţire a variatoarelor elastohidrodinamice	4	401
CIORNEI, I. M., Optimizarea variatoarelor sferice din punct de vedere al spinului	5—6	509
CIZMAŞ, P., Calculul discurilor şi plăcilor circulare încărcate axial simetric prin metoda de recurenţă a celor trei necunoscute	1	71
CIZMAŞ, P., v. BERBENTE, C.	5—6	467
CREMENESCU, GH., DUMITRESCU, I., Optimizarea staţionară asistată de calculator a regimului mecanic al forajului	4	375
CREMENESCU, GH., DUMITRESCU, I., Modelarea adaptivă asistată de calculator a avansului sapei de foraj	5—6	477
DIACONESCU, E. N., v. CIORNEI, I. M.	1	99
DINCĂ, F., ZAHARIA, ELENA, ROŞU, I., Asupra vibraţiilor longitudinale ale barelor cu secţiuni variabile	2	141
DRĂGHICI, I., v. PETRE, A.	4	365
DUMITRESCU, I., v. CREMENESCU, GH.	4	375
DUMITRESCU, I., v. CREMENESCU, GH.	5—6	477
FETECĂU, C., Influenţa termală asupra propagării undelor cilindrice de acceleraţie în fluide simple	4	343
GEORGESCU, ADELINA, VAMOŞ, C., SUCIU, N., Scenarii de turbulenţă în cadrul haosului determinist	4	413
GHINDA, T., v. POPESCU, M.	2	207
GROŞANU, I., VĂDUVA, GH., CICA, D., Metode pentru determinarea ecuaţiei cinematice a roboţilor	2	157
HALANAY, A., v. POPESCU, M.	2	207
ILEA, O., v. MARŢIAN, I.	1	45
IORDACHE, D., v. SOARE, M.V.	1	85
IORDACHE, D., v. SOARE, M.V.	2	173
ISTRATE, V., v. MARINESCU, AL.	3	229
KECS, W., KECS, W. W., Aplicaţii ale algebrei citurilor de convoluţie în viscoelasticitate	5—6	449

ST. CERC. MEC. APL., TOM 49 NR. 5—6, 1990, P. 529—530

	Nr.	Pa
KECS, W. W., v. KECS, W.	5—6	449
MARCOV, N., Mișcări subsonice în prezența unor profile simetrice	1	3
MARINESCU, AL., ISTRATIE, V., STAICU, ȘT., Aplicații ale cuaternionilor în dinamica zborului	3	229
MARȚIAN, I., ILEA, O., Plăci plane dreptunghiulare cu deformații mari încastrate pe contur, supuse acțiunii transversale a unei sarcini uniform distribuite	1	45
MIHALACHE, N., v. POTERAȘU, V. F.	3	237
ONU, G., Referitor la o propunere pentru calculul tablierelor de pod	5—6	519
PANAIT, GH., Echilibrajul rotorului cu masă variabilă (cu dezechilibru variabil). Considerații asupra sistemului de ecuații diferențiale pentru modelul matematic adoptat	4	385
PANDREA, N., Asupra ciocnirilor solidelor	2	117
PAVEL, A., Asupra unor indicatori de capacitate portantă ai recipientelor-butelii presurizate, static, pneumatic sau hidraulic, la interior	2	193
PAVEL, A., Studii privind evaluarea disponibilității de capacitate portantă a mantalei de rezistență a unui convertor de amoniac	3	297
PETRE, A., DRĂGHICI, I., Tehnici de calcul ale coeficientului de siguranță la solicitări variabile în funcție de σ_{-1}, σ_n și σ_0	4	365
POPESCU, M., GHINDA, TH., HALANAY, A., Calculul rezistențelor hidraulice optime la sisteme speciale de protecție la șoc hidraulic a stațiilor de pompare	2	207
POPESCU, M., VLASE, P., Studiul hidraulic experimental al unui tip de clapet antiretur	5—6	489
POTERAȘU, V. F., MIHALACHE, N., ASIMINOAEI, I., Aplicarea metodei elementelor de frontieră la calculul static al plăcilor plane subțiri	3	237
ROȘU, I., v. DINCĂ, F.	2	141
SOARE, M. V., IORDACHE, D., O extindere a metodei parametrilor inițiali la calculul numeric al rezervoarelor	1	85
SOARE, M. V., IORDACHE, D., ALDEA, CORINA-MARIA, Studiul stării de eforturi de membrană în turnurile în formă de tor hiperbolic	2	173
STAICU, ȘT., Unele aspecte privind echilibrul rigidului la legături	2	133
STAICU, ȘT., v. MARINESCU, AL.	3	229
STAICU, ȘT., Expresii matriceale în statica sistemelor plane prin metoda grafului echivalent	4	355
STAN, AL. D., Interferența imobilelor supuse la infiltrarea gazelor	1	27
STAN, AL. D., Corecția debitului de gaze aparente la o înregistrare în bandă a parametrilor	5—6	493
SUCIU, N., v. GEORGESCU, ADELINA	4	413
SZOLGA, V., Procedeu iterativ pentru determinarea răspunsului dinamic staționar la fundații de mașini	4	185
VAMOȘ, C., v. GEORGESCU, ADELINA	4	413
VĂDUVA, GH., v. GROȘANU, I.	2	157
VLASE, P., v. POPESCU, M.	5—6	489
ZAHARIA, ELENA, v. DINCĂ, F.	2	141